الجزء الخاص

بالشرح و التمارين



البحتة





تطبيق
التعلُّم التفاعلي

2024
المعاصر

إعداد نخبة من خبراء التعليم

الصف الثانى الثانوى
القسم العلمى
الفصل الدراسى الثانى

محتويات الكتاب

أولًا : الجبــــر

الوحدة 1 المتتابعات والمتسلسلات



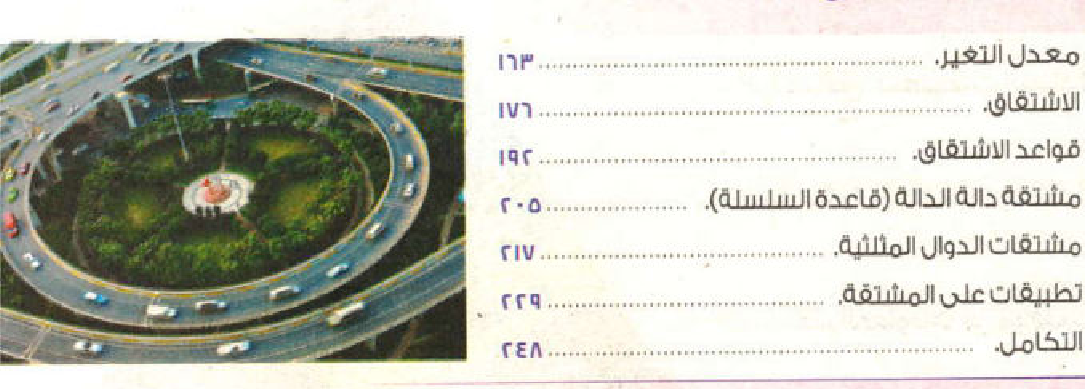
الوحدة 2 التباديل والتوافيق





ثانيًا : التفاضل والتكامل وحساب المثلثات

الوحدة 3 التفاضل والتكامل



الوحدة 4 حساب المثلثات





أولًا

الجبـــر

الوحدة 1

المتتابعات والمتسلسلات.

الوحدة 2

التباديل والتوافيق.



الوحدة الأولى

المتتابعات والمتسلسلات

يمكنك حل الامتحانات التفاعلية على الدروس من خلال مسح QR code الخاص بكل امتحان

الدرس

1

المتتابعات



* المتتابعة الحقيقية غير المنتهية هى دالة مجالها = $ص^+$ ومجالها المقابل = ح وبالتالى يكون بيان المتتابعة هو مجموعة الأزواج المرتبة (س ، ص) حيث س ∈ $ص^+$ ، ص ∈ ح وعلى ذلك يمكن كتابة بيان المتتابعة على الصورة : د = {(١ ، د (١)) ، (٢ ، د (٢)) ، (٣ ، د (٣)) ، ... ، (ن ، د (ن)) ، ...}

* وحيث إن المساقط الأولى للأزواج المرتبة المحددة لبيان المتتابعة هى عناصر $ص^+$ وهى معروفة لدينا فإنه يمكن الاستغناء عن كتابتها فى بيان المتتابعة والاكتفاء بكتابة المساقط الثانية داخل قوسين من النوع ( ) تمييزًا لها عن قوسى المجموعة { }

* وعلى ذلك يمكن التعبير عن المتتابعة كما يأتى : (د (١) ، د (٢) ، د (٣) ، ... ، د (ن) ، ...) والقيم د (١) ، د (٢) ، د (٣) ، ... تسمى حدود المتتابعة حيث د (١) هو الحد الأول للمتتابعة ويرمز له بالرمز $ح_١$

، د (٢) هو الحد الثانى للمتتابعة ويرمز له بالرمز $ح_٢$ ، د (ن) هو الحد النونى للمتتابعة ويرمز له بالرمز $ح_ن$ وهكذا .....

وبذلك يمكن التعبير عن المتتابعة بصورة أخرى كما يأتى : $(ح_ن) = (ح_١ ، ح_٢ ، ح_٣ ، ... ، ح_ن ، ...)$

* وإذا كان مجال الدالة يتكون من أول (ن) من الأعداد الصحيحة الموجبة فإن المتتابعة تكون منتهية.

فمثلًا : إذا كانت الدالة د : $ص^+$ ⟵ ح حيث د (س) = ٢ س + ٣ فإن :

د (١) = ٢ (١) + ٣ = ٥ ، د (٢) = ٢ (٢) + ٣ = ٧ ، د (٣) = ٢ (٣) + ٣ = ٩

، د (٤) = ٢ (٤) + ٣ = ١١ ، ...

فإن : (د (١) ، د (٢) ، د (٣) ، د (٤) ، ...) **أى** (٥ ، ٧ ، ٩ ، ١١ ، ...) تسمى متتابعة

ويكون : $ح_١ = ٥$ ، $ح_٢ = ٧$ ، $ح_٣ = ٩$ ، $ح_٤ = ١١$ وهكذا

وبصفة عامة يكون : د (ن) = ٢ ن + ٣ حيث ن ∈ $ص^+$ ويرمز لذلك بالرمز $ح_ن$

(الحد النونى) حيث $ح_ن = ٢ ن + ٣$ والذى من خلاله يمكن إيجاد قيمة أى حد إذا علمت رتبته ن

ملاحظـات

1. لاحظ الفرق بين $(ح_ن)$ ، $ح_ن$ حيث $(ح_ن)$ ترمز للمتتابعة بينما $ح_ن$ ترمز للحد النونى للمتتابعة.
2. حدود المتتابعة هى صور عناصر مجال المتتابعة.
3. لاحظ الفرق بين المتتابعة والمجموعة حيث إن :

* المتتابعة تخضع لترتيب عناصرها بينما المجموعة لا تخضع لترتيب عناصرها.
* المتتابعة قد تتكرر عناصرها بينما المجموعة لا يمكن أن تتكرر عناصرها.

المتتابعة المنتهية والمتتابعة غير المنتهية

تعريـف

- **المتتابعة المنتهية هى** : متتابعة عدد حدودها منته أى لها عدد محدود من العناصر.
- **المتتابعة غير المنتهية هى** : متتابعة عدد حدودها غير منته أى لها عدد لا نهائى من العناصر.

مثال 1

بين أى المتتابعات الآتية منتهية وأيها غير منتهية :

1. (٢ ، ٥ ، ٨ ، ١١ ، ... ، ٣٢)
2. $(\frac{1}{2}$ ، ١ ، ٢ ، ٤ ، ...)
3. $(ح_ن)$ حيث $ح_ن = ٢ن - ٣$ ، $ن \in ص^+$
4. $(ح_ن)$ حيث $ح_ن = \frac{(-1)^ن}{٢ن}$ ، $ن \in \{١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥\}$

الحـل

1. متتابعة منتهية.
2. متتابعة غير منتهية.
3. ∵ $ن \in ص^+$ ∴ عدد الحدود غير منته.
   ∴ المتتابعة غير منتهية.
4. ∵ $ن \in \{١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥\}$ ∴ عدد الحدود = ٥
   ∴ المتتابعة منتهية.

الحد العام للمتتابعة

يرمز للحد العام للمتتابعة بالرمز $ح_ن$ ويسمى أحيانًا بالحد النونى حيث $ح_ن$ هو صورة العنصر الذى ترتيبه $ن$ فى المتتابعة ويمكن استنتاجه من خلال بعض الحدود المعطاة من المتتابعة وذلك بإدراك العلاقة بين قيمة الحد $ح_ن$ ورتبة الحد $ن$

مثال ٢

اكتب الحد العام لكل من المتتابعات الآتية :

١ (٢ ، ٤ ، ٦ ، ٨ ، ...)

٢ $\left(\frac{١}{٢} ، \frac{١}{٤} ، \frac{١}{٨} ، \frac{١}{١٦} ، ...\right)$

٣ $\left(\frac{-١}{٣} ، \frac{١}{٤} ، \frac{-١}{٥} ، \frac{١}{٦} ، ...\right)$

الحل

١ ∵ $ح_١ = ٢ (١)$ ، $ح_٢ = ٢ (٢)$ ، $ح_٣ = ٢ (٣)$ ، $ح_٤ = ٢ (٤)$ ، ...

∴ الحد العام هو : $ح_ن = ٢ ن$

٢ ∵ $ح_١ = \left(\frac{١}{٢}\right)^١$ ، $ح_٢ = \left(\frac{١}{٢}\right)^٢$ ، $ح_٣ = \left(\frac{١}{٢}\right)^٣$ ، $ح_٤ = \left(\frac{١}{٢}\right)^٤$ ، ...

∴ الحد العام هو : $ح_ن = \left(\frac{١}{٢}\right)^ن$

٣ ∵ $ح_١ = \frac{(-١)^١}{٢ + ١}$ ، $ح_٢ = \frac{(-١)^٢}{٢ + ٢}$ ، $ح_٣ = \frac{(-١)^٣}{٢ + ٣}$ ، $ح_٤ = \frac{(-١)^٤}{٢ + ٤}$ ، ...

∴ الحد العام هو : $ح_ن = \frac{(-١)^ن}{٢ + ن}$

لاحظ أنه يمكن استنتاج الحد العام لبعض المتتابعات كما يلي :

١ متتابعة أعداد العد (١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ...) حدها العام هو $ح_ن = ن$ بينما المتتابعة (٤ ، ٥ ، ٦ ، ...) تمثل متتابعة أعداد العد إبتداء من الحد الرابع ويكون حدها العام هو $ح_ن = ن + ٣$

٢ متتابعة أعداد العد الفردية (١ ، ٣ ، ٥ ، ٧ ، ...) حدها العام هو $ح_ن = ٢ ن - ١$ بينما المتتابعة (١١ ، ١٣ ، ١٥ ، ...) تمثل متتابعة أعداد العد الفردية ابتداء من الحد السادس ويكون حدها العام هو $ح_ن = ٢ (ن + ٥) - ١$

٣ متتابعة أعداد العد الزوجية (٢ ، ٤ ، ٦ ، ٨ ، ...) حدها العام هو $ح_ن = ٢ ن$ بينما المتتابعة (١٠ ، ١٢ ، ١٤ ، ...) تمثل متتابعة الأعداد الزوجية ابتداء من الحد الخامس ويكون حدها العام هو $ح_ن = ٢ (ن + ٤)$

٤ متتابعة الأعداد المربعة (١ ، ٤ ، ٩ ، ١٦ ، ...) حدها العام $ح_ن = ن^٢$ بينما المتتابعة (٩ ، ١٦ ، ٢٥ ، ٣٦ ، ...) تمثل متتابعة الأعداد المربعة ابتداء من الحد الثالث ويكون حدها العام هو $ح_ن = (ن + ٢)^٢$

مثال ٣

اكتب الحدود الخمسة الأولى من المتتابعة $(ح_{ن})$ حيث :

١ $ح_{١} = ٥$ ، $ح_{ن+١} = ٣ ح_{ن}$ حيث $ن \geq ١$ واكتب الحد العام للمتتابعة.

٢ $ح_{ن+٢} = ح_{ن+١} + ح_{ن}$ ، $ن \geq ١$ ، $ح_{١} = ٣$ ، $ح_{٢} = ٧$

٣ $ح_{ن} = \frac{(-١)^{ن-١}}{٢ن + ٣}$

الحل

١ $\because ح_{ن+١} = ٣ ح_{ن}$

$\therefore$ بوضع $ن = ١$ $\qquad \therefore ح_{٢} = ٣ ح_{١}$ $\qquad \therefore ح_{٢} = ٣ (٥) = ١٥$

، بوضع $ن = ٢$ $\qquad \therefore ح_{٣} = ٣ ح_{٢}$ $\qquad \therefore ح_{٣} = ٣ (١٥) = ٤٥$

، بوضع $ن = ٣$ $\qquad \therefore ح_{٤} = ٣ ح_{٣}$ $\qquad \therefore ح_{٤} = ٣ (٤٥) = ١٣٥$

، بوضع $ن = ٤$ $\qquad \therefore ح_{٥} = ٣ ح_{٤}$ $\qquad \therefore ح_{٥} = ٣ (١٣٥) = ٤٠٥$

$\therefore$ الخمسة حدود الأولى من المتتابعة هى : ٥ ، ١٥ ، ٤٥ ، ١٣٥ ، ٤٠٥

أى أن : $(٥ \times ٣^{٠} ، ٥ \times ٣ ، ٥ \times ٣^{٢} ، ٥ \times ٣^{٣} ، ٥ \times ٣^{٤})$

$\therefore$ الحد العام هو : $ح_{ن} = ٥ \times ٣^{ن-١}$

٢ $\because ح_{ن+٢} = ح_{ن+١} + ح_{ن}$

$\therefore$ بوضع $ن = ١$ $\qquad \therefore ح_{٣} = ح_{٢} + ح_{١} = ٧ + ٣ = ١٠$

، بوضع $ن = ٢$ $\qquad \therefore ح_{٤} = ح_{٣} + ح_{٢} = ١٠ + ٧ = ١٧$

، بوضع $ن = ٣$ $\qquad \therefore ح_{٥} = ح_{٤} + ح_{٣} = ١٧ + ١٠ = ٢٧$

$\therefore$ الخمسة حدود الأولى من المتتابعة هى : ٣ ، ٧ ، ١٠ ، ١٧ ، ٢٧

٣ $\because ح_{ن} = \frac{(-١)^{ن-١}}{٢ن + ٣}$

$\therefore$ بوضع $ن = ١$ $\qquad \therefore ح_{١} = \frac{(-١)^{١-١}}{٢(١) + ٣} = \frac{١}{٥}$

، بوضع $ن = ٢$ $\qquad \therefore ح_{٢} = \frac{(-١)^{٢-١}}{٢(٢) + ٣} = \frac{-١}{٧}$

، بوضع $ن = ٣$ $\qquad \therefore ح_{٣} = \frac{(-١)^{٣-١}}{٢(٣) + ٣} = \frac{١}{٩}$

، بوضع $ن = ٤$ $\therefore ح_٤ = \frac{(-١)^{٤-١}}{٢(٤)+٣} = \frac{-١}{١١}$

، بوضع $ن = ٥$ $\therefore ح_٥ = \frac{(-١)^{٥-١}}{٢(٥)+٣} = \frac{١}{١٣}$

$\therefore$ الخمسة حدود الأولى من المتتابعة هى : $\frac{١}{٥}$ ، $\frac{-١}{٧}$ ، $\frac{١}{٩}$ ، $\frac{-١}{١١}$ ، $\frac{١}{١٣}$

ملاحظات

١ فى المثال السابق : العلاقة $ح_{ن+٢} = ح_{ن+١} + ح_ن$ هى علاقة بين حدود المتتابعة وتعنى أن كل حد يساوى مجموع الحدين السابقين له مباشرة.

٢ إذا اختلفت إشارة كل حد فى المتتابعة عن إشارة الحد التالى له مباشرة

فإن المتتابعة تسمى بالمتتابعة التذبذبية ففى المثال السابق :

المتتابعة $\left(\frac{١}{٥} ، \frac{-١}{٧} ، \frac{١}{٩} ، \frac{-١}{١١} ، \frac{١}{١٣} ، ...\right)$ تسمى متتابعة تذبذبية.

٣ بعض المتتابعات ليست لها قاعدة معروفة حتى الآن وبالتالى ليس معروف حدها العام مثل متتابعة الأعداد الأولية (٢ ، ٣ ، ٥ ، ٧ ، ...)

معلومة إثرائية

المتتابعة $(ح_ن)$ التى حدودها (١ ، ١ ، ٢ ، ٣ ، ٥ ، ٨ ، ١٣ ، ...)

تعرف باسم متتابعة فيبوناتشى وكل حد فى هذه المتتابعة ناتج من مجموع الحدين السابقين له مباشرة وتتحدد قاعدتها كالآتى $ح_{ن+٢} = ح_ن + ح_{ن+١}$ لكل $ن \in ص^+$ ، $ح_١ = ح_٢ = ١$

المتتابعة التزايدية - التناقصية - الثابتة

تعريف

لكل $ن \geq ١$:

- تسمى المتتابعة $(ح_ن)$ **تزايدية** إذا كان $ح_{ن+١} > ح_ن$ أى : $ح_{ن+١} - ح_ن > ٠$.
- تسمى المتتابعة $(ح_ن)$ **تناقصية** إذا كان $ح_{ن+١} < ح_ن$ أى : $ح_{ن+١} - ح_ن < ٠$.
- تسمى المتتابعة $(ح_ن)$ **ثابتة** إذا كان $ح_{ن+١} = ح_ن$ أى : $ح_{ن+١} - ح_ن = ٠$.

مثال ٤

بين أى المتتابعات $(ح_ن)$ الآتية تزايدية وأيها تناقصية وأيها غير ذلك :

١ $(ح_ن) = (٣ن - ٢)$

٢ $(ح_ن) = \left(\frac{١}{٢ن + ١}\right)$

٣ $(ح_ن) = \left(\frac{(-١)^ن}{ن} + ٢\right)$

٤ $(ح_ن) = (٥)$

الحل

١ $\because ح_{ن+١} - ح_ن = (٣(ن + ١) - ٢) - (٣ن - ٢)$

$= ٣ن + ٣ - ٢ - ٣ن + ٢ = ٣ > ٠$

$\therefore$ المتتابعة $(ح_ن)$ تزايدية لجميع قيم $ن \in ص^+$

٢ $\because ح_{ن+١} - ح_ن = \frac{١}{٢(ن + ١) + ١} - \frac{١}{٢ن + ١} = \frac{١}{٢ن + ٣} - \frac{١}{٢ن + ١}$

$= \frac{(٢ن + ١) - (٢ن + ٣)}{(٢ن + ٣)(٢ن + ١)} = \frac{-٢}{(٢ن + ٣)(٢ن + ١)} < ٠$

$\therefore$ المتتابعة $(ح_ن)$ تناقصية لجميع قيم $ن \in ص^+$

٣ $ح_{ن+١} - ح_ن = \left(\frac{(-١)^{ن+١}}{ن + ١} + ٢\right) - \left(\frac{(-١)^ن}{ن} + ٢\right) = \frac{(-١)^{ن+١}}{ن + ١} - \frac{(-١)^ن}{ن}$

$= (-١)^{ن+١}\left(\frac{١}{ن + ١} + \frac{١}{ن}\right) = (-١)^{ن+١}\left(\frac{٢ن + ١}{ن(ن + ١)}\right)$

، $\because$ المقدار الناتج موجب إذا كان $ن$ عددًا فرديًا ، سالب إذا كان $ن$ عددًا زوجيًا

$\therefore$ المتتابعة $(ح_ن)$ ليست تزايدية وليست تناقصية.

٤ $\because ح_{ن+١} - ح_ن = ٥ - ٥ =$ صفر

$\therefore$ المتتابعة $(ح_ن)$ ثابتة لجميع قيم $ن \in ص^+$

ملاحظة

المتتابعة الثابتة : هى متتابعة جميع حدودها متساوية أى حدها العام على الصورة :

$ح_ن = أ$ حيث $أ \in ح$ ويكون $ح_{ن+١} - ح_ن =$ صفر وقد تكون منتهية أو غير منتهية

مثل المتتابعة (٥ ، ٥ ، ٥ ، ٥) أ، المتتابعة (-٢ ، -٢ ، -٢ ، -٢ ، ...)

مثال ٥

أوجد الحد العام للمتتابعة (٩ ، ١٣ ، ١٧ ، ٢١ ، ...) ثم أوجد :

١ $ح_٧$ ، $ح_{١٠}$ فى المتتابعة. ٢ رتبة الحد الذى قيمته ٦٥ فى المتتابعة.

الحل

∵ $ح_١ = ٥ + ٤ (١)$ ، $ح_٢ = ٥ + ٤ (٢)$ ، $ح_٣ = ٥ + ٤ (٣)$ ، $ح_٤ = ٥ + ٤ (٤)$

∴ الحد العام : $ح_ن = ٥ + ٤ ن$

١ $ح_٧ = ٥ + ٤ (٧) = ٣٣$ ، $ح_{١٠} = ٥ + ٤ (١٠) = ٤٥$

٢ بفرض $ح_ن = ٦٥$ ∴ $٥ + ٤ ن = ٦٥$

∴ $٤ ن = ٦٠$ ∴ $ن = ١٥$

∴ $ح_{١٥} = ٦٥$

معلومة إثرائية

* إذا علم عدد محدود من الحدود المتتالية بدون قاعدة فلا يمكن تعيين حد عام وحيد لهذه المتتابعة ولتوضيح ذلك نأخذ المتتابعتين التاليتين $(ح_ن) = (ن^٢)$

، $(حَ_ن) = (ن^٢ + (ن - ١) (ن - ٢) (ن - ٣) (ن - ٤))$

فنجد أن الأربعة حدود الأولى فى كل من المتتابعتين متشابهة وهى ١ ، ٤ ، ٩ ، ١٦ بينما الحد الخامس مختلف حيث $ح_٥ = (٥)^٢ = ٢٥$ ، $حَ_٥ = (٥)^٢ + ٤ × ٣ × ٢ × ١ = ٤٩$

وبالتالى يكون $ح_ن$ ، $حَ_ن$ وصف صحيح للمتتابعة (١ ، ٤ ، ٩ ، ١٦ ، ...)

أى أنه : لا يمكن إيجاد حد عام وحيد.

تمارين 1 على المتتابعات

من أسئلة الكتاب المدرسى • فهم • تطبيق • مستويات عليا

أولًا أسئلة الاختيار من متعدد

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

① المتتابعة الحقيقية هى دالة مجالها هو ....

(أ) ح (ب) $ح^+$ (جـ) ص (د) $ص^+$

② الحد التالى فى المتتابعة : (١ ، ٢ ، ٤ ، ٧ ، ١١ ، ...) هو ....

(أ) ١٥ (ب) ١٦ (جـ) ١٧ (د) ١٨

③ الحد التالى فى المتتابعة : $\left(\frac{٣}{١٣} ، \frac{٧}{١٠} ، \frac{١١}{٧} ، \frac{١٥}{٤} ، ...\right)$ هو ....

(أ) $\frac{١٩}{٢}$ (ب) ١٩ (جـ) $-\frac{٢٣}{٢}$ (د) $\frac{١٦}{٣}$

④ الحد العاشر من حدود المتتابعة : (١ ، ١ ، ٢ ، ٣ ، ٥ ، ٨ ، ١٣ ، ...) هو ....

(أ) ٢٩ (ب) ٣٤ (جـ) ٥٥ (د) ٨٩

⑤ الحد الخالى من س فى المتتابعة : (٨ − ٦ س ، ٧ − ٤ س ، ٦ − ٢ س ، ...) هو ....

(أ) $ح_٧$ (ب) $ح_٦$ (جـ) $ح_٥$ (د) $ح_٤$

⑥ الحد السادس فى المتتابعة $(ح_ن)$ حيث $ح_ن = \frac{(-١)^ن}{٢ن}$ هو ....

(أ) ٦ (ب) $\frac{-١}{١٢}$ (جـ) $\frac{١}{١٢}$ (د) $\frac{١}{٦}$

⑦ الحد الرابع فى المتتابعة $(ح_ن)$ حيث $ح_ن = \frac{\sqrt{ن}}{ن + ١}$ هو ....

(أ) ٤ (ب) $\frac{١}{٤}$ (جـ) $\frac{٤}{٥}$ (د) $\frac{٢}{٥}$

⑧ $ح_٥ = ٧$ فى المتتابعة ....

(أ) $(ح_ن) = (٢ن + ١)$ (ب) $(ح_ن) = (٣ن^٢ - ن)$

(جـ) $(ح_ن) = (ن + ٢)$ (د) $(ح_ن) = (٢^ن - ١)$

⑨ فى المتتابعة $(ح_ن)$ حيث $ح_{ن+١} = ن ح_ن$ ، $ن \geq ١$ إذا كان : $ح_١ = ١$

فإن : $ح_٣ =$ ....

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) ٤ (د) $\frac{١}{٢}$

(١٠) الحدود الخمسة الأولى من المتتابعة $(ح_ن) = (ن(ن - ١))$ هي ....

(أ) (١ ، ٢ ، ٦ ، ١٢ ، ٢٠) (ب) (٠ ، ٢ ، ٦ ، ١٠ ، ١٤)

(جـ) (٠ ، ٢ ، ٦ ، ١٢ ، ٢٠) (د) (١ ، ٢ ، ٤ ، ٧ ، ١١)

(١١) الخمسة حدود الأولى من المتتابعة $(ح_ن)$ التي فيها $ح_{ن+١} = \frac{(-١)^ن}{٣ ح_ن}$ ، $ح_١ = ٩$ هي ....

(أ) $(٩ ، \frac{١}{٢٧} ، -٩ ، ٢٧ ، ٩)$ (ب) $(٩ ، \frac{١}{٩} ، -٩ ، \frac{١}{٢٧} ، -٢٧)$

(جـ) $(٩ ، \frac{١}{٢٧} ، \frac{-١}{٨١} ، \frac{١}{٢٤٣} ، \frac{-١}{٧٢٩})$ (د) $(٩ ، -\frac{١}{٢٧} ، -٩ ، \frac{١}{٢٧} ، ٩)$

(١٢) في المتتابعة $(ح_ن)$ إذا كان : $ح_١ = ٢$ ، $ح_{ن+١} = ح_ن - ن$ حيث $ن \geq ١$

فإن الحدود الخمسة الأولى هي ....

(أ) (١ ، ٢ ، -١ ، -٤ ، -٨) (ب) (٢ ، -١ ، ١ ، ٣ ، -٨)

(جـ) (٢ ، ١ ، -١ ، -٤ ، -٨) (د) (٢ ، ١ ، -١ ، -٣ ، -٨)

(١٣) الخمسة حدود الأولى من المتتابعة التي فيها $ح_١ = ١$ ، $ح_٢ = ٢$ ، $ح_ن = ح_{ن-١} + ح_{ن-٢}$

لكل $ن > ٢$ هي ....

(أ) (١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥) (ب) (١ ، ٢ ، ٤ ، ٨ ، ١٦)

(جـ) (١ ، ٢ ، ٣ ، ٥ ، ٨) (د) (١ ، ٢ ، ٣ ، ٦ ، ١٢)

(١٤) إذا علم أن $(ح_ن)$ متتابعة فيها : $ح_ن = ح_١ + ح_٢ + ح_٣ + ... + ح_{ن-١}$ حيث $ن > ٢$

فإن : $ح_١ + ح_٢ + ح_٣ + ح_٤ + ح_٥ - ح_٦ = $ ....

(أ) صفر (ب) ٣٢ (جـ) ٦٤ (د) ٧٢

(١٥) الحد العام لمتتابعة $(ح_ن)$ هو $ح_ن = ٣$ فإن الخمسة حدود الأولى فيها ....

(أ) (٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ ، ٧) (ب) (١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥)

(جـ) (٣ ، ٣ ، ٣ ، ٣ ، ٣) (د) (٤ ، ٥ ، ٦ ، ٧ ، ٨)

(١٦) تكون المتتابعة تناقصية إذا كان : $ح_{ن+١}$ .... $ح_ن$ لكل $ن \geq ١$

(أ) $<$ (ب) $>$ (جـ) $=$ (د) $\geq$

(١٧) يقال للمتتابعة $(ح_ن)$ إنها تزايدية لجميع قيم $ن \in ص^+$ إذا كان ....

(أ) $\frac{ح_ن}{ح_{ن+١}} > ١$ (ب) $ح_ن = ح_{ن+١}$ (جـ) $ح_{ن+١} > ح_ن$ (د) $\frac{ح_ن}{ح_{ن+١}} > -١$

(١٨) تسمى المتتابعة التى حدها النونى $ح_ن = \frac{(-١)^ن}{٣ن - ٢}$ متتابعة ....

(أ) تزايدية. (ب) تناقصية. (جـ) تذبذبية. (د) ثابتة.

(١٩) المتتابعة التى حدها النونى $ح_ن = \frac{٢}{ن} - ١$ حيث $ن \in ص^+$ تمثل ....

(أ) متتابعة تزايدية. (ب) متتابعة تناقصية.

(جـ) متتابعة ثابتة. (د) متتابعة تذبذبية.

(٢٠) المتتابعة التى حدها العام $ح_ن = \left(\frac{١}{٢}\right)^{ن+١}$ تكون ....

(أ) تزايدية. (ب) تناقصية. (جـ) تذبذبية. (د) منتهية.

(٢١) المتتابعة $(ح_ن) = \left((-١)^ن (ن^٢ + ١)\right)$ تكون ....

(أ) تزايدية. (ب) تناقصية. (جـ) تذبذبية. (د) ثابتة.

(٢٢) أى من المتتابعات $(ح_ن)$ التالية تكون متناقصة حيث $ن \in ص^+$ ؟

(أ) $(ح_ن) = (-ن^٢)$ (ب) $(ح_ن) = (ن)$

(جـ) $(ح_ن) = (ن^٣)$ (د) $(ح_ن) = (ن + ١)$

(٢٣) أى مما يأتى يمثل الحد العام لمتتابعة متناقصة ؟

(أ) $ن$ (ب) $ن^٢$ (جـ) $ن^٢ - ٥$ (د) $\frac{ن + ١}{ن}$

(٢٤) المتتابعة (١ ، ٤ ، ٧ ، ١١ ، ...) تكون ....

(أ) تناقصية. (ب) تذبذبية. (جـ) منتهية. (د) غير منتهية.

(٢٥) المتتابعة (٣ ، ٥ ، ٧ ، ٩ ، ... ، ٢١) تكون ....

(أ) تناقصية. (ب) تذبذبية. (جـ) منتهية. (د) غير منتهية.

(٢٦) المتتابعة $(ح_ن) = (ن^٢ - ١)$ ، $ن \in ص^+$ تمثل ....

(أ) تناقصية. (ب) تذبذبية. (جـ) منتهية. (د) غير منتهية.

(٢٧) المتتابعة $(ح_ن)$ حيث $ح_ن = \frac{٢}{ن} + ١$ ، $ن \in \{١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥\}$ تكون ....

(أ) تزايدية. (ب) تذبذبية. (جـ) منتهية. (د) غير منتهية.

(٢٨) الحد النونى للمتتابعة : (١ ، ٤ ، ٩ ، ١٦ ، ...) هو ....

(أ) $٢ن$ (ب) $٤ن$ (جـ) $٢^ن$ (د) $ن^٢$

(٢٩) الحد النونى للمتتابعة : (-١ ، ٤ ، -٩ ، ١٦ ، ...) هو ....

(أ) $-ن^٢$ (ب) $(-١)^ن ن^٢$ (جـ) $(-ن)^٢$ (د) $-٤ن$

(٣٠) الحد العام للمتتابعة : $\left(\frac{١}{٢} ، \frac{٢}{٣} ، \frac{٣}{٤} ، \frac{٤}{٥} ، ...\right)$ هو ....

(أ) $\frac{ن}{٢ن}$ (ب) $\frac{ن}{ن+١}$ (جـ) $\frac{١}{ن}$ (د) $\frac{ن}{٢ن-١}$

(٣١) الحد العام للمتتابعة : $\left(١ ، \frac{١}{١٠} ، \frac{١}{١٠٠} ، \frac{١}{١٠٠٠} ، ...\right)$ هو $ح_ن$ = ...

(أ) $ن^{ن-١}$ (ب) $(١٠)^{-ن}$ (جـ) $\left(\frac{١}{١٠}\right)^{ن-١}$ (د) $(٠,١)^{ن+١}$

(٣٢) الحد النونى للمتتابعة : $\left(٢ ، ٢ ، \frac{٨}{٣} ، ٤ ، ...\right)$ هو ....

(أ) $ح_ن = ن - ١$ (ب) $ح_ن = ٢ن - ١$

(جـ) $ح_ن = ٢^{ن-١}$ (د) $ح_ن = \frac{٢^ن}{ن}$

(٣٣) الحد العام للمتتابعة : $\left(\frac{١}{٣} ، \frac{١}{٢} ، \frac{٣}{٥} ، \frac{٢}{٣} ، ...\right)$ هو ....

(أ) $\frac{١}{ن}$ (ب) $\frac{١}{ن-١}$ (جـ) $\frac{ن}{ن+١}$ (د) $\frac{ن}{ن+٢}$

(٣٤) الحد النونى للمتتابعة : $\left(\frac{١}{٢} ، \frac{١}{٦} ، \frac{١}{١٢} ، ...\right)$ هو $ح_ن$ = ...

(أ) $\frac{١}{ن^٢+ن}$ (ب) $\frac{١}{ن} + \frac{١}{ن+١}$ (جـ) $\frac{١}{ن^٢+٢}$ (د) $\frac{١}{ن+٣}$

(٣٥) الحد العام لمتتابعة الأعداد الصحيحة الزوجية الموجبة هو ....

(أ) ٤ ن (ب) ٢ ن (جـ) ٢ ن − ٢ (د) ٤ ن − ٢

(٣٦) الحد العام لمتتابعة الأعداد الصحيحة الزوجية الموجبة الأكبر من ٢ هو ....

(أ) ٢ ن (ب) ٢ ن + ٢ (جـ) ٤ ن (د) ٤ ن − ٢

(٣٧) الحد العام للمتتابعة : (−١ ، ٢ ، −٤ ، ٨ ، −١٦ ، ...) هو ....

(أ) $-(٢)^{ن-١}$ (ب) $(-٢)^{ن-١}$

(جـ) $ح_١ = -١$ ، $ح_٢ = ٢$ ، $ح_{ن+٢} = ح_ن ح_{ن+١}$ (د) $(-١)^ن (٢)^{ن-١}$

(٣٨) الحد العام للمتتابعة : $\left((٢ \times ٣) ، (٣ \times ٤) ، (٤ \times ٥) ، (٥ \times ٦) ، ...\right)$ هو $ح_ن$ = ...

(أ) $(ن - ١)(ن + ١)$ (ب) $ن(ن + ١)$

(جـ) $٢ن(ن + ١)$ (د) $(ن + ١)(ن + ٢)$

(٣٩) أى مما يأتى لا يمكن أن يكون الحد العام للمتتابعة $(ح_ن)$ = (١ ، −١ ، ١ ، −١ ، ...)

(أ) $ح_ن = -(-١)^ن$ (ب) $ح_ن = (-١)^{ن-١}$

(جـ) $ح_ن = -$ جتا $(ن\pi)$ (د) $ح_ن =$ جتا $(ن\pi)$

(٤٠) فى المتتابعة (٢ ، ٥ ، ٨ ، ١١ ، ...) :

أولًا : الحد العام هو $ح_ن$ = ...

(أ) ٢ ن (ب) ٤ ن − ٢ (جـ) ن + ١ (د) ٣ ن − ١

ثانيًا : $ح_{١١}$ = ...

(أ) ٢٢ (ب) ٣٢ (جـ) ٣٤ (د) ٢٨

ثالثًا : رتبة الحد الذى قيمته ٥٩ هو ....

(أ) $ح_{١٥}$ (ب) $ح_{٢٢}$ (جـ) $ح_{١٨}$ (د) $ح_{٢٠}$

(٤١) فى المتتابعة (٢ ، ٤ ، ٨ ، ١٦ ، ...) :

أولًا : الحد العام هو = ...

(أ) ٢ ن (ب) ن + ١ (جـ) ٢ (ن + ١) (د) $٢^ن$

ثانيًا : رتبة الحد الذى قيمته ١٢٨ هو ....

(أ) $ح_٥$ (ب) $ح_٧$ (جـ) $ح_٨$ (د) $ح_٦$

(٤٢) الحد العاشر من حدود المتتابعة : (جا π ، جا $\frac{π}{٢}$ ، جا $\frac{π}{٣}$ ، جا $\frac{π}{٤}$ ، ...) يساوى ....

(أ) جا ١٠ π (ب) جا $\frac{٩π}{١٠}$ (جـ) جا $\frac{٢}{٥}$ π (د) جا $\frac{٢π}{٥}$

(٤٣) فى المتتابعة ($ح_ن$) حيث $ح_ن$ = ٣ $ن^٢$ − ١ إذا كان $ح_م$ = ٧٤ فإن : م = ...

(أ) ± ٥ (ب) ٥ (جـ) ٤ (د) ٧٤

(٤٤) فى المتتابعة ($ح_ن$) إذا كان : $ح_ن$ = أ + ن ب وكان $ح_١$ = ٥ ، $ح_٣$ = ١١

فإن : ب − أ = ...

(أ) −١ (ب) صفر (جـ) ١ (د) ٥

(٤٥) عدد حدود المتتابعة : (١ ، ٤ ، ٩ ، ١٦ ، ... ، ٦٢٥) هو ....

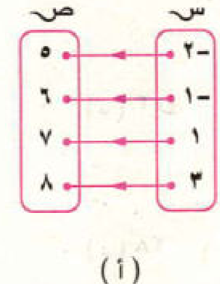
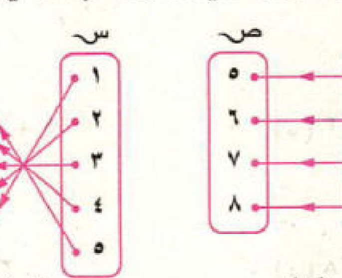
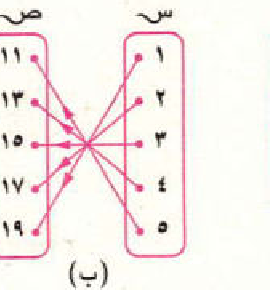
(أ) ٢٥ (ب) ١٢٥ (جـ) ٦٢٥ (د) ٥٠

(٤٦) فى المتتابعة ($ح_ن$) إذا كان $ح_١$ = ١ ، $ح_{ن+١}$ = ٤ $ح_ن$ + ك ، $ح_٣$ = ٣١

فإن : ك = ...

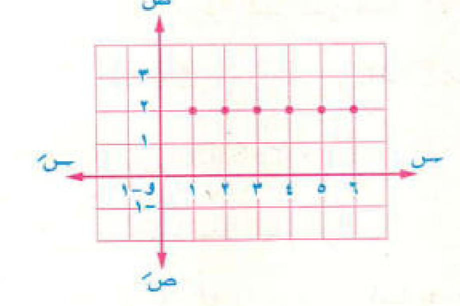
(أ) ٢ (ب) ٥ (جـ) ٣ (د) ٤

(٤٧) أى الدوال الآتية تمثل متتابعة حقيقية ؟

(أ) (ب) (جـ) (د)

(٤٨) الشكل المقابل يمثل متتابعة ....



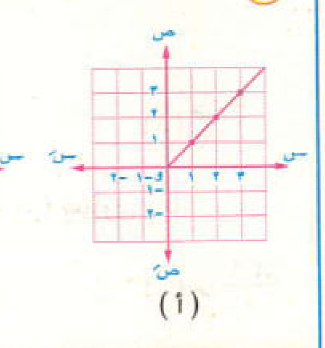
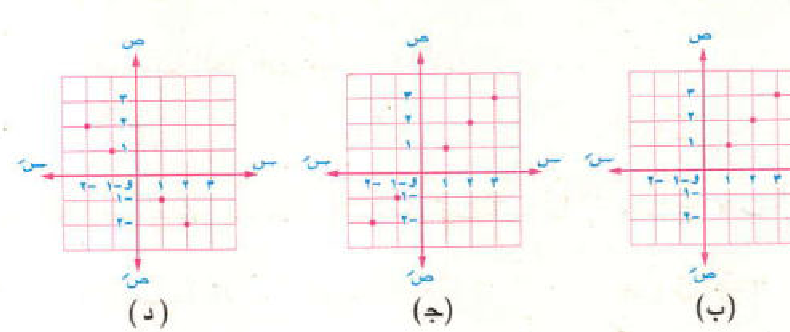
(أ) متزايدة.

(ب) متناقصة.

(جـ) ثابتة.

(د) متذبذبة.

(٤٩) أى الأشكال الآتية تمثل متتابعة ؟

(أ) (ب) (جـ) (د)

ثانيًا الأسئلة المقالية

١ اكتب الخمسة حدود الأولى لكل من المتتابعات التى حدها العام يعطى بالقواعد الآتية :

(١) $ح_ن = ٢ن - ٣$

(٢) $ح_ن = \frac{(-١)^ن}{ن + ٣}$

(٣) $ح_ن = جا\left(\frac{ن}{٤}\pi\right)$

(٤) $ح_ن = ١ + \frac{٢}{\sqrt{ن}}$

(٥) $ح_١ = ٢$ ، $ح_{ن+١} = ٢ح_ن$ ، $ن \geq ١$

(٦) $ح_١ = -١$ ، $ح_{ن+١} = \frac{-١}{ح_ن}$ ، $ن \geq ١$

---

٢ بين أى المتتابعات $(ح_ن)$ الآتية تزايدية وأيها تناقصية وأيها غير ذلك :

(١) $(ح_ن) = (٢ن + ٥)$

(٢) $(ح_ن) = \left(\frac{١}{٢ن - ١}\right)$

(٣) $(ح_ن) = \left(\left(\frac{-١}{٣}\right)^ن\right)$

(٤) $(ح_ن) = \left(\frac{(-١)^ن}{٢ن} + ٤\right)$

٣ اكتب الحد العام لكل من المتتابعات الآتية :

① (١ ، ٨ ، ٢٧ ، ٦٤ ، ...)

② (حتا $\frac{\pi}{٣}$ ، حتا $\frac{٢\pi}{٣}$ ، حتا π ، حتا $\frac{٤\pi}{٣}$ ، ...)

③ ($\frac{١}{٢}$ ، $\frac{٣}{٤}$ ، $\frac{٩}{٨}$ ، $\frac{٢٧}{١٦}$ ، ...)

---

٤ في المتتابعة ($ح_ن$) إذا كان $ح_١ = ٩$ ، $ح_٣ = ٣٦$ ، $ح_{ن+١} = ح_ن + ن س$

أوجد : قيمة س «٩»

---

٥ اكتشف الخطأ :

① كل دالة مجالها ص هي متتابعة.

② كل دالة مجالها {٠ ، ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ...} هي متتابعة غير منتهية.

③ في المتتابعة ($ح_ن$) حيث $ح_ن = ن^٢$ يكون $ح_ن > ح_{ن+١}$

---

٦ إذا كانت ($ح_ن$) متتابعة حدودها (١ ، ١ ، ٢ ، ٣ ، ٥ ، ٨ ، ١٣ ، ...)

① ادرس نمط المتتابعة ثم أوجد الحدين الثامن والتاسع.

② مثل التسعة حدود الأولى من المتتابعة بيانيًا.

③ هل نعتبر أن هذه المتتابعة تزايدية أم تناقصية أم غير ذلك ؟ فسر إجابتك.

④ اكتب العلاقة بين حدود هذه المتتابعة.

تطبيقات حياتية

الربط بالرياضة :

يمارس كريم تمارين اللياقة البدنية لمدة ٨ دقائق في اليوم الأول ثم يزيد الفترة بعد ذلك بمعدل دقيقتين يوميًا.

① اكتب الخمسة حدود الأولى لهذه المتتابعة.

② أوجد الحد العام لهذه المتتابعة.

③ أوجد الزمن الذي يستغرقه كريم في اليوم السابع.

④ في أي يوم سيكون الزمن الذي يستغرقه كريم نصف ساعة ؟ وضح إجابتك.



الدرس 2

المتسلسلات ورمز التجميع

رمز التجميع $\sum$

يستخدم رمز التجميع $\sum$ (ويقرأ سيجما) لكى يرمز لمجموع $ن$ حدًا من الحدود المتتالية فى المتتابعة ($ح_1$ ، $ح_2$ ، $ح_3$ ، ... ، $ح_ر$ ، ... ، $ح_ن$ ، ...)

بدءًا من الحد الأول بأن نكتب : $\sum_{ر=1}^{ن} ح_ر$ وتقرأ مجموع $ح_ر$ من $ر = 1$ إلى $ر = ن$

أى أن : $\sum_{ر=1}^{ن} ح_ر = ح_1 + ح_2 + ح_3 + ... + ح_ن$

ملاحظة

ليس من الضرورى أن يبدأ المجموع من الحد الأول أى أنه يمكن استخدام رمز التجميع $\sum$ للتعبير عن مجموع الحدود المتتالية فى المتتابعة بدءًا من حدها الأول أو الثانى أو الثالث أو الحد رقم $ك$ فى المتتابعة إلى الحد رقم $ن$:

فمثلًا : $\sum_{ر=ك}^{ن} ح_ر = ح_ك + ح_{ك+1} + ح_{ك+2} + ... + ح_ن$

مثال 1

أوجد ناتج كل مما يأتى :

1 $\sum_{ر=1}^{7} ر$

2 $\sum_{ر=4}^{7} (2ر^2 - 1)$

3 $\sum_{ر=1}^{5} \left(\frac{1}{ر+1} - \frac{1}{ر}\right)$

الحل

1 بوضع $ر = 1$ ، 2 ، 3 ، ... ، 7 $\therefore \sum_{ر=1}^{7} ر = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 = 28$

ملاحظة

يمكن استخدام الآلة الحاسبة فى إيجاد ناتج $\sum_{ر=١}^{٧} ر$ كما يلى :

١ نضغط SHIFT ثم Log فيظهر لنا

نكتب x وذلك بالضغط على ALPHA ثم)

٢ نضغط = فيظهر الناتج

٢ بوضع ر = ٤ ، ٥ ، ٦ ، ٧

$$\therefore \sum_{ر=٤}^{٧}(٢ر^٢ - ١) = (٢(٤)^٢ - ١) + (٢(٥)^٢ - ١) + (٢(٦)^٢ - ١) + (٢(٧)^٢ - ١)$$

$$= ٣١ + ٤٩ + ٧١ + ٩٧ = ٢٤٨$$

٣ بوضع ر = ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥

$$\therefore \sum_{ر=١}^{٥}\left(\frac{١}{ر+١} - \frac{١}{ر}\right) = \left(\frac{١}{١+١} - \frac{١}{١}\right) + \left(\frac{١}{٢+١} - \frac{١}{٢}\right) + \left(\frac{١}{٣+١} - \frac{١}{٣}\right)$$

$$+ \left(\frac{١}{٤+١} - \frac{١}{٤}\right) + \left(\frac{١}{٥+١} - \frac{١}{٥}\right)$$

$$= \frac{١}{٢} - ١ + \frac{١}{٣} - \frac{١}{٢} + \frac{١}{٤} - \frac{١}{٣} + \frac{١}{٥} - \frac{١}{٤} + \frac{١}{٦} - \frac{١}{٥}$$

$$= -١ + \frac{١}{٦} = \frac{-٥}{٦}$$

الخواص الجبرية للتجميع

إذا كانت : $(ع_ر)$ ، $(هـ_ر)$ متتابعتين ، $ن \in ص^+$ ، $حـ \in ح$ فإن :

١ $\sum_{ر=١}^{ن} حـ = حـ ن$

فمثلًا : • $\sum_{ر=١}^{ن} ٥ = ٥ن$ • $\sum_{ر=١}^{ن}(-٣) = -٣ن$

٢ $\sum_{ر=١}^{ن} ر = \frac{ن(ن+١)}{٢}$ **أى أن :** $١ + ٢ + ٣ + \cdots + ن = \frac{ن(ن+١)}{٢}$

فمثلًا : $\sum_{ر=١}^{١٠} ر = ١ + ٢ + ٣ + \cdots + ١٠ = \frac{١٠(١٠+١)}{٢} = ٥٥$

٣ $\sum_{ر=1}^{ن} ر^٢ = \frac{ن(ن+١)(٢ن+١)}{٦}$

أى أن : $١^٢ + ٢^٢ + ٣^٢ + \dots + ن^٢ = \frac{ن(ن+١)(٢ن+١)}{٦}$

فمثلًا : $\sum_{ر=1}^{٥} ر^٢ = ١^٢ + ٢^٢ + ٣^٢ + ٤^٢ + ٥^٢ = \frac{٥(٥+١)(٢\times٥+١)}{٦} = ٥٥$

٤ $\sum_{ر=1}^{ن} جـ ع_ر = جـ \sum_{ر=1}^{ن} ع_ر$

فمثلًا : • $\sum_{ر=1}^{٥} ٣ر = ٣ \sum_{ر=1}^{٥} ر = ٣ \times \frac{٥(٥+١)}{٢} = ٤٥$

• $\sum_{ر=1}^{ن} ١٢ ر^٢ = ١٢ \sum_{ر=1}^{ن} ر^٢ = ١٢ \times \frac{ن(ن+١)(٢ن+١)}{٦} = ٢ن(ن+١)(٢ن+١)$

٥ $\sum_{ر=1}^{ن} (ع_ر \pm هـ_ر) = \sum_{ر=1}^{ن} ع_ر \pm \sum_{ر=1}^{ن} هـ_ر$

فمثلًا : $\sum_{ر=1}^{ن} (٢ر+٣) = \sum_{ر=1}^{ن} ٢ر + \sum_{ر=1}^{ن} ٣ = ٢\sum_{ر=1}^{ن} ر + ٣ن$

$= ٢ \times \frac{ن(ن+١)}{٢} + ٣ن = ن^٢ + ن + ٣ن = ن^٢ + ٤ن$

مثال ٢

أوجد بطريقتين مختلفتين : $\sum_{ر=1}^{٤} (ر^٢ + ٣ر - ٢)$

الحل

الطريقة الأولى : (إيجاد المفكوك)

بوضع ر = ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤

$\therefore \sum_{ر=1}^{٤} (ر^٢ + ٣ر - ٢) = (١^٢ + ٣\times١ - ٢) + (٢^٢ + ٣\times٢ - ٢)$

$+ (٣^٢ + ٣\times٣ - ٢) + (٤^٢ + ٣\times٤ - ٢) = ٢ + ٨ + ١٦ + ٢٦ = ٥٢$

الطريقة الثانية : (باستخدام خواص التجميع)

$\sum_{ر=1}^{٤} (ر^٢ + ٣ر - ٢) = \sum_{ر=1}^{٤} ر^٢ + \sum_{ر=1}^{٤} ٣ر - \sum_{ر=1}^{٤} ٢$

$= \frac{٤(٤+١)(٢\times٤+١)}{٦} + ٣ \times \frac{٤(٤+١)}{٢} - ٢\times٤ = ٣٠ + ٣٠ - ٨ = ٥٢$

ملاحظة

جميع الخواص الجبرية السابقة لرمز التجميع لا تستخدم إلا فى حالة إيجاد مجموع المتتابعة بدءًا من الحد الأول أى لإيجاد : $\sum_{ر=1}^{ن} ع_ر$

مثال ٣

أوجد قيمة كل مما يأتى باستخدام خواص رمز التجميع $\sum$:

١ $\sum_{ر=٨}^{١٢} (٢ ر + ٣)$ ٢ $\sum_{ر=٥}^{٨} (ر^٢ - ٢ ر)$

الحـــل

١ لاحظ أن : $\sum_{ر=٨}^{١٢} (٢ ر + ٣)$

تعنى مجموع حدود المتتابعة بدءًا من الحد الثامن إلى الحد الثانى عشر.

، ∵ مجموع الحدود من $ح_٨$ إلى $ح_{١٢}$ = (مجموع الحدود من $ح_١$ إلى $ح_{١٢}$) - (مجموع الحدود من $ح_١$ إلى $ح_٧$)

$$∴ \sum_{ر=٨}^{١٢} (٢ ر + ٣) = \sum_{ر=١}^{١٢} (٢ ر + ٣) - \sum_{ر=١}^{٧} (٢ ر + ٣)$$

$$= \left(\sum_{ر=١}^{١٢} ٢ ر + \sum_{ر=١}^{١٢} ٣\right) - \left(\sum_{ر=١}^{٧} ٢ ر + \sum_{ر=١}^{٧} ٣\right)$$

$$= \left(٢ \times \frac{١٢ (١٢ + ١)}{٢} + ٣ \times ١٢\right) - \left(٢ \times \frac{٧ (٧ + ١)}{٢} + ٣ \times ٧\right)$$

$$= (١٥٦ + ٣٦) - (٥٦ + ٢١) = ١٩٢ - ٧٧ = ١١٥$$

٢ $$\sum_{ر=٥}^{٨} (ر^٢ - ٢ ر) = \sum_{ر=١}^{٨} (ر^٢ - ٢ ر) - \sum_{ر=١}^{٤} (ر^٢ - ٢ ر)$$

$$= \left(\sum_{ر=١}^{٨} ر^٢ - \sum_{ر=١}^{٨} ٢ ر\right) - \left(\sum_{ر=١}^{٤} ر^٢ - \sum_{ر=١}^{٤} ٢ ر\right)$$

$$= \left(\frac{٨ (٨ + ١) (٢ \times ٨ + ١)}{٦} - ٢ \times \frac{٨ (٨ + ١)}{٢}\right)$$

$$- \left(\frac{٤ (٤ + ١) (٢ \times ٤ + ١)}{٦} - ٢ \times \frac{٤ (٤ + ١)}{٢}\right) = (٢٠٤ - ٧٢) - (٣٠ - ٢٠)$$

$$= ١٣٢ - ١٠ = ١٢٢$$

المتسلسلات

المتسلسلة هى : عملية جمع لحدود المتتابعة

أى أنه : لأى متتابعة ($ح_١$ ، $ح_٢$ ، $ح_٣$ ، ..... ، $ح_ن$ ، .....) حيث $ن \in ص^+$

، $ح_ن$ هو الحد الذى ترتيبه ن من المتتابعة.

يكون : $ح_١ + ح_٢ + ح_٣ + ... + ح_ن + ...$ هى المتسلسلة المرتبطة بهذه المتتابعة.

١ المتسلسلة المنتهية

لأى متتابعة منتهية ($ح_١$ ، $ح_٢$ ، $ح_٣$ ، ... ، $ح_ن$) يكون :

$ح_١ + ح_٢ + ح_٣ + \cdots + ح_ر + \cdots + ح_ن = \sum_{ر=١}^{ن} ح_ر$ متسلسلة منتهية.

أى أن : مجموع كل حدود المتتابعة المنتهية يسمى متسلسلة منتهية.
والقيمة العددية للمتسلسلة هى مجموع حدود المتتابعة المناظرة.

مثال ٤

اكتب كلًا من المتسلسلتين الآتيتين باستخدام رمز التجميع $\sum$ ثم أوجد مجموع حدود المتتابعة المناظرة :

١ $٣ + ٥ + ٧ + \cdots + ٢١$

٢ $٣ + ٨ + ١٥ + ٢٤ + \cdots + ٤٤٠$

الحـــل

١ ∵ $٣ + ٥ + ٧ + \cdots + ٢١ = (١ + ٢ \times ١) + (١ + ٢ \times ٢) + (١ + ٢ \times ٣) + \cdots + (١ + ٢ \times ١٠)$

∴ الحد العام للمتتابعة (٣ ، ٥ ، ٧ ، ... ، ٢١) هو $ح_ر = ١ + ٢ ر$

، عدد حدود المتتابعة : $ن = ١٠$ ∴ $٣ + ٥ + ٧ + \cdots + ٢١ = \sum_{ر=١}^{١٠} (١ + ٢ ر)$

، ∵ $\sum_{ر=١}^{١٠} (١ + ٢ ر) = \sum_{ر=١}^{١٠} ١ + \sum_{ر=١}^{١٠} ٢ ر = ١ \times ١٠ + ٢ \times \frac{١٠ (١٠ + ١)}{٢} = ١٢٠$

∴ مجموع حدود المتتابعة المناظرة : (٣ ، ٥ ، ٧ ، ... ، ٢١) = ١٢٠

٢ ∵ $٣ + ٨ + ١٥ + ٢٤ + \cdots + ٤٤٠$

$= ١ (١ + ٢) + ٢ (٢ + ٢) + ٣ (٣ + ٢) + ٤ (٤ + ٢) + \cdots + ٢٠ (٢٠ + ٢)$

∴ الحد العام للمتتابعة (٣ ، ٨ ، ١٥ ، ... ، ٤٤٠) هو $ح_ر = ر (ر + ٢)$

، عدد حدود المتتابعة : $ن = ٢٠$

∴ $٣ + ٨ + ١٥ + \cdots + ٤٤٠ = \sum_{ر=١}^{٢٠} ر (ر + ٢) = \sum_{ر=١}^{٢٠} ر^٢ + ٢ \sum_{ر=١}^{٢٠} ر$

$= \frac{٢٠ (٢٠ + ١) (٤٠ + ١)}{٦} + ٢ \times \frac{٢٠ (٢٠ + ١)}{٢}$

$= ٣٢٩٠$

∴ مجموع حدود المتتابعة المناظرة : (٣ ، ٨ ، ١٥ ، ... ، ٤٤٠) = ٣٢٩٠

مثال ٥

اكتب مفكوك كل من المتسلسلتين الآتيتين ، وأوجد مجموع حدود المتتابعة المناظرة :

١ $\sum_{ر=١}^{٥} (١ + ر)$ ٢ $\sum_{ر=١}^{٦} (ر^٢ + ٢)$

الحل

١ بوضع ر = ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥

$\therefore \sum_{ر=١}^{٥} (١ + ر) = (١ + ١) + (١ + ٢) + (١ + ٣) + (١ + ٤) + (١ + ٥)$

$= ٢ + ٣ + ٤ + ٥ + ٦ = ٢٠$

∴ مجموع حدود المتتابعة : (٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦) = ٢٠

٢ بوضع ر = ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦

$\therefore \sum_{ر=١}^{٦} (ر^٢ + ٢) = (١^٢ + ٢) + (٢^٢ + ٢) + (٣^٢ + ٢) + (٤^٢ + ٢) + (٥^٢ + ٢) + (٦^٢ + ٢)$

$= ٣ + ٦ + ١١ + ١٨ + ٢٧ + ٣٨ = ١٠٣$

∴ مجموع حدود المتتابعة : (٣ ، ٦ ، ١١ ، ١٨ ، ٢٧ ، ٣٨) = ١٠٣

ملاحظة

فى المثال السابق : يمكن استخدام خواص علامة التجميع $\sum$ فى إيجاد قيمة المتسلسلة أى مجموع حدود المتتابعة المناظرة دون إيجاد مفكوك المتسلسلة.

١ $\sum_{ر=١}^{٥} (١ + ر) = \sum_{ر=١}^{٥} ١ + \sum_{ر=١}^{٥} ر = ١ \times ٥ + \frac{٥ \times ٦}{٢} = ٢٠$

٢ $\sum_{ر=١}^{٦} (ر^٢ + ٢) = \sum_{ر=١}^{٦} ر^٢ + \sum_{ر=١}^{٦} ٢ = \frac{٦ (٦ + ١) (٢ \times ٦ + ١)}{٦} + ٢ \times ٦ = ١٠٣$

٢ المتسلسلة غير المنتهية

وهى المتسلسلة التى بها عدد لا نهائى من الحدود ويرمز لها بالرمز $\sum_{ر=١}^{\infty} ح_ر$

فمثلًا : المتسلسلة : $-٢ + ٤ - ٨ + ١٦ - ٣٢ + \cdots$ غير منتهية.

والمتتابعة المناظرة لها : (−٢ ، ٤ ، −٨ ، ١٦ ، −٣٢ ، ...) حدها العام هو $ح_ر = (-٢)^ر$

ولذلك فإن : $-٢ + ٤ - ٨ + ١٦ - ٣٢ + \cdots = \sum_{ر=١}^{\infty} (-٢)^ر$

مثال ٦

اكتب مفكوك كل من المتسلسلتين الآتيتين :

١ $\sum_{ر=١}^{\infty} ((\frac{١}{٣})^{ر} - ١)$

٢ $\sum_{ر=١}^{\infty} (\frac{١}{ر+١} - \frac{١}{ر})$

الحل

١ $\sum_{ر=١}^{\infty} ((\frac{١}{٣})^{ر} - ١) = ((\frac{١}{٣})^{١} - ١) + ((\frac{١}{٣})^{٢} - ١) + ((\frac{١}{٣})^{٣} - ١) + ((\frac{١}{٣})^{٤} - ١) + ...$

$= \frac{-٢}{٣} + \frac{-٨}{٩} + \frac{-٢٦}{٢٧} + \frac{-٨٠}{٨١} + ... = -\frac{٢}{٣} - \frac{٨}{٩} - \frac{٢٦}{٢٧} - \frac{٨٠}{٨١} - ...$

٢ $\sum_{ر=١}^{\infty} (\frac{١}{ر+١} - \frac{١}{ر}) = (\frac{١}{١+١} - \frac{١}{١}) + (\frac{١}{٢+١} - \frac{١}{٢}) + (\frac{١}{٣+١} - \frac{١}{٣}) + (\frac{١}{٤+١} - \frac{١}{٤}) + ...$

$= \frac{-١}{٢} + \frac{-١}{٦} + \frac{-١}{١٢} + \frac{-١}{٢٠} + ... = -\frac{١}{٢} - \frac{١}{٦} - \frac{١}{١٢} - \frac{١}{٢٠} - ...$

مثال ٧

استخدم رمز التجميع $\sum$ فى كتابة كل من المتسلسلتين الآتيتين :

١ $١ \times ٢ + ٢ \times ٣ + ٣ \times ٤ + ٤ \times ٥ + ...$

٢ $٣ + ١ + \frac{١}{٣} + \frac{١}{٩} + ...$

الحل

١ ∵ الحد العام للمتتابعة : $(١ \times ٢ ، ٢ \times ٣ ، ٣ \times ٤ ، ٤ \times ٥ ، ...)$

هو $ح_{ر} = ر (ر + ١)$

∴ $١ \times ٢ + ٢ \times ٣ + ٣ \times ٤ + ٤ \times ٥ + ... = \sum_{ر=١}^{\infty} ر (ر + ١)$

٢ ∵ الحد العام للمتتابعة : $(٣ ، ١ ، \frac{١}{٣} ، \frac{١}{٩} ، ...)$ هو $ح_{ر} = ٣^{٢-ر}$

∴ $٣ + ١ + \frac{١}{٣} + \frac{١}{٩} + ... = \sum_{ر=١}^{\infty} ٣^{٢-ر}$

تمارين 2 على المتسلسلات ورمز التجميع

اختبر نفسك

من أسئلة الكتاب المدرسي · فهم · تطبيق · مستويات عليا

أولاً أسئلة الاختيار من متعدد

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

① $\sum_{ر=١}^{٥} ٣ = $ ....

(أ) ٣ (ب) ٥ (جـ) ١٥ (د) ٢٤٣

② $\sum_{ر=٢}^{٥} ٣ = $ ....

(أ) ٣ (ب) ٥ (جـ) ١٥ (د) ١٢

③ $\sum_{ر=١}^{٤} ر = $ ....

(أ) ٢٠ (ب) ١٠ (جـ) ٤ (د) ٦

④ $\sum_{ر=١}^{١٠} ر^٢ = $ ....

(أ) ١٠ (ب) ٥٥ (جـ) ٢٢٠ (د) ٣٨٥

⑤ قيمة المتسلسلة $\sum_{ر=٧}^{٢٣} ٣ ر = $ ....

(أ) ٢٥٥ (ب) ٧٦٥ (جـ) ٨٠٧ (د) ٨٢٨

⑥ قيمة المتسلسلة $\sum_{ر=١}^{١٥} (ر^٢ + ر + ١) = $ ....

(أ) ١٣٧٥ (ب) ٣٧٢٠ (جـ) ١٤٤٠٠ (د) ٢٢٣٢٠٠٠

⑦ قيمة المتسلسلة $\sum_{ن=١}^{١٠} (-١)^{ن} = $ ....

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) -١ (د) ١٠

⑧ إذا كان : $\sum_{ر=١}^{ن} (ر) = ١٣٦$ فإن : $\sum_{ر=١}^{ن} (٤ ر) = $ ....

(أ) ١٤٠ (ب) ٥٤٤ (جـ) ٢٧٢ (د) ٣٤

⑨ $\sum_{ر=١}^{١٥} (٣ ر + ٢) + \sum_{ر=١٦}^{٣٥} (٣ ر + ٢) = $ ....

(أ) $\sum_{ر=١}^{٣٥} (٣ ر + ٢)$ (ب) $\sum_{ر=١}^{٣٥} (٣ ر + ٢)^٢$

(جـ) $\sum_{ر=١}^{٣٥} (٦ ر + ٤)$ (د) $\sum_{ر=١}^{٣٥} (٣ ر + ٤)$

(١٠) إذا كان : $\sum_{ر=١}^{ن} (١٠٠ - ٤ ر)$ = صفر فإن : ن = ...

(أ) ٢٥ (ب) ٤٩ (جـ) ٥٠ (د) ٩٨

(١١) إذا كان : $\sum_{ر=١}^{ن} (ر^{٢}) = ٥٥$ ، $\sum_{ر=١}^{ن} (٢ ر - ١) = ٢٥$

فإن : $\sum_{ر=١}^{ن} (ر^{٢} + ٢ ر - ١)$ = ...

(أ) ٥٥ (ب) ٣٠ (جـ) ٨٠ (د) ١٣٧٥

(١٢) إذا كان : $\sum_{ر=١}^{٢٥} (٣ + ك ر) = ١٠٠$ فإن : ك = ...

(أ) ٢٥ (ب) ١٣ (جـ) $\frac{١}{١٣}$ (د) $\frac{١}{٢٥}$

(١٣) مجموع مضاعفات العدد ٦ الموجبة الأقل من ١٠٠ هو ....

(أ) $\sum_{ر=١}^{١٠٠} ٦ ر$ (ب) $\sum_{ر=١}^{١٦} ٦ ر$

(جـ) $\sum_{ر=١}^{١٦} ر$ (د) $\sum_{ر=١}^{٦} (١٠٠ - ٦ ر)$

(١٤) الحد العشرين فى المتسلسلة (٢ × ٤ + ٤ × ٦ + ٦ × ٨ + ...) يساوى ....

(أ) ١٦٨٠ (ب) ١٦٠٠ (جـ) ٨٤٠ (د) ٤٢٠

(١٥) ١ + ٢ + ٣ + ٤ + ٥ + ... + ٢٠ باستخدام رمز التجميع = ...

(أ) $\sum_{ر=١}^{٢٠} ١$ (ب) $\sum_{ر=١}^{٢٠} ر^{٢}$ (جـ) $\sum_{ر=١}^{٢٠} (ر + ١)$ (د) $\sum_{ر=١}^{٢٠} ر$

(١٦) ٢ + ٤ + ٦ + ٨ + ... + ٣٠ باستخدام رمز التجميع = ...

(أ) $\sum_{ر=١}^{٣٠} ر$ (ب) $\sum_{ر=١}^{١٥} ر$ (جـ) $\sum_{ر=١}^{١٥} ٢ ر$ (د) $\sum_{ر=١}^{٣٠} ٢ ر$

(١٧) $١^{٢} + ٢^{٢} + ٣^{٢} + ٤^{٢} + ... + ٨^{٢}$ باستخدام رمز التجميع = ...

(أ) $\sum_{ر=١}^{٨} ر^{٢}$ (ب) $\sum_{ر=١}^{٦٤} ر$ (جـ) $\sum_{ر=١}^{٨} ٢ ر$ (د) $\sum_{ر=١}^{٨} ٢ ر^{٢}$

(١٨) ٣ + ٦ + ٩ + ١٢ + ... باستخدام رمز التجميع = ...

(أ) $\sum_{ر=١}^{\infty} ٣ ر$ (ب) $\sum_{ر=١}^{\infty} (ر + ٣)$ (جـ) $\sum_{ر=١}^{\infty} (ر + ٢)$ (د) $\sum_{ر=١}^{\infty} ر^{٣}$

(١٩) ٢ + ١ + $\frac{١}{٢}$ + $\frac{١}{٤}$ + $\frac{١}{٨}$ + ... باستخدام رمز التجميع = ...

(أ) $\sum_{ر=١}^{\infty} (\frac{١}{٢})^{ر}$ (ب) $\sum_{ر=١}^{ن} (\frac{١}{٢})^{ر-١}$ (جـ) $\sum_{ر=١}^{\infty} (\frac{١}{٢})^{ر-٢}$ (د) $\sum_{ر=١}^{ن} (\frac{١}{٢})^{ر-٢}$

(٢٠) $-١ - ٨ - ٢٧ - ٦٤ - \cdots - ٢١٦$ باستخدام رمز التجميع = ...

(أ) $\sum_{ر=١}^{٢١٦} (-ر)^{٣}$ (ب) $\sum_{ر=١}^{١٥} -ر^{٣}$ (جـ) $\sum_{ر=١}^{٦} (-١)^{ر} (ر)^{٣}$ (د) $\sum_{ر=١}^{٦} (-ر)^{٣}$

(٢١) $(١ \times ٢) + (٢ \times ٣) + (٣ \times ٤) + (٤ \times ٥) + \cdots$ باستخدام رمز التجميع يساوى ....

(أ) $\sum_{ر=١}^{\infty} ر\,(ر + ١)$ (ب) $\sum_{ر=١}^{\infty} ر\,(ر - ١)$

(جـ) $\sum_{ر=١}^{\infty} (ر + ١)(ر + ٢)$ (د) $\sum_{ر=١}^{\infty} (ر - ١)(ر + ١)$

(٢٢) المتسلسلة : $(٢ \times ٣) + (٣ \times ٤) + (٤ \times ٥) + \cdots$ باستخدام رمز التجميع = ...

(أ) $\sum_{ر=١}^{\infty} (ر + ١)(ر + ٢)$ (ب) $\sum_{ر=٢}^{\infty} ر\,(ر + ١)$

(جـ) $\sum_{ر=٣}^{\infty} ر\,(ر - ١)$ (د) جميع ما سبق.

(٢٣) المتسلسلة : $(٧ \times ١) + (٧ \times ٢) + (٧ \times ٣) + \cdots + (٧ \times ٢٠)$

باستخدام رمز التجميع = ...

(أ) $٧ \sum_{ر=١}^{١٤٠} ر$ (ب) $\sum_{ر=١}^{\infty} ٧\,ر$ (جـ) $\sum_{ر=١}^{٢٠} ٧ \sum_{ر=١}^{٢٠} ر$ (د) $\sum_{ر=١}^{٢٠} ٧\,ر$

(٢٤) $(١ \times ٢ \times ٣) + (٣ \times ٤ \times ٥) + (٥ \times ٦ \times ٧) + \cdots$ باستخدام رمز التجميع تساوى ....

(أ) $\sum_{ر=١}^{\infty} ر\,(ر + ١)(ر + ٢)$ (ب) $\sum_{ر=١}^{٧} ر\,(ر + ١)(ر + ٢)$

(جـ) $\sum_{ر=١}^{٥} (٢ر - ١)(٢ر)(٢ر + ١)$ (د) $\sum_{ر=١}^{\infty} (٢ر - ١)(٢ر)(٢ر + ١)$

(٢٥) $\frac{١}{٢} + \frac{١}{٤} + \frac{١}{٦} + \frac{١}{٨} + \cdots + \frac{١}{٢٠}$ باستخدام رمز التجميع = ...

(أ) $\sum_{ر=١}^{٢٠} \frac{١}{٢ر}$ (ب) $\sum_{ر=١}^{\infty} \frac{١}{ر + ١}$ (جـ) $\sum_{ر=١}^{١٠} \frac{١}{٢ر}$ (د) $\sum_{ر=٠}^{٢٠} \frac{١}{ر + ٢}$

(٢٦) $-\frac{١}{٢} + \frac{١}{٤} - \frac{١}{٨} + \frac{١}{١٦} - \cdots$ باستخدام رمز التجميع = ...

(أ) $\sum_{ر=١}^{\infty} -١ \sum_{ر=١}^{\infty} ٢^{-ر}$ (ب) $\sum_{ر=٠}^{١٦} (-١)^{ر} \left(\frac{١}{٢}\right)^{ر+١}$

(جـ) $\sum_{ر=١}^{\infty} ٢^{-ر}$ (د) $\sum_{ر=١}^{\infty} \left(-\frac{١}{٢}\right)^{ر}$

(٢٧) باستخدام رمز التجميع يمكن التعبير عن المتسلسلة

$٩ + ٩٩ + ٩٩٩ + ٩٩٩٩ + \cdots$ إلى $ن$ حدًا بالصورة ....

(أ) $\sum_{ر=١}^{\infty} (١٠^{ر} \times ٩)$ (ب) $\sum_{ر=١}^{ن} (٩ + ١٠\,ر)$

(جـ) $\sum_{ر=٠}^{ن} (٩ + ١٠\,ر)$ (د) $\sum_{ر=١}^{ن} (١٠^{ر} - ١)$

(٢٨) إذا كان أ = $\sum_{ر=١}^{١٠٠}$ ر ، ب = $\sum_{ر=٢}^{١٠١}$ ر ، حـ = $\sum_{ر=١}^{٩٩}$ ر فإن : ....

(أ) أ > ب > حـ (ب) أ > حـ > ب (جـ) حـ > أ > ب (د) حـ > ب > أ

(٢٩) إذا كان : حـ$_١$ = ١ + ٢ + ٣ + ... + ن ، حـ$_٢$ = ١^٢ + ٢^٢ + ٣^٢ + ... + ن^٢ فإن : ....

(أ) حـ$_١$ = حـ$_٢^٢$ (ب) حـ$_٢$ = حـ$_١^٢$ (جـ) $\frac{حـ_٢}{حـ_١} = \frac{٢ن + ١}{٣}$ (د) $\frac{حـ_٢}{حـ_١}$ = ن

(٣٠) إذا كان : $\sum_{ر=١}^{ن}$ ر = ٥٥ فإن : $\sum_{ر=١}^{ن}$ ر^٢ = ...

(أ) ٣٨٥ (ب) ٥٠٦ (جـ) ١١١٥ (د) ٣٠٢٥

(٣١) ١^٢ + ١ + ٢^٢ + ٢ + ٣^٢ + ٣ + ... + ن^٢ + ن = ...

(أ) $\frac{ن(ن + ١)}{٢}$ (ب) $\left(\frac{ن(ن + ١)}{٢}\right)^٢$

(جـ) $\frac{ن(ن + ١)(ن + ٢)}{٣}$ (د) $\frac{ن(ن + ١)(ن + ٢)(ن + ٣)}{٤}$

(٣٢) مجموع مساحات المربعات التي أضلاعها (٣ ، ٤ ، ٥ ، ... ، ١٠) من السنتيمترات = ... سم^٢

(أ) ٣٦٠ (ب) ٣٨٠ (جـ) ٣٤٠ (د) ٣٥٠

(٣٣) إذا كان مجموع ن حدًا الأولى من حدود متتابعة الأعداد الصحيحة الموجبة يساوى $\frac{١}{٥}$ مجموع مربعات هذه الحدود فإن ن = ...

(أ) ٥ (ب) ٦ (جـ) ٧ (د) ٨

(٣٤) مجموع أول ٢٠٢٢ حد من حدود المتتابعة (١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ...) يساوى ....

(أ) ٥٠٥١ (ب) ٥٠٥٢ (جـ) ٥٠٥٣ (د) ٥٠٥٤

(٣٥) مجموع السبعة حدود الأولى فى المتتابعة (٣ ، ٧ ، ١١ ، ١٥ ، ...) يساوى ....

(أ) $\sum_{ر=١}^{٧}$ (ر + ١) (ب) $\sum_{ر=١}^{٧}$ (٢ ر + ١)

(جـ) $\sum_{ر=١}^{٧}$ ٣ (ر − ١) (د) $\sum_{ر=١}^{٧}$ (٤ ر − ١)

ثانيًا الأسئلة المقالية

(١) اكتب مفكوك كل من المتسلسلات الآتية :

① $\sum_{ر=١}^{ن}$ (٣ ر − ٢) ② $\sum_{ر=١}^{٨}$ ((−١)^ر + ٤ ر)

③ $\sum_{ر=١}^{\infty}$ (($\frac{١}{٢}$)^ر − ١) ④ $\sum_{ر=١}^{\infty}$ ($\frac{١}{ر} - \frac{١}{ر + ١}$)

٢ اكتب مفكوك كل من المتسلسلات الآتية ، ثم أوجد مجموع المفكوك :

① $\sum_{ر=١}^{٤} (ر^٢)$ ② $\sum_{ر=١}^{٥} (١ - ر^٢)$

③ $\sum_{ر=١}^{٥} (\frac{١}{٢})^ر$ ④ $\sum_{ر=١}^{ن} (\frac{١}{ر+١} - \frac{١}{ر})$

٣ أوجد بطريقتين مختلفتين :

① $\sum_{ر=١}^{٥} (٢ ر^٢ - ٣ ر + ٥)$ ② $\sum_{ر=١}^{٤} (٣ - ٢ ر + ر^٢)$

٤ إذا علمت أن : $\sum_{ر=١}^{ن} ر = \frac{ن(ن+١)}{٢}$ ، $\sum_{ر=١}^{ن} ر^٢ = \frac{ن(ن+١)(٢ن+١)}{٦}$

فأوجد باستخدام خواص رمز التجميع $\sum$ قيمة كل مما يأتى :

① $\sum_{ر=١}^{ن} (ر + ٢)$ ② $\sum_{ر=١}^{٦} (٢ ر^٢ - ١)$

③ $\sum_{ر=٨}^{١٢} ٢ (ر + ٥)$ ④ $\sum_{ر=٤}^{٧} (ر^٢ - ٢ ر + ٣)$

٥ اكتشف الخطأ :

① المتسلسلة هى دالة مجالها مجموعة الأعداد الصحيحة الموجبة أو مجموعة جزئية منها.

② $\sum_{ر=٠}^{٥} (٢ ر + ١) = ١ + ٣ + ٥ + ٧ + ٩$

ثالثاً مسائل تقيس مهارات التفكير

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

① إذا كان : $\sum_{ر=١}^{٢٠} جا \theta = ١٠$ فإن إحدى قيم θ هى ....

(أ) ٣٠° (ب) ٦٠° (جـ) ٩٠° (د) ١٢٠°

② إذا كان $س_١$ ، $س_٢$ هما جذرا المعادلة : $س^٢ - (م - ٢) س - ١ = ٠$ وكان : $\sum_{ر=١}^{٢} س_ر = ٣$

فإن : م = ...

(أ) ٢ (ب) ٣ (جـ) ٤ (د) ٥

③ إذا كان : $\sum_{ر=١}^{ن} (٣) = ١٢$ وكان : د (س) = ٣ - ٢ س + $س^٢$ فإن : $\sum_{ر=١}^{ن} د (ر) =$ ....

(أ) ١٢ (ب) ٢٢ (جـ) ٥٢ (د) ٦٢

④ إذا كان : $\sum_{س=١}^{م} (س) + \sum_{ص=١}^{م} (ص) + \sum_{ع=١}^{م} (ع) = ١٦٥$ فإن : م = ...

(أ) ٧ (ب) ٨ (جـ) ٩ (د) ١٠

⑤ إذا كان : $\sum_{ن=١}^{ك} (ن + ١)^٢ = ٨٤ + \sum_{ن=١}^{ك} (ن - ١)^٢$ فإن : ك = ...

(أ) ٤ (ب) ٦ (جـ) ٧ (د) ٩

⑥ إذا كان : $\sum_{ك=1}^{ن}$ ك = س ، $\sum_{ك=1}^{ن}$ ك^{2} = ٧ س فإن : ن = ...

(أ) ٨ (ب) ١٠ (جـ) ١٢ (د) ١٥

⑦ $\sum_{س=1}^{90}$ [جتا(س°) − جا(س°)] = ...

(أ) −١ (ب) ١ (جـ) صفر (د) ٩٠

⑧ إذا كان : $\sum_{س=1}^{6}$ (أ س + ب) = ١٥ ، $\sum_{س=2}^{6}$ (أ س + ب) = ٧ فإن : أ + ب = ...

(أ) −٥ (ب) −٤ (جـ) ٤ (د) ٨

⑨ إذا كان : $\sum_{ر=1}^{ن}$ لو $\left(\frac{ر+1}{ر}\right)$ = ٢ فإن : ن = ...

(أ) ١٠ (ب) ٢٠ (جـ) ٩٩ (د) ١٠٠

⑩ إذا كان : س = $\sum_{ر=1}^{ن}$ ٣ ر ، ص = $\sum_{ر=1}^{ن}$ (٣ ر + ٢) وكان : ص − س = ١٠

فإن : ن = ...

(أ) ٥ (ب) ٨ (جـ) ١١ (د) ١٣

⑪ إذا كان : ن > ٨ وكان : $\sum_{ر=5}^{ن}$ ر^{2} = س ، $\sum_{ر=5}^{8}$ ر^{2} + $\sum_{ر=8}^{ن}$ ر^{2} = ص فإن : ....

(أ) س = ص (ب) س = ص + ٦٤

(جـ) ص = س + ٦٤ (د) ص = ٦٤ س

⑫ $\sum_{أ=1}^{2}$ $\sum_{ب=1}^{2}$ $\sum_{حـ=1}^{2}$ أ ب حـ = ...

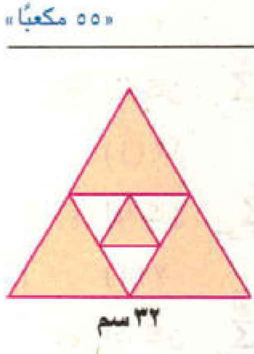
(أ) ٨ (ب) ٢٧ (جـ) ٦٤ (د) ١٢٥

تطبيقات حياتية

١ طفل يريد بناء هرم من قطع خشبية على شكل مكعبات متماثلة بحيث تحتوى قمة الهرم على مكعب واحد والصف الثانى على مكعبين والصف الذى يليه على ثلاثة مكعبات وهكذا. عبر عن عدد المكعبات المستخدمة فى بناء الهرم باستخدام رمز التجميع $\sum$ إذا علم أن الهرم يتكون من ١٠ صفوف ، وأوجد عدد المكعبات.

«٥٥ مكعبًا»

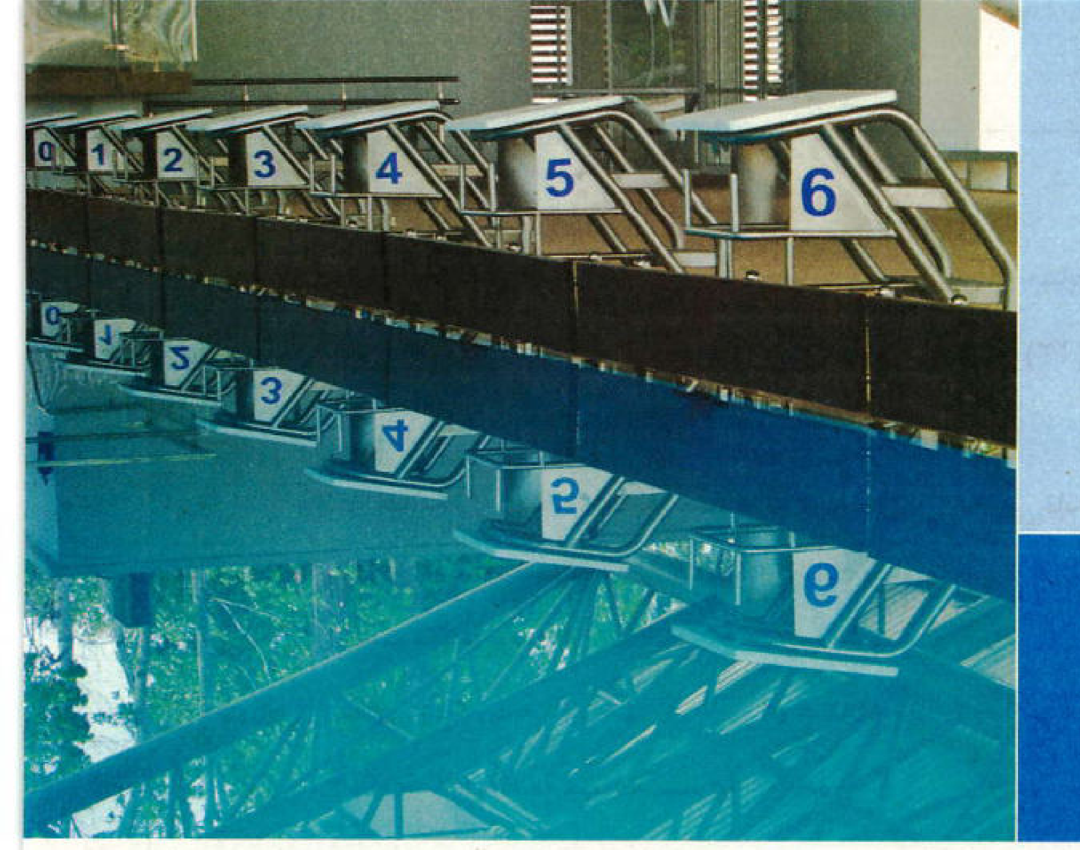
٢ الربط بالهندسة :



يمثل الشكل المقابل مثلثًا متساوى الأضلاع ، طول ضلعه ٣٢ سم نصفت أضلاعه الثلاثة ، ورسم المثلث الداخلى وقمنا بهذا النمط مرة أخرى حتى حصلنا على ثلاثة مثلثات بما فيها المثلث الأول.

① اكتب متسلسلة محيطات الثلاث مثلثات باستخدام رمز التجميع.

② أوجد بالسنتيمترات مجموع محيطات المثلثات الثلاثة التى حصلنا عليها. «١٦٨ سم»



الدرس

3

المتتابعة الحسابية

تعريف

المتتابعة الحسابية هى المتتابعة التى يكون فيها الفرق بين كل حد والحد السابق له مباشرة يساوى مقدارًا ثابتًا يسمى أساس المتتابعة ويرمز له عادة بالرمز (ء)

أى أن ء = $ح_{ن+1} - ح_ن$ لكل ن ∈ $ص^+$

ومن التعريف السابق فإن المتتابعة الحسابية تكون :

- تزايدية عندما ء > ٠
- تناقصية عندما ء < ٠
- ثابتة عندما ء = ٠

مثال ١

بين أى المتتابعات الآتية تكون متتابعة حسابية وأيها ليست حسابية وأوجد أساس كل متتابعة حسابية :

١ (٥ ، ٩ ، ١٣ ، ١٧ ، ...)

٢ (−١٧ ، −١٥ ، −١٣ ، −١١ ، ...)

٣ $(\frac{1}{2}$ ، $\frac{1}{5}$ ، $\frac{1}{8}$ ، $\frac{1}{11}$ ، ...)

الحل

١ ∵ $ح_٢ - ح_١ = ح_٣ - ح_٢ = ح_٤ - ح_٣ = ٤$ ∴ المتتابعة حسابية وأساسها = ٤

٢ ∵ $ح_٢ - ح_١ = ح_٣ - ح_٢ = ح_٤ - ح_٣ = ٢$ ∴ المتتابعة حسابية وأساسها = ٢

٣ ∵ $ح_٢ - ح_١ = \frac{1}{5} - \frac{1}{2} = -\frac{3}{10}$

، $ح_٣ - ح_٢ = \frac{1}{8} - \frac{1}{5} = -\frac{3}{40}$

∴ $ح_٢ - ح_١ \neq ح_٣ - ح_٢$

∴ المتتابعة ليست حسابية.

معلومة إثرائية

المتتابعة التى مقلوبات حدودها تكون متتابعة حسابية تسمى بالمتتابعة التوافقية مثل المتتابعة $(\frac{1}{2}$ ، $\frac{1}{5}$ ، $\frac{1}{8}$ ، $\frac{1}{11}$ ، ...) بالمثال المجاور.

مثال ٢

بين أى المتتابعات الآتية تكون متتابعة حسابية وأيها ليست حسابية وأوجد أساس كل متتابعة حسابية :

١ (ح ن) = (٣ ن - ٢)　　٢ (ح ن) = (٢ ن٢ - ١)　　٣ (ح ن) = (٣ ن)

الحل

لمعرفة ما إذا كانت المتتابعة (ح ن) تكون متتابعة حسابية أم لا نوجد ح ن+١ - ح ن فإذا كان الناتج يساوى مقدارًا ثابتًا كانت (ح ن) متتابعة حسابية وكان هذا المقدار الثابت أساسها ، بينما إذا كان الناتج ليس بمقدار ثابت فإن (ح ن) ليست متتابعة حسابية.

١ ∵ ح ن+١ - ح ن = (٣ (ن + ١) - ٢) - (٣ ن - ٢) = ٣ ن + ٣ - ٢ - ٣ ن + ٢ = ٣ = مقدار ثابت.

∴ (ح ن) = (٣ ن - ٢) متتابعة حسابية أساسها = ٣

٢ ∵ ح ن+١ - ح ن = (٢ (ن + ١)٢ - ١) - (٢ ن٢ - ١) = ٢ ن٢ + ٤ ن + ٢ - ١ - ٢ ن٢ + ١ = ٤ ن + ٢

وهذا ليس بمقدار ثابت لأنه يعتمد على قيمة ن

∴ (ح ن) = (٢ ن٢ - ١) ليست متتابعة حسابية.

٣ ∵ ح ن+١ - ح ن = (٣ ن+١) - (٣ ن) = ٣ ن (٣ - ١) = ٢ × ٣ ن وهذا ليس بمقدار ثابت لأنه يعتمد على قيمة ن

∴ (ح ن) = (٣ ن) ليست متتابعة حسابية.

ملاحظة

المتتابعة الحسابية : هى دالة من الدرجة الأولى فى ن حيث ن ∈ ص+ ويكون معامل ن هو أساس المتتابعة أو دالة ثابتة مجالها ص+ ويكون أساسها = صفر ففى المثال السابق :

١ (ح ن) = (٣ ن - ٢) متتابعة حسابية لأن (ح ن) دالة من الدرجة الأولى فى ن وأساسها ء = ٣

٢ (ح ن) = (٢ ن٢ - ١) متتابعة ليست حسابية لأن (ح ن) دالة من الدرجة الثانية فى ن

التمثيل البيانى للمتتابعة الحسابية

حيث إن المتتابعة الحسابية هى دالة من الدرجة الأولى فى $ن$ (أو دالة ثابتة) ومجالها = $ص^+$ لذلك تمثل بيانيًا بنقط على استقامة واحدة.

مثال ٣

مثل بيانيًا الستة حدود الأولى من المتتابعة الحسابية : $(ح_ن) = (٢ن - ٣)$ موضحًا مجال ومدى المتتابعة.

الحل

$\because ح_١ = ٢(١) - ٣ = -١$ ، $ح_٢ = ٢(٢) - ٣ = ١$ ، $ح_٣ = ٢(٣) - ٣ = ٣$

، $ح_٤ = ٢(٤) - ٣ = ٥$ ، $ح_٥ = ٢(٥) - ٣ = ٧$

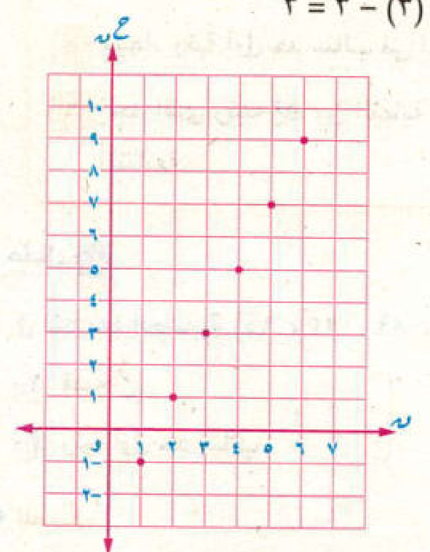
، $ح_٦ = ٢(٦) - ٣ = ٩$

$\therefore$ الستة حدود الأولى من المتتابعة تمثل بالنقط :

(١ ، -١) ، (٢ ، ١) ، (٣ ، ٣) ، (٤ ، ٥)

، (٥ ، ٧) ، (٦ ، ٩)

وتمثل بيانيًا بالشكل المقابل :



مجال المتتابعة = {١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ...} = $ص^+$

مدى المتتابعة = {-١ ، ١ ، ٣ ، ٥ ، ...}

الحد العام (النونى) للمتتابعة الحسابية

إذا كانت $(ح_ن)$ متتابعة حسابية حدها الأول = أ ، أساسها = ء فإن

الصورة العامة للمتتابعة الحسابية هى : (أ ، أ + ء ، أ + ٢ء ، أ + ٣ء ، ...)

أى أن : $ح_١ = أ$ ، $ح_٢ = أ + ء$ ، $ح_٣ = أ + ٢ء$ وهكذا ...

ونلاحظ فى هذه الصورة أن معامل ء يقل دائمًا واحد عن رتبة الحد وعليه يكون :

$ح_{٢٥} = أ + ٢٤ء$ ، $ح_{٧٥} = أ + ٧٤ء$ ، وهكذا ...

ومنها نجد أن الحد العام (النونى) للمتتابعة الحسابية هو $ح_ن = أ + (ن - ١)ء$

فمثلًا : فى المتتابعة الحسابية (٥ ، ٧ ، ٩ ، ...) يكون أ = ٥ ، ء = ٢

ومنها فإن الحد العام $ح_ن = ٥ + (ن - ١) \times ٢$ ، $ح_٥ = ٥ + ٤ \times ٢ = ١٣$ ، $ح_{١٢} = ٥ + ١١ \times ٢ = ٢٧$

ومما سبق فإنه

إذا كانت المتتابعة الحسابية منتهية وعدد حدودها = $ن$ فإنه يرمز لحدها الأخير بالرمز ل

حيث : ل = أ + (ن - ١)ء

وتكون الصورة العامة للمتتابعة الحسابية فى هذه الحالة على الصورة :

(أ ، أ + ء ، أ + ٢ء ، ... ، ل - ٢ء ، ل - ء ، ل)

ملاحظـات هامة

١ لإيجاد رتبة الحد الذى يساوى قيمة معلومة س نضع $ح_ن = س$

٢ لإيجاد رتبة أول حد تكون قيمته أقل من قيمة معلومة س نضع $ح_ن < س$

٣ لإيجاد رتبة أول حد تكون قيمته أكبر من قيمة معلومة س نضع $ح_ن > س$

٤ لإيجاد رتبة أول حد موجب فى المتتابعة الحسابية نضع $ح_ن > ٠$

٥ لإيجاد رتبة أول حد سالب فى المتتابعة الحسابية نضع $ح_ن < ٠$

٦ الحد الذى رتبته ك من النهاية هو الحد الذى رتبته (ن − ك + ١) من البداية حيث ن عدد حدود المتتابعة.

مثال ٤

فى المتتابعة الحسابية (٩٥ ، ٩٢ ، ٨٩ ، ...) أوجد :

١ قيمة $ح_٦$

٢ رتبة الحد الذى قيمته ٦٨

٣ رتبة أول حد سالب.

٤ رتبة أول حد تقل قيمته عن ٢٥

الحـل

∵ أ = ٩٥ ، ء = ٩٢ − ٩٥ = −٣

١ $ح_٦$ = أ + ٥ء = ٩٥ + ٥ × −٣ = ٨٠

٢ بوضع $ح_ن$ = ٦٨

∴ أ + (ن − ١) ء = ٦٨

∴ ٩٥ + (ن − ١) × −٣ = ٦٨

∴ ٩٥ − ٣ن + ٣ = ٦٨

∴ ٩٨ − ٣ن = ٦٨

∴ −٣ن = −٣٠

∴ ن = ١٠

∴ $ح_{١٠}$ = ٦٨

٣ بوضع $ح_ن < ٠$

∴ أ + (ن − ١) ء < ٠

∴ ٩٥ + (ن − ١) × −٣ < ٠

∴ ٩٨ − ٣ن < ٠

∴ −٣ن < −٩٨

∴ ن > $٣٢\frac{٢}{٣}$

∴ أول حد سالب هو $ح_{٣٣}$

٤ بوضع $ح_ن$ < ٢٥

∴ أ + (ن − ١) ء < ٢٥

∴ ٩٥ + (ن − ١) × −٣ < ٢٥

∴ ٩٨ − ٣ن < ٢٥

∴ −٣ن < −٧٣

∴ ن > $٢٤\frac{١}{٣}$

∴ أول حد قيمته تقل عن ٢٥ هو $ح_{٢٥}$

مثال ٥

في المتتابعة الحسابية (−٤٢ ، −٣٩ ، −٣٦ ، ... ، ٢١)

١ أوجد عدد حدود المتتابعة.

٢ أوجد رتبة وقيمة أول حد موجب.

٣ أوجد قيمة $ح_٩$ من النهاية.

٤ هل يوجد حد قيمته −١١ ؟

الحل

∵ أ = −٤٢ ، ء = −٣٩ + ٤٢ = ٣ ، ل = ٢١

١ ∵ ل = أ + (ن − ١) ء

∴ ٢١ = −٤٢ + (ن − ١) × ٣

∴ ٢١ = −٤٥ + ٣ ن

∴ ٦٦ = ٣ ن

∴ ن = ٢٢

∴ عدد حدود المتتابعة = ٢٢

٢ بوضع $ح_ن$ > ٠

∴ أ + (ن − ١) ء > ٠

∴ −٤٢ + (ن − ١) × ٣ > ٠

∴ −٤٥ + ٣ ن > ٠

∴ ٣ ن > ٤٥

∴ ن > ١٥

∴ أول حد موجب هو $ح_{١٦}$

∴ $ح_{١٦}$ = أ + ١٥ ء = −٤٢ + ١٥ × ٣ = ٣

٣ بكتابة حدود المتتابعة من النهاية يكون حدها الأول = ٢١ وأساسها = −٣

∴ $ح_٩$ من النهاية = أ + ٨ ء = ٢١ + ٨ × −٣ = ٢١ − ٢٤ = −٣

حل آخر :

$ح_٩$ من النهاية = $ح_{(٢٢ - ٩ + ١)}$ من البداية = $ح_{١٤}$ من البداية

∴ $ح_٩$ من النهاية = أ + ١٣ ء = −٤٢ + ١٣ × ٣ = −٣

٤ بفرض أن $ح_ن$ = −١١

∴ أ + (ن − ١) ء = −١١

∴ −٤٢ + (ن − ١) × ٣ = −١١

∴ −٤٥ + ٣ ن = −١١

∴ ن = $١١\frac{١}{٣}$ ∉ $ص^+$

∴ لا يوجد في المتتابعة حد قيمته −١١

مثال ٦

إذا كانت المتتابعة (١٧ ، س ، ... ، ص ، ٧١) متتابعة حسابية وكان ٣ س = ص + ٤

فأوجد قيمة كل من : س ، ص

الحل

∵ المتتابعة حسابية.

∴ الأساس = مقدار ثابت

∴ س − ١٧ = ٧١ − ص

∴ س + ص = ٨٨ (١)

، ∵ ٣ س = ص + ٤ (معطى) ∴ ٣ س − ص = ٤ (٢)

وبجمع (١) ، (٢) : ∴ ٤ س = ٩٢ ∴ س = ٢٣

وبالتعويض فى (١) : ∴ ص = ٦٥

مثال ٧

إذا كان $ح_{٢ن+١}$ من المتتابعة الحسابية (١ ، ٣,٥ ، ٦ ، ...) يساوى $ح_{٥ن-١}$ من المتتابعة الحسابية (٢٣ ، ٢١,٥ ، ٢٠ ، ...) **فأوجد :** قيمة ن

الحل

بالنسبة للمتتابعة الأولى : أ = ١ ، ء = ٣,٥ − ١ = ٢,٥

∴ $ح_{٢ن+١}$ = أ + (٢ن + ١ − ١) ء = أ + ٢ ن ء

∴ $ح_{٢ن+١}$ = ١ + ٢ ن × $\frac{٥}{٢}$ = ١ + ٥ ن (١)

بالنسبة للمتتابعة الثانية : أ = ٢٣ ، ء = ٢١,٥ − ٢٣ = −١,٥

∴ $ح_{٥ن-١}$ = أ + (٥ ن − ١ − ١) ء = أ + (٥ ن − ٢) ء

∴ $ح_{٥ن-١}$ = ٢٣ + (٥ ن − ٢) (−١,٥)

∴ $ح_{٥ن-١}$ = ٢٣ − ٧,٥ ن + ٣ = ٢٦ − ٧,٥ ن (٢)

، ∵ $ح_{٢ن+١}$ من المتتابعة الأولى = $ح_{٥ن-١}$ من المتتابعة الثانية.

، من (١) ، (٢) : ∴ ١ + ٥ ن = ٢٦ − ٧,٥ ن

∴ ١٢,٥ ن = ٢٥ ∴ ن = ٢

مثال ٨

أوجد الحد الثامن المشترك بين المتتابعتين الحسابيتين (٢ ، ٥ ، ٨ ، ...) ، (−٥ ، −١ ، ٣ ، ...)

الحل

بفرض أن $ح_ن$ من المتتابعة الأولى = $ح_ك$ من المتتابعة الثانية

∴ ٢ + (ن − ١) × ٣ = −٥ + (ك − ١) × ٤

∴ ٢ + ٣ ن − ٣ = −٥ + ٤ ك − ٤

∴ ٣ ن = −٨ + ٤ ك

∴ ن = $\frac{-٨ + ٤ ك}{٣}$ ∴ ن = $\frac{٤ (ك - ٢)}{٣}$

، ∵ ن عدد صحيح موجب.

∴ (ل − ٢) من مضاعفات العدد ٣ الأكبر من الصفر

∴ ل − ٢ = ٣ ومنها ل = ٥ ∴ الحد المشترك الأول = $ح_{٥}$ = ١١

أ، ل − ٢ = ٦ ومنها ل = ٨ ∴ الحد المشترك الثانى = $ح_{٨}$ = ٢٣

أ، ل − ٢ = ٩ ومنها ل = ١١ ∴ الحد المشترك الثالث = $ح_{١١}$ = ٣٥

∴ الحدود المشتركة تكون المتتابعة الحسابية

(١١ ، ٢٣ ، ٣٥ ، ...)

∴ الحد المشترك الثامن = ١١ + ٧ × ١٢ = ٩٥

لاحظ أن :

أساس متتابعة الحدود المشتركة هو المضاعف المشترك الأصغر لأساس المتتابعتين الأصليتين.

تعيين المتتابعة الحسابية

* المقصود بتعيين المتتابعة الحسابية هو معرفة كل من حدها الأول وأساسها حتى يمكن تكوينها.

مثال ٩

أوجد المتتابعة الحسابية التى حدها الثالث ١١ وحدها السادس ٢٠

الحل

∵ $ح_{٣}$ = ١١

∴ أ + ٢ء = ١١ (١)

، ∵ $ح_{٦}$ = ٢٠

∴ أ + ٥ء = ٢٠ (٢)

وبطرح (١) من (٢) : ∴ ٣ء = ٩ ∴ ء = ٣

وبالتعويض فى (١) : ∴ أ + ٢ × ٣ = ١١ ∴ أ = ١١ − ٦ = ٥

∴ المتتابعة هى (٥ ، ٨ ، ١١ ، ...)

لاحظ أن :

* إذا كان : $ح_{س}$ ، $ح_{ص}$ حدين فى متتابعة حسابية حيث س ≠ ص

فإن ء (أساس المتتابعة) = $\frac{ح_{ص} - ح_{س}}{ص - س}$

أى أن : ء = $\frac{ح_{٦} - ح_{٣}}{٦ - ٣}$ = $\frac{٢٠ - ١١}{٦ - ٣}$ = ٣

مثال ١٠

متتابعة حسابية فيها $ح_{٢}$ + $ح_{٤}$ = ٢ ، $ح_{٦}$ + $ح_{٧}$ + $ح_{٨}$ = −٤٥ ، أوجد المتتابعة.

الحل

∵ $ح_{٢}$ + $ح_{٤}$ = ٢ ∴ (أ + ء) + (أ + ٣ء) = ٢

∴ ٢أ + ٤ء = ٢ وبالقسمة على ٢ ∴ أ + ٢ء = ١ (١)

، ∵ $ح_{٦}$ + $ح_{٧}$ + $ح_{٨}$ = −٤٥ ∴ (أ + ٥ء) + (أ + ٦ء) + (أ + ٧ء) = −٤٥

∴ $٣ أ + ١٨ ء = -٤٥$ وبالقسمة على ٣ ∴ $أ + ٦ ء = -١٥$ (٢)

وبطرح (١) من (٢) : ∴ $٤ ء = -١٦$ ∴ $ء = -٤$

وبالتعويض فى (١) : ∴ $أ - ٨ = ١$ ∴ $أ = ٩$

∴ المتتابعة هى (٩ ، ٥ ، ١ ، ...)

مثال ١١

متتابعة حسابية مجموع حديها الرابع والخامس ٢٢ والنسبة بين حديها التاسع والرابع عشر ٢ : ٣ أوجد المتتابعة.

الحل

∵ $ح_٤ + ح_٥ = ٢٢$ ∴ $(أ + ٣ ء) + (أ + ٤ ء) = ٢٢$

∴ $٢ أ + ٧ ء = ٢٢$ (١)

، ∵ $\frac{ح_٩}{ح_{١٤}} = \frac{٢}{٣}$ ∴ $\frac{أ + ٨ ء}{أ + ١٣ ء} = \frac{٢}{٣}$

∴ $٣ أ + ٢٤ ء = ٢ أ + ٢٦ ء$ ∴ $أ = ٢ ء$ (٢)

وبالتعويض من (٢) فى (١) : ∴ $٤ ء + ٧ ء = ٢٢$

∴ $١١ ء = ٢٢$ ∴ $ء = ٢$

وبالتعويض فى (٢) : ∴ $أ = ٤$ ∴ المتتابعة هى (٤ ، ٦ ، ٨ ، ...)

مثال ١٢

متتابعة حسابية حدها الثانى خمسة أمثال حدها السادس ، مجموع مربعى حديها الأول والرابع ٤٠٥ فما هى المتتابعة ؟

الحل

∵ $ح_٢ = ٥ ح_٦$ ∴ $أ + ء = ٥ (أ + ٥ ء)$

∴ $-٤ أ = ٢٤ ء$ ∴ $أ = -٦ ء$ (١)

، ∵ $ح_١^٢ + ح_٤^٢ = ٤٠٥$ ∴ $أ^٢ + (أ + ٣ ء)^٢ = ٤٠٥$ (٢)

وبالتعويض من (١) فى (٢) : ∴ $(-٦ ء)^٢ + (-٦ ء + ٣ ء)^٢ = ٤٠٥$

∴ $٣٦ ء^٢ + ٩ ء^٢ = ٤٠٥$ ∴ $٤٥ ء^٢ = ٤٠٥$

∴ $ء^٢ = ٩$ ∴ $ء = \pm ٣$

وبالتعويض فى (١) عن $ء = ٣$ ∴ $أ = -١٨$

∴ المتتابعة هى (-١٨ ، -١٥ ، -١٢ ، ...)

وبالتعويض فى (١) عن $ء = -٣$ ∴ $أ = ١٨$

∴ المتتابعة هى (١٨ ، ١٥ ، ١٢ ، ...)

ملاحظتـان

1) إذا علم مجموع ثلاثة أعداد فى تتابع حسابى يفضل فرضهم على الصورة : (أ − ء ، أ ، أ + ء)

2) إذا علم مجموع أربعة أعداد فى تتابع حسابى يفضل فرضهم على الصورة :

(أ − ٣ء ، أ − ء ، أ + ء ، أ + ٣ء)

مثال ١٣

ثلاثة أعداد تكون متتابعة حسابية مجموعها ٢١ وحاصل ضربها ٢٣١ ، أوجد هذه الأعداد.

الحـــل

بفرض أن الأعداد هى : أ − ء ، أ ، أ + ء

∴ (أ − ء) + أ + (أ + ء) = ٢١ ∴ ٣أ = ٢١ ∴ أ = ٧

، ∵ أ (أ − ء) (أ + ء) = ٢٣١ ∴ أ (أ^{٢} − ء^{٢}) = ٢٣١

وبالتعويض عن أ : ∴ ٧ (٤٩ − ء^{٢}) = ٢٣١ ∴ ٤٩ − ء^{٢} = ٣٣

∴ ء^{٢} = ١٦ ∴ ء = ± ٤

وعندما ء = ٤ ∴ الأعداد هى : ٣ ، ٧ ، ١١

وعندما ء = −٤ ∴ الأعداد هى : ١١ ، ٧ ، ٣

الأوساط الحسابية

الوسط الحسابى لعدد محدود من الأعداد يساوى مجموع تلك الأعداد مقسومًا على عددها.

فمثلًا : الوسط الحسابى للأعداد ٥ ، ٧ ، ٩ ، ١١ هو $\frac{٥ + ٧ + ٩ + ١١}{٤}$ = ٨

* **وبالتالى :** الوسط الحسابى للعددين أ ، ب يساوى $\frac{أ + ب}{٢}$ أى نصف مجموعهما.

فمثلًا : الوسط الحسابى للعددين ٤ ، ٦ يساوى $\frac{٤ + ٦}{٢}$ = ٥

تعريـــف

إذا كانت أ ، ب ، حـ ثلاثة حدود متتالية من متتابعة حسابية فإن الحد الأوسط ب يساوى الوسط الحسابى للحدين الآخرين أ ، حـ

أى أن ب = $\frac{أ + حـ}{٢}$ ، أى ٢ب = أ + حـ

مثال ١٤

عددان الفرق بينهما ٣ ووسطهما الحسابي ٧,٥ ، أوجد العددين.

الحـــل

نفرض أن العددين هما أ ، ب حيث أ > ب ∴ أ − ب = ٣ (١)

، ∵ $\frac{أ + ب}{٢}$ = ٧,٥ ∴ أ + ب = ١٥ (٢)

وبجمع (١) ، (٢) ينتج أن : ٢ أ = ١٨ ∴ أ = ٩

وبالتعويض فى (١) : ∴ ب = ٦ ∴ العددان هما ٦ ، ٩

مثال ١٥

عددان وسطهما الحسابى ١٣ ، حاصل ضربهما ١٦٨ ، أوجد العددين.

الحـــل

نفرض أن العددين هما س ، ص ∴ $\frac{س + ص}{٢}$ = ١٣

∴ س + ص = ٢٦ ∴ ص = ٢٦ − س (١) ، س ص = ١٦٨ (٢)

وبالتعويض من (١) فى (٢) : ∴ س (٢٦ − س) = ١٦٨

∴ س^{٢} − ٢٦ س + ١٦٨ = ٠ ∴ (س − ١٢) (س − ١٤) = ٠

∴ س = ١٢ أ، س = ١٤

وبالتعويض فى (١) : ∴ ص = ١٤ أ، ص = ١٢ ∴ العددان هما ١٢ ، ١٤

إدخال عدد محدود من الأوساط الحسابية بين عددين

إذا كانت أ ، ب كميتين معلومتين وأريد إدخال ن من الأوساط الحسابية : س$_{١}$ ، س$_{٢}$ ، س$_{٣}$ ، ... ، س$_{ن}$ بينهما فإنه ينتج لدينا متتابعة حسابية حدها الأول أ وعدد حدودها ن + ٢ وحدها الأخير ب = ح$_{ن+٢}$

وتكون المتتابعة على الصورة : (أ ، س$_{١}$ ، س$_{٢}$ ، س$_{٣}$ ، ... ، س$_{ن}$ ، ب)

مثال ١٦

أدخل أحد عشر وسطًا حسابيًا بين : ٢٥ ، −١١

الحـــل

بإدخال ١١ وسطًا حسابيًا بين ٢٥ ، −١١ نحصل على متتابعة حسابية مكونة من ١٣ حدًا

حيث أ = ٢٥ ، ح$_{١٣}$ = −١١

∴ −١١ = ٢٥ + ١٢ ء

∴ ١٢ ء = −٣٦ ∴ ء = −٣

∴ الأوساط هى (٢٢ ، ١٩ ، ١٦ ، ... ، −٨)

للاحظ أن :

عند إدخال ن من الأوساط الحسابية بين أ ، ب فإن أساس المتتابعة ء = $\frac{ب - أ}{ن + ١}$

أى أن : ء = $\frac{-١١ - ٢٥}{١٢}$ = −٣

ملاحظة

عند إدخال عدة أوساط حسابية بين أ ، ل تكون المتتابعة الحسابية هى :

(أ ، أ + ء ، أ + ٢ ء ، ... ، ل − ٢ ء ، ل − ء ، ل) ويكون :

الوسط الأول = $ح_١$ = أ + ء ، الوسط الثانى = $ح_٢$ = أ + ٢ ء وهكذا ...

، الوسط الأخير = ل − ء ، الوسط قبل الأخير = ل − ٢ ء وهكذا ...

∴ مجموع أى وسط ونظيره من الطرف الآخر = أ + ل

أى أن : مجموع الوسطين الأول والأخير = أ + ل ومجموع الوسطين الثانى وقبل الأخير = أ + ل

مثال ١٧

إذا أدخلت عدة أوساط حسابية بين العددين ٣٥ ، ٣ وكانت النسبة بين مجموع الوسطين الأولين إلى مجموع الوسطين الأخيرين ١٦ : ٣ فما عدد هذه الأوساط ؟

الحل

نفرض أن المتتابعة (٣٥ ، ٣٥ + ء ، ٣٥ + ٢ ء ، ... ، ٣ − ٢ ء ، ٣ − ء ، ٣)

∵ $\frac{٣٥ + ء + ٣٥ + ٢ء}{٣ - ء + ٣ - ٢ء} = \frac{١٦}{٣}$ ∴ $\frac{٧٠ + ٣ء}{٦ - ٣ء} = \frac{١٦}{٣}$

∴ ٢١٠ + ٩ ء = ٩٦ − ٤٨ ء ∴ ٥٧ ء = −١١٤ ∴ ء = −٢

∵ ل = أ + (ن − ١) ء حيث ل الحد الأخير ، ن عدد حدود المتتابعة.

∴ ٣ = ٣٥ + (ن − ١) × −٢ ∴ ٣ = ٣٥ − ٢ ن + ٢

∴ ن = ١٧ حدًا. ∴ عدد الأوساط = ١٧ − ٢ = ١٥ وسطًا.

ملاحظتان

* إذا كان : (أ ، ب ، حـ) فى تتابع حسابى فإن :

١ (أ + ك ، ب + ك ، حـ + ك) فى تتابع حسابى ، (أ − ك ، ب − ك ، حـ − ك) فى تتابع حسابى أيضًا.

٢ (أ ك ، ب ك ، حـ ك) فى تتابع حسابى أيضًا.

* إذا كانت ($أ_١$ ، $ب_١$ ، $حـ_١$ ، ...) متتابعة حسابية أساسها ($ء_١$)

وكانت ($أ_٢$ ، $ب_٢$ ، $حـ_٢$ ، ...) متتابعة حسابية أساسها ($ء_٢$)

فإن : ($أ_١ + أ_٢$ ، $ب_١ + ب_٢$ ، $حـ_١ + حـ_٢$ ، ...) تمثل متتابعة حسابية أساسها ($ء_١ + ء_٢$)

تمارين 3 على المتتابعة الحسابية

اختبر نفسك

من أسئلة الكتاب المدرس • فهم • تطبيق • مستويات عليا

أولاً أسئلة الاختيار من متعدد

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

تمارين على المتتابعة الحسابية وتعيينها

① جميع المتتابعات الآتية يمكن أن تكون حسابية ما عدا المتتابعة ....

(أ) (٣ ، ٧ ، ١١ ، ١٥ ، ...) (ب) (−١١ ، −١٥ ، −١٩ ، −٢٣ ، ...)

(جـ) $\left(\frac{1}{2} ، \frac{1}{4} ، \frac{1}{5} ، \frac{1}{6} ، ...\right)$ (د) $\left(\frac{21}{5} ، \frac{16}{5} ، \frac{11}{5} ، \frac{6}{5} ، ....\right)$

② جميع المتتابعات الآتية حسابية عدا ....

(أ) (٢ ن − ٥) (ب) (٤٣ − ٧ ن) (جـ) ($2^{ن}$) (د) (٣ ن)

③ المتتابعة الحسابية من بين المتتابعات الآتية هى ....

(أ) $(ح_ن) = \left(\frac{ن+1}{ن}\right)$ (ب) $(ح_ن) = \left((ن+1)^2\right)$

(جـ) $(ح_ن) = \left(\frac{2}{ن}(ن+2)\right)$ (د) $(ح_ن) = \left(\frac{ن^3 - 1}{ن^2 + ن + 1}\right)$

④ المتتابعة ($ح_ن$) تكون حسابية إذا وفقط إذا كان .... لكل ن > ١

(أ) $ح_ن + ح_{ن+1}$ = مقدار ثابت (ب) $\frac{ح_{ن+1}}{ح_ن}$ = مقدار ثابت

(جـ) $ح_{ن-1} + ح_{ن+1} = 2 ح_ن$ (د) $ح_{ن+1} - ح_ن = \frac{1}{ن}$

⑤ الحد العام للمتتابعة : (أ ، أ + ء ، أ + ٢ ء ، ...) هو ....

(أ) ء ن + (ء − أ) (ب) أ + ن ء (جـ) أ + (ن + ١) ء (د) ء ن + (أ − ء)

⑥ المتتابعة الحسابية (٣ ، ٥ ، ٧ ، ...) حدها النونى يساوى ....

(أ) ٣ ن (ب) ٢ ن + ١ (جـ) ٥ ن − ٢ (د) ٢ ن

⑦ إذا كان : ٢ أ + ١ ، ٥ أ − ١ ، ٦ أ + ٣ ثلاثة حدود متتالية من متتابعة حسابية فإن : أ = ...

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) ٣ (د) ٥

⑧ إذا كانت : (٢٩ ، س ، ... ، ٣ س ، ٩٥) متتابعة حسابية فإن : س = ...

(أ) ٣٠ (ب) ٣١ (جـ) ٣٢ (د) ٣٣

(٩) إذا كانت : ٣٦ ، أ ، ٢٤ ، ب حدودًا متتالية من متتابعة حسابية فإن : ب = ...

(أ) ١٢ (ب) ١٦ (جـ) ١٨ (د) ٢٤

(١٠) إذا كانت : (س ، ص ، ٣ س + ص ، س + ٣ ص + ٢ ، ....) متتابعة حسابية

فإن : س − ص = ...

(أ) −٦ (ب) −٢ (جـ) ٢ (د) ٦

(١١) عدد حدود المتتابعة : (٢ ، ٨ ، ١٤ ، ... ، ٦٨) يساوى .... حدًا.

(أ) ٦ (ب) ٨ (جـ) ١٢ (د) ١٦

(١٢) الحد الأخير فى المتتابعة الحسابية التى حدها الأول ٣ وأساسها ٥ وعدد حدودها ٢٥ حدًا

يساوى ....

(أ) ١١٣ (ب) ١١٨ (جـ) ١٢٣ (د) ١٢٨

(١٣) الحد العاشر فى المتتابعة الحسابية ($\sqrt{٣}$ ، $\sqrt{١٢}$ ، $\sqrt{٢٧}$ ، ...) يساوى ....

(أ) $\sqrt{٢٤٣}$ (ب) $\sqrt{٣٠٠}$ (جـ) $\sqrt{٣٦٣}$ (د) $\sqrt{٤٣٢}$

(١٤) قيمة الحد الأوسط فى المتتابعة (٢ ، ٥ ، ٨ ، ... ، ١٢٨) هى ....

(أ) ٢٢ (ب) ٤٣ (جـ) ٦٥ (د) ٩٦

(١٥) فى المتتابعة الحسابية (١٢ ، ١٤ ، ١٦ ، ...) فإن رتبة الحد الذى قيمته ١٠٢ هو ....

(أ) $ح_{٢٦}$ (ب) $ح_{٤٨}$ (جـ) $ح_{٤٦}$ (د) $ح_{٤٥}$

(١٦) رتبة الحد الذى قيمته صفر فى المتتابعة الحسابية (٢٢ ، ٢٠ ، ١٨ ، ...) هى ....

(أ) ٨ (ب) ١٠ (جـ) ١٢ (د) ١٤

(١٧) قيمة $ح_{١٠}$ من النهاية فى المتتابعة الحسابية (١٩ ، ١٥ ، ١١ ، ... ، −٦١) تساوى ....

(أ) −٨ (ب) −٥ (جـ) −١ (د) −٣٧

(١٨) قيمة الحد العاشر من النهاية فى المتتابعة الحسابية (١٧ ، ١٩ ، ٢١ ، ... ، ٤٧) يساوى ....

(أ) ٢٩ (ب) ٣١ (جـ) ٢٥ (د) ٢٧

(١٩) متتابعة حسابية عدد حدودها ٢٠ فإن الحد الرابع من النهاية هو الحد .... من البداية.

(أ) ١٥ (ب) ١٦ (جـ) ١٧ (د) ١٨

(٢٠) رتبة أول حد قيمته أصغر من −١٨٠ فى المتتابعة الحسابية (٦٤ ، ٦١ ، ٥٨ ، ...) هى ....

(أ) ٨١ (ب) ٨٢ (جـ) ٨٣ (د) ٨٤

(٢١) قيمة أول حد قيمته أكبر من ١٠٠٠ فى حدود المتتابعة الحسابية (٢ ، ٩ ، ١٦ ، ...) هى ....

(أ) ١٠٠٣ (ب) ١٠٠٤ (جـ) ١٠٠٥ (د) ١٠٠٦

(٢٢) رتبة أول حد موجب فى المتتابعة الحسابية (-٤٨ ، -٤٥ ، -٤٢ ، ...) هو ....

(أ) $ح_{١٦}$ (ب) $ح_{١٧}$ (جـ) $ح_{١٨}$ (د) $ح_{١٩}$

(٢٣) رتبة آخر حد سالب فى المتتابعة الحسابية (-٦٢ ، -٥٧ ، -٥٢ ، ...) هو ....

(أ) $ح_{١٢}$ (ب) $ح_{١٣}$ (جـ) $ح_{١٤}$ (د) $ح_{١١}$

(٢٤) رتبة آخر حد موجب فى المتتابعة (٢٨ ، ٢٥ ، ٢٢ ، ...) هى ....

(أ) $ح_{٩}$ (ب) $ح_{١٠}$ (جـ) $ح_{١١}$ (د) $ح_{١٢}$

(٢٥) أول حد سالب من حدود المتتابعة الحسابية (٣٤١ ، ٣٣٤ ، ٣٢٧ ، ...) يساوى ....

(أ) -٤ (ب) -٣ (جـ) -٢ (د) -١

(٢٦) إذا كان $ح_{ن}$ = (٢ ، ٥ ، ٨ ، ... ، ل) هى متتابعة حسابية وكان الحد السابع عشر من البداية هو نفسه الحد السابع عشر من النهاية فإن : ل = ...

(أ) ٩٨ (ب) ٩٦ (جـ) ١١ (د) ٩٥

(٢٧) إذا كانت ($ح_{ن}$) متتابعة حسابية فيها $ح_{٢}$ - $ح_{٥}$ = ٦ ، $ح_{٤}$ = ١٦ فإن قيمة أول حد سالب فى المتتابعة تساوى ....

(أ) -٤ (ب) -٣ (جـ) -٢ (د) -١

(٢٨) رتبة أول حد قيمته تزيد عن ١٠٠ فى المتتابعة ($ح_{ن}$) = (٢ + ٥ ن) هى ....

(أ) ١٩ (ب) ٢٠ (جـ) ٢١ (د) ٢٢

(٢٩) المتتابعة الحسابية التى حدها الأول = ٤ وحدها الخامس = ٢٠ هى ....

(أ) (٤ ، ٨ ، ١٢ ، ...) (ب) (٤ ، ٦ ، ٨ ، ...)

(جـ) (٤ ، ٢٠ ، ٣٦ ، ...) (د) (٤ ، ٢٤ ، ٤٤ ، ...)

(٣٠) متتابعة حسابية حدها الأول = ٥ ، $ح_{ن+١}$ = $ح_{ن}$ + ٣ فإن حدها الخامس = ...

(أ) ١٢ (ب) ٢٠ (جـ) ١٧ (د) ١٩

(٣١) إذا كان الحد الثالث من متتابعة حسابية = ١٢ وحدها السابع = ٢٤ فإن حدها العاشر = ...

(أ) ٣٦ (ب) ٣٩ (جـ) ٣٠ (د) ٣٣

(٣٢) إذا كان $ح_{٢}$ من متتابعة حسابية هو ١٢٩ ، $ح_{٥}$ منها هو ١٤١ فإن رتبة الحد الذى قيمته ١٦١ هى ....

(أ) ٣ (ب) ٩ (جـ) ١٠ (د) ١٢

(٣٣) متتابعة حسابية حدها السادس = ٣٤ ، مجموع حديها السابع والتاسع يساوى ٨٨ ، فإن رتبة أول حد قيمته أكبر من ١٠٥ فى هذه المتتابعة هى ....

(أ) ١٤ (ب) ١٦ (جـ) ١٨ (د) ٢١

(٣٤) إذا كانت $(ح_ن)$ متتابعة حسابية فيها $ح_{١٣} + ح_{١٨} = ٦٨$ فإن : $ح_{١٤} + ح_{١٧} =$ ....

(أ) ٦٨ (ب) ١٣٦ (جـ) ٣٤ (د) ٢٠٤

(٣٥) من المتتابعة الحسابية (٢ ٩ + ٥ ب ، ٣ ٩ + ٨ ب ، ٤ ٩ + ١١ ب ، ...) نجد أن $ح_{١٠} =$ ....

(أ) ٩ + ٩ ب (ب) ١٠ ٩ + ٣٠ ب (جـ) ١١ ٩ + ٣٢ ب (د) ١٢ ٩ + ٣٥ ب

(٣٦) إذا كان : $(ح_ن)$ متتابعة حسابية فيها $\frac{ح_٤}{ح_٧} = \frac{٢}{٣}$ فإن : $\frac{ح_٦}{ح_٨} =$ ....

(أ) $\frac{٢}{٣}$ (ب) $\frac{٤}{٥}$ (جـ) $\frac{٦}{٧}$ (د) $\frac{٣}{٤}$

(٣٧) فى أى متتابعة حسابية $(ح_ن)$ يكون $\frac{ح_{٤٥} + ح_{٥١}}{ح_{٤٨}} =$ ....

(أ) ٢ (ب) ٣ (جـ) ٤ (د) ٥

(٣٨) متتابعة حسابية فيها $ح_ن = م$ ، $ح_م = ن$ فإن أساس المتتابعة (ى) = ... حيث $م \neq ن$

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) −١ (د) −٢

(٣٩) فى متتابعة حسابية إذا كان : $ح_{١٧} = ٧٣$ ، $ح_{٧٣} = ١٧$

فإن رتبة الحد الذى قيمته صفر هى ....

(أ) ٥٦ (ب) ٨٩ (جـ) ٩٠ (د) ٩١

(٤٠) إذا كان : $(ح_ن)$ متتابعة حسابية أساسها (ى) فإن : ى = ...

(أ) $ح_م - ح_ر$ (ب) $\frac{ح_م - ح_ر}{م - ر}$ (جـ) $\frac{ح_م}{ح_ر}$ (د) $ح_{م-ر}$

(٤١) إذا كان : $ح_{٢ن-٢}$ من المتتابعة (١٣ ، $١٤\frac{١}{٤}$ ، $١٥\frac{١}{٢}$ ، ...) يساوى $ح_{٢ن+١}$ من المتتابعة (١٩ ، $٢٠\frac{١}{٢}$ ، ٢٢ ، ...) فإن : ن = ...

(أ) ١٥ (ب) ١٤ (جـ) ١٣ (د) ١٢

(٤٢) عدد الأعداد المكونة من ثلاثة أرقام وتقبل القسمة على ٩ هو ....

(أ) ٩٠ (ب) ٩٨ (جـ) ٩٩ (د) ١٠٠

(٤٣) إذا كانت قياسات زوايا شكل خماسى تكون متتابعة حسابية أساسها °١٠

فإن قياس أكبر زاوية فى الخماسى تساوى ....

(أ) °٨٨ (ب) °١٠٨ (جـ) °١١٨ (د) °١٢٨

(٤٤) إذا كان : ٩ ، ب ، حـ فى تتابع حسابى فإن : $\frac{(٩ - حـ)^٢}{(ب^٢ - ٩ حـ)} =$ ....

(أ) −١ (ب) ١ (جـ) ٢ (د) ٤

(٤٥) الحد المشترك العاشر بين المتتابعتين (٣ ، ٧ ، ١١ ، ...) ، (١ ، ٦ ، ١١ ، ...) يساوى ....

(أ) ١٩١ (ب) ١٩٣ (جـ) ٢١١ (د) ٢٣١

(٤٦) متتابعة حسابية فيها $ح_م = ن^٢$ ، $ح_ن = م^٢$ ، حيث م ≠ ن فإن الأساس (ء) = ...

(أ) $م^٢ + ن^٢ - ٢$ (ب) م + ن (جـ) - م - ن (د) - م + ن

(٤٧) إذا كان ($ح_ن$) متتابعة حسابية فيها م $ح_م$ = ن $ح_ن$ ، م ≠ ن فإن : $ح_{م+ن}$ = ...

(أ) صفر (ب) م + ن - ١

(جـ) ١ (د) م - ن

(٤٨) إذا كانت أطوال أضلاع مثلث قائم الزاوية فى تتابع حسابى فإن الأساس = ... طول وتر المثلث.

(أ) $\frac{١}{٢}$ (ب) $\frac{١}{٣}$ (جـ) $\frac{١}{٤}$ (د) $\frac{١}{٥}$

(٤٩) إذا كان أول حد فى متتابعة حسابية يساوى ٢ وكان ناتج قسمة الحد السابع على الحد الثالث يساوى ٢ وباقى القسمة ٨ فإن الحد الرابع عشر هو ....

(أ) ٧٦ (ب) ٦٧ (جـ) ٢٨ (د) ٥٤

تمارين على الأوساط الحسابية

(٥٠) الوسط الحسابى للعددين ٨ ، ١٢ هو ....

(أ) ٨ (ب) ١٢ (جـ) ٢٠ (د) ١٠

(٥١) إذا كان الوسط الحسابى للعددين : س ، ٢٦ هو ٢١ فإن : س = ...

(أ) ٢٦ (ب) ١٦ (جـ) ٤٢ (د) ٢١

(٥٢) إذا كان : س < ٠ ، وكان : (٧ س ، ٨ ، $س^٢ - ٢$) فى تتابع حسابى فإن : س = ...

(أ) ٢ (ب) -٩ (جـ) -٢ (د) -٧

(٥٣) الوسط الحسابى للعددين أ + ب ، أ - ب يساوى ....

(أ) أ (ب) ب (جـ) ٢ أ (د) ٢ ب

(٥٤) فى أى متتابعة حسابية ($ح_ن$) يكون $\frac{ح_{ن-١} + ح_{ن+١}}{ح_ن}$ = ...

(أ) $ح_{ن+٢}$ (ب) $ح_{٢ن}$ (جـ) صفر (د) ٢

(٥٥) فى أى متتابعة حسابية الوسط الخامس هو الحد ....

(أ) الخامس. (ب) الرابع. (جـ) العاشر. (د) السادس.

(٥٦) إذا كانت : (أ ، ٦ ، ب ، ...) فى تتابع حسابى ، فإن : ....

(أ) أ + ب < ٦ (ب) ٦ < أ + ب < ١٢ (جـ) أ + ب = ٦ (د) أ + ب = ١٢

(٥٧) فى أى متتابعة حسابية حدها الأول أ وأساسها ء فإن كل مما يأتى صحيح ما عدا ....

(أ) $ح_٣ + ح_٥ = ٢ ح_٤$ (ب) $ح_{١٠} + ح_{١٢} = ٢ ح_{١١}$

(جـ) $ح_٣ + ح_٧ + ح_{١٧} = ٣ ح_٩$ (د) $ح_٤ + ح_٦ = ح_{١٠}$

(٥٨) إذا كانت : أ ، ب وسطين حسابيين بين س ، ص فإن : $\frac{ص - س}{ب - أ}$ = ...

(أ) ٢ (ب) ٣ (جـ) ٤ (د) ٦

(٥٩) إذا كانت : ($أ^٢$ ، $ب^٢$ ، $ح^٢$) فى تتابع حسابى فإن : $ب^٢$ = ...

(أ) $أ^٢ + ح^٢$ (ب) $٢ (أ^٢ + ح^٢)$ (جـ) $\frac{أ^٢ + ح^٢}{٢}$ (د) $\sqrt{أ^٢ + ح^٢}$

(٦٠) الوسط الحسابى بين العددين $(أ + ب)^٢$ ، $(أ - ب)^٢$ هو ....

(أ) ٢ أ (ب) أ + ب (جـ) $أ^٢ + ب^٢$ (د) $أ^٢ - ب^٢$

(٦١) مجموع الوسطين الحسابيين الأول والأخير بين العددين ٧ ، ٣١ يساوى ....

(أ) ١٩ (ب) ٣٨ (جـ) ٢٤ (د) ١٣

(٦٢) إذا كانت : (أ ، ب ، ح ، ٢٠ ، ك ، هـ ، و) تكون متتابعة حسابية

فإن : أ + ب + ح + ك + هـ + و = ...

(أ) ٦٠ (ب) ٨٠ (جـ) ١٠٠ (د) ١٢٠

(٦٣) عند إدخال ن وسطًا حسابيًا بين أ ، ب فإن أساس المتتابعة الحسابية هو ....

(أ) $\frac{أ - ب}{ن + ١}$ (ب) $\frac{أ - ب}{ن + ٢}$ (جـ) $\frac{ب - أ}{ن + ١}$ (د) $\frac{ب - أ}{ن + ٢}$

(٦٤) عند إدخال عدة أوساط حسابية بين أ ، ل يكون الوسط الأخير = ...

(حيث ء أساس المتتابعة الناتجة)

(أ) ل - ء (ب) ل (جـ) ل - ٢ ء (د) ل + ء

(٦٥) عند إدخال ١٠ أوساط حسابية بين ٥ ، ٣٨ فإن المتتابعة الناتجة هى ....

(أ) (٥ ، ١٠ ، ١٥ ، ... ، ٣٨) (ب) (٥ ، ٧ ، ٩ ، ١١ ، ... ، ٣٨)

(جـ) (٥ ، ٨ ، ١١ ، ... ، ٣٨) (د) (٥ ، ٩ ، ١٣ ، ... ، ٣٨)

(٦٦) إذا ادخلت ١٢ وسطًا حسابيًا بين -١٤ ، ٥١ فإن الوسط السابع = ...

(أ) ٢١ (ب) ١٦ (جـ) ٢٦ (د) ٣١

(٦٧) إذا ادخلت عدة أوساط حسابية بين -٦٥ ، -١٢٥ فكان الوسط الثانى عشر = -١١٣

فإن عدد الأوساط = ...

(أ) ١٢ (ب) ١٣ (جـ) ١٤ (د) ١٥

(٦٨) ادخلت عدة أوساط حسابية بين ٨ ، ٦٢ فكان مجموع الوسطين الثانى والسادس = ٤٠

فإن عدد الأوساط = ...

(أ) ١٥ (ب) ١٦ (جـ) ١٧ (د) ١٨

(٦٩) عددان الفرق بينهما ٥ ووسطهما الحسابى ٦,٥ فإن العددين هما ....

(أ) ٥ ، ١٠ (ب) -١ ، ٤ (جـ) ٢ ، ٧ (د) ٩ ، ٤

(٧٠) عددان يزيد أحدهما عن ضعف الآخر بمقدار ٢ وكان وسطهما الحسابى ١٤,٥

فإن العددين هما ....

(أ) ٦ ، ١٤ (ب) ١١ ، ١٨ (جـ) ٩ ، ٢٠ (د) ١٠ ، ٢٢

(٧١) عددان النسبة بينهما ٣ : ١٠ ووسطهما الحسابى ١٣ فإن العددين ....

(أ) ٣ ، ١٠ (ب) ٩ ، ١٥ (جـ) ٩ ، ٣٠ (د) ٦ ، ٢٠

(٧٢) إذا كان الوسط الحسابى بين أ ، ب هو ٨ والوسط الحسابى بين ٤ أ ، ٢ ب هو ٢٠

فإن : (أ ، ب) = ...

(أ) (٤ ، ١٢) (ب) (٦ ، ١٠) (جـ) (٥ ، ١١) (د) (٨ ، ٨)

(٧٣) عددان وسطهما الحسابى ٢٣ وحاصل ضربهما ٤٩٣ فإن العددان هما ....

(أ) ١٥ ، ٣١ (ب) ٢٠ ، ٢٦ (جـ) ١٦ ، ٣٠ (د) ٢٩ ، ١٧

(٧٤) إذا كان : أ ، ب وسطين حسابيين بين س ، ص فإن : $\frac{ص^{٢} - س^{٢}}{ب^{٢} - أ^{٢}}$ = ...

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) ٣ (د) ٤

(٧٥) إذا كانت : ($ح_{ن}$) متتابعة حسابية حيث : $ح_{ن} = ٣ن - ٢$

فإن الوسط الحسابى بين $ح_{٥}$ ، $ح_{١١}$ يساوى ....

(أ) ٨ (ب) ١٦ (جـ) ٢٢ (د) ٢٦

(٧٦) إذا كانت (١ ، س ، ص) فى تتابع حسابى وكان : $ص^{٢} = س$ ، $س \neq ص \neq ١$

فإن : ص = ...

(أ) $\frac{١}{٤}$ (ب) $-\frac{١}{٤}$ (جـ) $\frac{١}{٢}$ (د) $\frac{-١}{٢}$

(٧٧) إذا كانت : (س ، ٤ س + ١ ، س + ٢ ص ، ٣ ص + ٢) فى تتابع حسابى

فإن : س = ...

(أ) ٢ (ب) −٢ (جـ) −٧ (د) ٧

(٧٨) إذا كان (أ ، ب ، جـ ، ى ، ...) متتابعة حسابية وكان : ب = ٨ فإن الوسط الحسابى للأعداد أ ، ب ، جـ يساوى ....

(أ) ٦ (ب) ٨ (جـ) ١٦ (د) ٢٤

(٧٩) ($ح_{ن}$) متتابعة حسابية فيها $ح_{٥} = س$ فإن : $\sum_{ر=٢}^{٨} ح_{ر}$ = ...

(أ) س (ب) ٧ س (جـ) $\frac{س}{٧}$ (د) س + ٧

ثانيًا الأسئلة المقالية

تمارين على المتتابعة الحسابية

(١) بين أى المتتابعات الآتية تكون متتابعة حسابية وأوجد الحد العام للمتتابعة الحسابية :

(١) (٩ ، ١٣ ، ١٧ ، ٢١ ، ...)

(٢) (٤ ، ٧ ، ١٢ ، ١٩ ، ...)

(٣) (−١٢ ، −١٨ ، −٢٤ ، −٣٠ ، −٣٦)

(٤) ($\frac{١}{٢}$ ، $\frac{١}{٣}$ ، $\frac{١}{٤}$ ، $\frac{١}{٥}$ ، ...)

(٥) (س ، س + ص ، س + ٢ ص ، ...)

(٦) (٧ ، ٧ ، ٧ ، ٧ ، ٧)

٢ **بين أى المتتابعات الآتية حسابية واذكر أساسها واكتب الحدود الثلاثة الأولى من كل متتابعة حسابية :**

① $(ح_ن) = (٥ن + ٢)$ ② $(ح_ن) = \left(\frac{٤ - ٥ن}{٢}\right)$

③ $(ح_ن) = (٣ \times ٧^{ن+١})$ ④ $(ح_ن) = \left(\frac{ن^٢ - ٢٥}{ن + ٥}\right)$

٣ فى المتتابعة الحسابية (٦٣ ، ٥٩ ، ٥٥ ، ... ، -١٣٣) **أوجد :**

① قيمة الحد السابع. ② عدد حدود المتتابعة. «٣٩ ، ٥٠»

٤ أوجد رتبة وقيمة أول حد سالب فى المتتابعة الحسابية (٣٥ ، ٣١ ، ٢٧ ، ...) «١٠ ، -١»

٥ أوجد رتبة وقيمة أول حد موجب فى المتتابعة الحسابية (-٥١ ، -٤٨ ، -٤٥ ، ...) «١٩ ، ٣»

٦ أوجد رتبة وقيمة آخر حد سالب فى المتتابعة الحسابية (-٣٩ ، -٣٤ ، -٢٩ ، ...) «٨ ، -٤»

٧ أوجد عدد الحدود السالبة فى المتتابعة الحسابية (-٤٧ ، -٤٢ ، -٣٧ ، ...) «١٠»

٨ أوجد عدد الحدود الموجبة فى المتتابعة الحسابية (٧٢ ، ٦٣ ، ٥٤ ، ...) «٨»

٩ أثبت أنه لا يوجد حد قيمته ١٠٠ فى المتتابعة الحسابية (١٣ ، ١٧ ، ٢١ ، ...)

١٠ إذا كانت (لو س ، لو ص ، لو ع ، ...) متتابعة حسابية **فأثبت أن :**

$ص^٢ = س ع$ (حيث س ، ص ، ع كميات موجبة).

١١ إذا كانت المتتابعة (١٢ ، س ، ... ، ص ، -٢٤) متتابعة حسابية وكان حدها الأخير ثلاثة أمثال حدها السادس **فأوجد قيمة كل من :** س ، ص وعدد حدود هذه المتتابعة. «٨ ، -٢٠ ، ١٠»

١٢ **اكتشف الخطأ :**

① يعرف أساس المتتابعة الحسابية بأنه الفرق بين كل حد والحد السابق له مباشرة

أى أن : $ء = ح_ن - ح_{ن-١}$ لكل $ن \in ص^+$

② تعطى العلاقة بين ن ، $ح_ن$ فى المتتابعة الحسابية كالآتى :

$ح_ن = أ ن + ب$ حيث أ ، ب ثابتان ، ب هو أساس المتتابعة فى هذه العلاقة.

تمارين على تعيين المتتابعة الحسابية

١٣ أوجد المتتابعة الحسابية التى حدها الثامن ١١ ، وحدها العاشر هو المعكوس الجمعى لحدها السابع عشر. «(٢٥ ، ٢٣ ، ٢١ ، ...)»

١٤ متتابعة حسابية حدها الرابع = ١١، مجموع حديها الخامس والتاسع يساوى ٤٠

أوجد المتتابعة ثم أوجد رتبة الحد الذى قيمته ١٥٢ فى هذه المتتابعة. «(٢ ، ٥ ، ٨ ، ...) ، ٥١»

١٥ أوجد المتتابعة الحسابية التى مجموع حديها الثانى والرابع يساوى ٤ ومجموع حدودها السادس والسابع والثامن يساوى ٥٤
«(–٦ ، –٢ ، ٢ ، ...)»

١٦ $(ح_ن)$ متتابعة حسابية فيها $ح_٥ = ٢$ ، $ح_٧ = ٨$ أوجد المتتابعة ثم أوجد رتبة وقيمة أول حد فيها تزيد قيمته عن ١٤٣
«(–١٠ ، –٧ ، –٤ ، ...) ، $ح_{٥٣}$ ، ١٤٦»

١٧ $(ح_ن)$ متتابعة حسابية فيها : $ح_١ - ح_٣ = ٢٥$ ، $ح_٧ + ح_٨ = ٩٥$ أوجد المتتابعة ثم أوجد رتبة وقيمة أول حد سالب فيها.
«(٨٠ ، ٧٥ ، ٧٠ ، ...) ، $ح_{١٨}$ ، –٥»

١٨ أوجد المتتابعة الحسابية التى مجموع حديها الخامس والعاشر يساوى ٢٢ ، حدها الثامن يساوى ثلاثة أمثال حدها الرابع.
«(–٢ ، ٠ ، ٢ ، ...)»

١٩ أوجد المتتابعة الحسابية التى حدها السادس = ٢٠ ، النسبة بين حديها الرابع والعاشر كنسبة ٤ : ٧
«(١٠ ، ١٢ ، ١٤ ، ...)»

٢٠ أوجد المتتابعة الحسابية التى مجموع حديها الثانى والخامس ٤ وحاصل ضرب حديها الثالث والسادس ٧ وبين أن هناك متتابعتين.
«(–١ ، $\frac{١}{٥}$ ، $\frac{٧}{٥}$ ، ...) أ، (–٣ ، –١ ، ١ ، ...)»

٢١ $(ح_ن)$ متتابعة حسابية فيها : $ح_٢ + ح_٤ = ٤٢$ ، $ح_٣ \times ح_٥ = ٣١٥$ أوجد هذه المتتابعة.
«(٢٧ ، ٢٤ ، ٢١ ، ...)»

٢٢ متتابعة حسابية تزايدية مجموع حديها الثانى والثالث يساوى ١٥ ومربع حدها الخامس يساوى ٢٢٥ أوجد المتتابعة.
«(٣ ، ٦ ، ٩ ، ...)»

٢٣ متتابعة حسابية حدودها موجبة حاصل ضرب حديها الأول والرابع يساوى ٤٥ وحاصل ضرب الحدين الثالث والعاشر يزيد عن حاصل ضرب الحدين الرابع والسابع بمقدار ٢٤ أوجد المتتابعة.
«(٣ ، ٧ ، ١١ ، ...)»

٢٤ متتابعة حسابية عدد حدودها ٢١ حدًا وحدها الأوسط يساوى ٣٢ ومجموع حدودها الثلاثة الأخيرة يساوى ١٧٧ أوجد المتتابعة.
«(٢ ، ٥ ، ٨ ، ...)»

٢٥ أوجد المتتابعة الحسابية التى مجموع حديها الثانى والثالث –٧ ومجموع مربعيهما ٢٩
«(–٨ ، –٥ ، –٢ ، ...) أ، (١ ، –٢ ، –٥ ، ...)»

٢٦ أربعة أعداد تكون متتابعة حسابية مجموعها ٣٦ ومجموع مربعاتها ٣٤٤ أوجد هذه الأعداد.
«٦ ، ٨ ، ١٠ ، ١٢»

٢٧ إذا كان مجموع ثلاثة أعداد تكون متتابعة حسابية هو ٣٣ وحاصل ضربها ٧٩٢ فما هى الأعداد ؟
«٤ ، ١١ ، ١٨»

(٢٨) أوجد عدد الأعداد الصحيحة المحصورة بين ١١٠ ، ٤٥٠ والتى كل منها يقبل القسمة على ١١ «٣٠»

(٢٩) متتابعة حسابية حدها الأول = ٣ ، $ح_{ن} = ٣٩$ ، $ح_{٢ن} = ٧٩$
فما قيمة ن؟ ثم أوجد المتتابعة. «١٠ ، (٣ ، ٧ ، ١١ ، ...)»

(٣٠) متتابعة حسابية منتهية حدها الأول ٧ وكان $ح_{١١}$ من البداية يساوى ٤٧ ، $ح_{١١}$ من النهاية يساوى ٣٩٥
أوجد ($ح_{ن}$) «(٧ ، ١١ ، ١٥ ، ... ، ٤٣٥)»

(٣١) متتابعة حسابية حدها الأول ٨ ، $ح_{٢ن} = ٣ ح_{ن}$ أوجد المتتابعة. «(٨ ، ١٦ ، ٢٤ ، ...)»

(٣٢) أربعة أعداد فى تتابع حسابى مجموعهم ٤٤ وإذا أضفنا ٣ إلى العدد الثانى كونت الأعداد الأول والثانى والرابع متتابعة حسابية. أوجد الأعداد الأربعة. «٢ ، ٨ ، ١٤ ، ٢٠»

(٣٣) إذا كونت (س ، ص ، ع) متتابعة حسابية
فأثبت أن : (٣ س + ١ ، ٣ ص + ١ ، ٣ ع + ١) تكون متتابعة حسابية أيضًا.

تمارين على الأوساط الحسابية

(٣٤) إذا كان الوسط الحسابى بين عددين هو ١١ ، الوسط الحسابى بين مربعيهما هو ١٢٥
فما هما العددان ؟ «٩ ، ١٣»

(٣٥) أدخل ١٦ وسطًا حسابيًا بين ٢٧ ، −٢٤ «(٢٤ ، ٢١ ، ... ، −٢١)»

(٣٦) أدخل ٨ أوساط حسابية بين لو ٢ ، لو ١٠٢٤ «(٢ لو ٢ ، ٣ لو ٢ ، ... ، ٩ لو ٢)»

(٣٧) إذا أدخلت عدة أوساط حسابية بين ١ ، ١٧ وكان الوسط السابع يساوى ثلاثة أمثال الوسط الثانى.
أوجد عدد هذه الأوساط. «٧»

(٣٨) متتابعة حسابية حدها التاسع يساوى ٢٥ ، الوسط الحسابى بين حديها الثالث والخامس هو ١٠
أوجد هذه المتتابعة. «(١ ، ٤ ، ٧ ، ...)»

(٣٩) أوجد المتتابعة الحسابية التى فيها الوسط الحسابى بين حديها الثالث والسابع هو ١٩ ، حدها العاشر يزيد عن ضعف حدها الرابع بمقدار ٢ «(٧ ، ١٠ ، ١٣ ، ...)»

(٤٠) إذا كان مجموع الوسطين الثانى والرابع من متتابعة حسابية يساوى ١٢ ، والوسط السابع يزيد عن الوسط الثالث بمقدار ٤ فما هى المتتابعة ؟ «(٣ ، ٤ ، ٥ ، ...)»

(٤١) إذا أدخلنا عدة أوساط حسابية بين ٢ ، ٤٧ و كانت النسبة بين الوسط الثانى والوسط الأخير كنسبة ٢ : ١١
أوجد عدد الأوساط. «١٤»

٤٢ إذا أدخلنا عدة أوساط حسابية بين ٢٠ ، ١٧٠ وكان مجموع الوسطين الخامس عشر والعشرين خمسة أمثال الوسط الخامس فما عدد هذه الأوساط ؟

«٢٤»

٤٣ إذا أدخلنا عدة أوساط حسابية بين ٦ ، ٣٦ وكانت نسبة مجموع الوسطين الأولين إلى مجموع الوسطين الأخيرين كنسبة ١ : ٣ فما عدد هذه الأوساط ؟

«٩»

٤٤ **تفكير إبداعى :** إذا كان ل ، م وسطين حسابيين بين س ، ص حيث : ل > م

فأثبت أن : ل − م = $\frac{1}{3}$ (س − ص)

٤٥ إذا كان : أ ، ب ، حـ فى تتابع حسابى برهن أن : $\frac{1}{\text{ب حـ}}$ ، $\frac{1}{\text{أ حـ}}$ ، $\frac{1}{\text{أ ب}}$ فى تتابع حسابى أيضًا.

ثالثًا مسائل تقيس مهارات التفكير

١ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) إذا كان الحد الأخير من متتابعة حسابية عشرة أمثال حدها الأول وحدها قبل الأخير يساوى مجموع حديها الرابع والخامس فإن : $\frac{ح_6}{ح_2}$ = ...

(أ) ٣ ء　　(ب) ٢　　(جـ) ٢ ء　　(د) $\frac{5}{2}$

(٢) إذا كان : $ء_1$ هو أساس المتتابعة الحسابية (أ ، $س_1$ ، $س_2$ ، ... ، $س_5$ ، ب)

وكان : $ء_2$ هو أساس المتتابعة الحسابية (أ ، $ص_1$ ، $ص_2$ ، ... ، $ص_7$ ، ب)

فإن : $\frac{ء_1}{ء_2}$ = ...

(أ) $\frac{3}{2}$　　(ب) $\frac{5}{7}$　　(جـ) $\frac{4}{3}$　　(د) $\frac{7}{5}$

(٣) إذا كان : س ، ص ، ع ثلاثة حدود متتالية فى متتابعة حسابية

فإن : (س + ٢ ص − ع) (٢ ص + ع − س) (ع + س − ص) = ...

(أ) $\frac{1}{2}$ س ص ع　　(ب) س ص ع　　(جـ) ٢ س ص ع　　(د) ٤ س ص ع

(٤) إذا كان حجم متوازى المستطيلات يساوى ١٠٥ سم^3 وأبعاده الثلاثة فى تتابع حسابى ومجموع أبعاده يساوى ١٥ سم فإن أكبر أبعاد المتوازى يساوى .... سم.

(أ) ٥　　(ب) ٦　　(جـ) ٧　　(د) ٨

(٥) إذا كان : (أ ، ب ، حـ ، ك ، هـ) متتابعة حسابية فإن : أ − ٤ ب + ٦ حـ − ٤ ك + هـ = ...

(أ) ب + حـ　　(ب) ك − ب　　(جـ) صفر　　(د) ٣

(٦) إذا كانت : $\left(\frac{1}{\text{ب+حـ}} ، \frac{1}{\text{حـ+أ}} ، \frac{1}{\text{أ+ب}}\right)$ متتابعة حسابية فإن أى مما يأتى فى تتابع حسابى أيضًا ؟

(أ) ب^2 ، حـ^2 ، أ^2　　(ب) أ^2 ، ب^2 ، حـ^2

(جـ) حـ^2 ، أ^2 ، ب^2　　(د) ب^2 ، أ^2 ، حـ^2

(٧) متتابعة حسابية حدودها أعداد صحيحة وأساسها ٢ < ء < ٧ إذا كان أحد حدودها يساوى ١١٥ ، وحد آخر فيها يساوى ١٦٦ فإن أساسها = ...

(أ) ٣ (ب) ٤ (جـ) ٥ (د) ٦

(٨) إذا كان : لو$_{٣}$ ٢ ، لو$_{٣}$ (٢^{س} − ٥) ، لو$_{٣}$ $\left(٢^{س} - \frac{٧}{٢}\right)$ فى تتابع حسابى فإن : س = ...

(أ) ٢ (ب) ٣ (جـ) ٤ (د) ٥

(٩) إذا كان : $\frac{أ^{ن+٢} + ب^{ن+٢}}{أ^{ن+١} + ب^{ن+١}}$ وسطًا حسابيًا بين أ ، ب فإن : ن = ...

(أ) −١ (ب) ١ (جـ) −٢ (د) صفر

(١٠) عدد الحدود المشتركة فى المتتابعتين الحسابيتين :

(٣ ، ٧ ، ١١ ، ... ، ٤٠٧) ، (٢ ، ٩ ، ١٦ ، ... ، ٧٠٩) يساوى ....

(أ) ١٤ (ب) ٢١ (جـ) ٢٨ (د) ٣٥

---

٢ (ح$_{ن}$) متتابعة حسابية حيث ح$_{ن}$ ≠ صفر أثبت أن :

(١) $\frac{١}{ح_{١}ح_{٢}} + \frac{١}{ح_{٢}ح_{٣}} + \cdots + \frac{١}{ح_{ن-١}ح_{ن}} = \frac{ن-١}{ح_{١}ح_{ن}}$

(٢) $\frac{١}{\sqrt{ح_{١}} + \sqrt{ح_{٢}}} + \frac{١}{\sqrt{ح_{٢}} + \sqrt{ح_{٣}}} + \cdots + \frac{١}{\sqrt{ح_{ن-١}} + \sqrt{ح_{ن}}} = \frac{ن-١}{\sqrt{ح_{١}} + \sqrt{ح_{ن}}}$

تطبيقات على المتتابعة الحسابية

١ **الربط بالفيزياء :** بدأ كريم فى قيادة دراجته البخارية من أعلى نقطة فى منحدر فقطع فى الثانية الأولى ١٠٠ سم وفى كل ثانية تالية بعد ذلك كان يقطع مسافة تزيد عن المسافة السابقة لها مباشرة بمقدار ١٢٠ سم أوجد المسافة التى يقطعها فى الثانية العاشرة. «١١٨٠ سم»

---

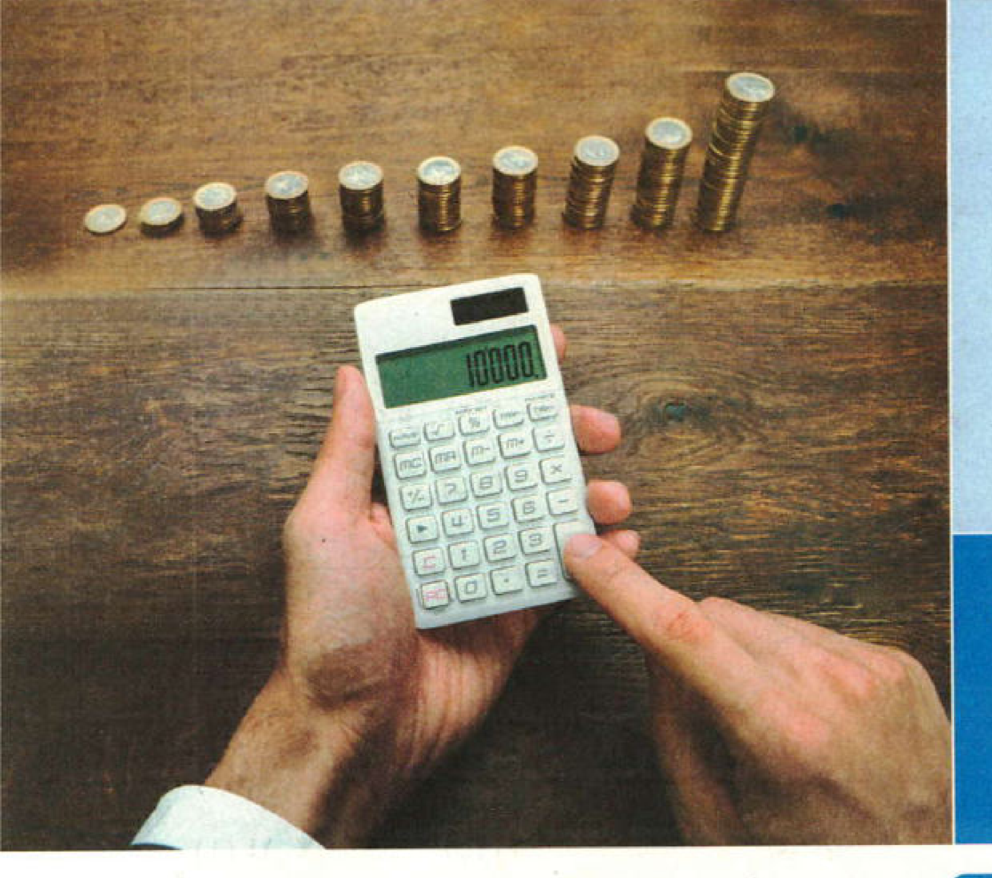
٢ **الربط بالتجارة :** اشترى رجل دراجة بخارية واتفق مع البائع أن يسدد ثمنها على أقساط شهرية تكون متتابعة حسابية حدها النونى هو ١٢٠ ن + ٨٠ ، فإذا كان القسط الأخير هو ١٤٠٠ جنيه. أوجد عدد هذه الأقساط. «١١»

---

٣ **الربط بالهندسة :** أوجد قياس كل من زوايا المثلث الذى قياس إحدى زواياه هو الوسط الحسابى بين قياسى الزاويتين الأخريين والفرق بين قياسى الزاويتين الصغرى والكبرى يساوى ٨٠° «٢٠° ، ٦٠° ، ١٠٠°»

---

٤ **الربط بالهندسة :** أوجد النسبة بين أطوال أضلاع Δ أ ب حـ القائم الزاوية فى ب والذى فيه أ هو الوسط الحسابى بين ب ، حـ «٤ : ٥ : ٣»



الدرس

4

المتسلسلات الحسابية

المتسلسلة الحسابية

* هى المتسلسلة الناتجة من عملية جمع حدود متتابعة حسابية.

أى أنه : لأى متتابعة حسابية (ا ، ا + ء ، ا + ٢ء ، ا + ٣ء ، ...)

حدها الأول = ا وأساسها = ء وحدها العام (النونى) $ح_ن$ = ا + (ن − ١) ء

تسمى المتسلسلة ا + (ا + ء) + (ا + ٢ء) + (ا + ٣ء) + ... متسلسلة حسابية ويكون مجموع ن حدًا من حدود المتتابعة الحسابية = $\sum_{ر=١}^{ن}$ (ا + (ر − ١) ء)

مثال ١

أوجد قيمة : ١ + ٥ + ٩ + ١٣ + ... + ٣٧

الحل

∵ (١ ، ٥ ، ٩ ، ١٣ ، ... ، ٣٧) هى متتابعة حسابية حدها الأول ا = ١

وأساسها ء = ٤

، ∵ الحد العام للمتتابعة $ح_ن$ = ا + (ن − ١) ء = ١ + (ن − ١) × ٤

= ١ + ٤ن − ٤ = ٤ن − ٣

نوجد عدد الحدود بوضع $ح_ن$ = ٣٧ ∴ ٤ن − ٣ = ٣٧

∴ ن = ١٠ ∴ عدد حدود المتتابعة = ١٠ حدود

∴ ١ + ٥ + ٩ + ١٣ + ... + ٣٧ = $\sum_{ر=١}^{١٠}$ (٤ر − ٣) = ٤ $\sum_{ر=١}^{١٠}$ ر − $\sum_{ر=١}^{١٠}$ ٣

= ٤ × $\frac{١٠ \times (١٠ + ١)}{٢}$ − ٣ × ١٠ = ٢٢٠ − ٣٠ = ١٩٠

مثال ٢

أوجد مجموع ١٠ حدود متتالية من المتتابعة $(ح_ن) = (٣ن + ٢)$ بدءًا من حدها الخامس.

الحل

∵ الحد النونى للمتتابعة $ح_ن = ٣ن + ٢$ مقدار جبرى من الدرجة الأولى فى $ن$

∴ المتتابعة حسابية وأساسها $ء = ٣$ ، حدها الأول $ح_١ = ٣(١) + ٢ = ٥$

∴ مجموع ١٠ حدود بدءًا من حدها الخامس $= ح_٥ + ح_٦ + ح_٧ + ... + ح_{١٤}$

$$= \sum_{ر=٥}^{١٤} (٣ر + ٢) = \sum_{ر=١}^{١٤} (٣ر + ٢) - \sum_{ر=١}^{٤} (٣ر + ٢)$$

$$= \left(\sum_{ر=١}^{١٤} ٣ر + \sum_{ر=١}^{١٤} ٢\right) - \left(\sum_{ر=١}^{٤} ٣ر + \sum_{ر=١}^{٤} ٢\right)$$

$$= \left(٣ \times \frac{١٤ \times ١٥}{٢} + ٢ \times ١٤\right) - \left(٣ \times \frac{٤ \times ٥}{٢} + ٢ \times ٤\right)$$

$$= (٣١٥ + ٢٨) - (٣٠ + ٨) = ٣٠٥$$

مجموع المتتابعة الحسابية

١ مجموع المتتابعة الحسابية بمعلومية حدها الأول (أ) وحدها الأخير (ل)

مجموع متتابعة حسابية حدها الأول أ وحدها الأخير ل وعدد حدودها $ن$ هو $جـ_ن = \frac{ن}{٢}(أ + ل)$

استنتاج القانون

نفرض أن المتتابعة هى : (أ ، أ + ء ، أ + ٢ء ، ... ، ل − ٢ء ، ل − ء ، ل)

∴ $جـ_ن = أ + (أ + ء) + (أ + ٢ء) + ... + (ل − ٢ء) + (ل − ء) + ل$ (١)

وبكتابة الطرف الأيسر فى المعادلة (١) معكوسًا

∴ $جـ_ن = ل + (ل − ء) + (ل − ٢ء) + ... + (أ + ٢ء) + (أ + ء) + أ$ (٢)

وبجمع (١) ، (٢) :

∴ $٢ جـ_ن = (أ + ل) + (أ + ل) + (أ + ل) + ... + (أ + ل) + (أ + ل) + (أ + ل) = ن(أ + ل)$

∴ $جـ_ن = \frac{ن}{٢}(أ + ل)$

٢ مجموع $ن$ حدًا الأولى من متتابعة حسابية بمعلومية حدها الأول (أ) وأساسها (ء)

مجموع $ن$ حدًا الأولى من متتابعة حسابية حدها الأول أ ، أساسها ء هو : $جـ_ن = \frac{ن}{٢}[٢أ + (ن − ١)ء]$

استنتاج القانون

∵ ل = أ + (ن − ١) ء (١) ، حـن = $\frac{ن}{٢}$ (أ + ل) (٢)

وبالتعويض من (١) فى (٢) :

∴ حـن = $\frac{ن}{٢}$ [أ + أ + (ن − ١) ء] ∴ حـن = $\frac{ن}{٢}$ [٢ أ + (ن − ١) ء]

ملاحظة

يمكن استنتاج القانون حـن = $\frac{ن}{٢}$ [٢ أ + (ن − ١) ء] باستخدام الرمز $\sum$ كما يلى :

∵ الحد العام (النونى) للمتتابعة الحسابية ح ن = أ + (ن − ١) ء

∴ مجموع ن حدًا الأولى منها حـن = $\sum_{ر=١}^{ن}$ (أ + (ر − ١) ء) = $\sum_{ر=١}^{ن}$ (أ + ء ر − ء)

= $\sum_{ر=١}^{ن}$ ((أ − ء) + ء ر) = $\sum_{ر=١}^{ن}$ (أ − ء) + ء $\sum_{ر=١}^{ن}$ ر

= (أ − ء) ن + ء × $\frac{ن(ن + ١)}{٢}$ = $\frac{ن}{٢}$ [٢ (أ − ء) + ء (ن + ١)]

= $\frac{ن}{٢}$ [٢ أ − ٢ ء + ء ن + ء] = $\frac{ن}{٢}$ [٢ أ + ء ن − ء]

= $\frac{ن}{٢}$ [٢ أ + (ن − ١) ء]

مثال ٣

أوجد مجموع حدود المتتابعة الحسابية التى حدها الأول ٣ وحدها الأخير ٢١ وعدد حدودها ١٠

الحل

أ = ٣ ، ل = ٢١ ، ن = ١٠ ∵ حـن = $\frac{ن}{٢}$ (أ + ل)

∴ حـ١٠ = $\frac{١٠}{٢}$ (٣ + ٢١) = ٥ × ٢٤ = ١٢٠

مثال ٤

فى المتسلسلة الحسابية : (٢٤ + ٢١ + ١٨ + ...) أوجد مجموع ٨ حدود الأولى منها.

الحل

أ = ٢٤ ، ء = ٢١ − ٢٤ = −٣ ، ن = ٨

∵ حـن = $\frac{ن}{٢}$ [٢ أ + (ن − ١) ء]

∴ حـ٨ = $\frac{٨}{٢}$ [٢ × ٢٤ + ٧ × −٣] = ٤ [٤٨ − ٢١] = ٤ × ٢٧ = ١٠٨

ملاحظات

1. لإيجاد المجموع $ح_ن$ يلزم معرفة عدد الحدود $ن$ وإن لم تكن معلومة نوجدها من القانون $ل = ا + (ن - ١) ء$
2. لإيجاد المجموع ابتداءً من حد معين نوجد قيمة هذا الحد ونعوض عنه بدلاً من $ا$ في القانون.
3. $ح_{١٠} - ح_{٩} = ع_{١٠}$ ، $ح_{١٣} - ح_{١٢} = ع_{١٣}$ ، ... وهكذا
   أى أن : $ح_ن - ح_{ن-١} = ع_ن$ لكل $ن > ١$
4. عدد الحدود التي تجعل المجموع أكبر ما يمكن = عدد الحدود (الموجبة أو غير سالبة).
5. عدد الحدود التي تجعل المجموع أصغر ما يمكن = عدد الحدود (السالبة أو غير موجبة).
6. لإيجاد عدد الحدود التي تجعل المجموع موجبًا نضع $ح_ن > ٠$
7. لإيجاد عدد الحدود التي تجعل المجموع سالبًا نضع $ح_ن < ٠$
8. مجموع عدد ($ن$) حدًا من متتابعة حسابية هو دالة من الدرجة الثانية في $ن$

مثال ٥

أوجد مجموع حدود المتتابعة الحسابية (١٣ ، ٢٢ ، ٣١ ، ... ، ١٣٩)

الحل

$ا = ١٣$ ، $ء = ٢٢ - ١٣ = ٩$ ، $ل = ١٣٩$

نوجد عدد الحدود ∵ $ل = ا + (ن - ١) ء$ ∴ $١٣٩ = ١٣ + (ن - ١) × ٩$

∴ $١٢٦ = ٩ (ن - ١)$ ∴ $ن - ١ = ١٤$ ∴ $ن = ١٥$

∵ $ح_ن = \frac{ن}{٢} (ا + ل)$ ∴ $ح_{١٥} = \frac{١٥}{٢} (١٣ + ١٣٩) = ١١٤٠$

مثال ٦

أوجد مجموع الخمسة عشر حدًا الأولى من المتتابعة $(ع_ن) = (٥ ن - ٣)$

الحل

∵ $ع_ن = ٥ ن - ٣$ مقدار من الدرجة الأولى فى $ن$ ∴ المتتابعة حسابية وأساسها = ٥

∴ $ا = ع_١ = ٥ × ١ - ٣ = ٢$ ، $ء = ٥$ ، $ن = ١٥$

∵ $ح_ن = \frac{ن}{٢} [٢ ا + (ن - ١) ء]$

∴ $ح_{١٥} = \frac{١٥}{٢} [٢ × ٢ + ١٤ × ٥] = ٥٥٥$

مثال ٧

أوجد مجموع عشرة حدود من المتتابعة الحسابية (٣ ، ٧ ، ١١ ، ...) ابتداء من الحد الثامن.

الحـــل

$\because$ ح$_{٨}$ = أ + ٧ء = ٣ + ٧ × ٤ = ٣١

$\therefore$ حـ$_{١٠}$ ابتداءً من ح$_{٨}$ = $\frac{١٠}{٢}$ [٢ح$_{٨}$ + ٩ء] = ٥ [٢ × ٣١ + ٩ × ٤] = ٤٩٠

مثال ٨

كم حدًا يلزم أخذه من حدود المتتابعة الحسابية (٣٥ ، ٣٠ ، ٢٥ ، ...) ابتداءً من حدها الأول ليكون مجموعها مساويًا ١٣٥ ؟ ثم علل وجود جوابين.

الحـــل

أ = ٣٥ ، ء = −٥ ، حـ$_{ن}$ = ١٣٥

$\because$ حـ$_{ن}$ = $\frac{ن}{٢}$ [٢أ + (ن − ١)ء]

$\therefore$ ١٣٥ = $\frac{ن}{٢}$ [٢ × ٣٥ + (ن − ١) × −٥]

$\therefore$ ١٣٥ = $\frac{ن}{٢}$ [٧٠ − ٥ن + ٥]

$\therefore$ ٢٧٠ = ن [٧٥ − ٥ن]

$\therefore$ ٢٧٠ = ٧٥ن − ٥ن^{٢}

$\therefore$ ٥ن^{٢} − ٧٥ن + ٢٧٠ = ٠

$\therefore$ ن^{٢} − ١٥ن + ٥٤ = ٠

$\therefore$ (ن − ٩) (ن − ٦) = ٠

$\therefore$ ن = ٦ أ، ن = ٩

أى أن مجموع الستة حدود الأولى = مجموع التسعة حدود الأولى.

وهذا يعنى أن مجموع الحدود ابتداءً من ح$_{٧}$ إلى ح$_{٩}$ = صفر

مثال ٩

أوجد المتتابعة الحسابية التى فيها ح$_{١}$ = ١٢ ، ح$_{ن}$ = ٧٨ ، حـ$_{ن}$ = ١٠٣٥ حيث ن عدد حدودها.

الحـــل

$\because$ ح$_{١}$ = ١٢ $\therefore$ أ = ١٢

، $\because$ ح$_{ن}$ = ٧٨ $\therefore$ ل = ٧٨

، $\because$ حـ$_{ن}$ = ١٠٣٥ $\therefore$ $\frac{ن}{٢}$ [أ + ل] = ١٠٣٥

$\therefore$ $\frac{ن}{٢}$ [١٢ + ٧٨] = ١٠٣٥

$\therefore$ $\frac{ن}{٢}$ × ٩٠ = ١٠٣٥

$\therefore$ ن = ٢٣

$\therefore$ عدد حدود المتتابعة = ٢٣ حدًا.

$\therefore$ ح$_{٢٣}$ = ٧٨

$\therefore$ أ + ٢٢ء = ٧٨

$\therefore$ ١٢ + ٢٢ء = ٧٨

$\therefore$ ٢٢ء = ٦٦

$\therefore$ ء = ٣

$\therefore$ المتتابعة الحسابية هى : (١٢ ، ١٥ ، ١٨ ، ... ، ٧٨)

مثال ١٠

أوجد أكبر مجموع للمتتابعة الحسابية (٤٥ ، ٤١ ، ٣٧ ، ...)

الحـــل

∵ أكبر مجموع للمتتابعة = مجموع الحدود الموجبة فقط

لذلك نوجد عدد الحدود الموجبة بوضع حن > ٠

∴ أ + (ن − ١) ء > ٠ ∴ ٤٥ + (ن − ١) × −٤ > ٠ ∴ ٤٥ − ٤ن + ٤ > ٠

∴ ٤٩ − ٤ن > ٠ ∴ ٤ن < ٤٩ ∴ ن < ١٢ $\frac{١}{٤}$

∴ ن = ١٢ ∴ عدد الحدود الموجبة = ١٢ حدًا.

∴ أكبر مجموع للمتتابعة = جـ١٢ = $\frac{١٢}{٢}$ [٢ × ٤٥ + ١١ × −٤] = ٢٧٦

مثال ١١

أوجد أصغر عدد من الحدود يمكن أخذه من المتتابعة الحسابية (٢٥ ، ٢٢ ، ١٩ ، ...) ابتداءً من الحد الأول ليكون المجموع سالبًا.

الحـــل

أ = ٢٥ ، ء = −٣

لإيجاد أصغر عدد من الحدود يلزم أخذها ليكون المجموع سالبًا نضع جـن < ٠

∴ $\frac{ن}{٢}$ [٢أ + (ن − ١) ء] < ٠ ∴ ٢أ + (ن − ١) ء < ٠

∴ ٢ × ٢٥ + (ن − ١) × −٣ < ٠ ∴ ٥٠ − ٣ن + ٣ < ٠

∴ ٥٣ − ٣ن < ٠ ∴ ٣ن > ٥٣

∴ ن > ١٧ $\frac{٢}{٣}$ ∴ ن = ١٨

∴ أصغر عدد من الحدود يلزم أخذها ابتداءً من الحد الأول ليكون المجموع سالبًا = ١٨ حدًا.

مثال ١٢

متتابعة حسابية مجموع حديها الثانى والثالث = ١٣ ، مجموع العشرين حدًا الأولى منها ٦١٠

أوجد المتتابعة واحسب عدد الحدود التى يلزم أخذها ابتداءً من حدها الأول ليكون مجموعها ١٥٥

الحـــل

∵ ح٢ + ح٣ = ١٣ ∴ (أ + ء) + (أ + ٢ء) = ١٣

∴ ٢أ + ٣ء = ١٣ (١)

، ∵ حـ٢٠ = ٦١٠ ∴ $\frac{٢٠}{٢}$ [٢ أ + ١٩ د] = ٦١٠

∴ ٢ أ + ١٩ د = ٦١ (٢)

وبطرح (١) من (٢) : ∴ ١٦ د = ٤٨ ∴ د = ٣

وبالتعويض فى (١) : ∴ أ = ٢ ∴ المتتابعة هى (٢ ، ٥ ، ٨ ، ...)

∵ حـن = $\frac{ن}{٢}$ [٢ أ + (ن − ١) د] ∴ ١٥٥ = $\frac{ن}{٢}$ [٢ × ٢ + (ن − ١) × ٣]

∴ ١٥٥ × ٢ = ن [٣ ن + ١] ∴ ٣ ن^{٢} + ن − ٣١٠ = ٠

∴ (ن − ١٠) (٣ ن + ٣١) = ٠ ∴ ن = ١٠ أ، ن = $\frac{-٣١}{٣}$ ∉ ص$^{+}$ (مرفوض)

∴ عدد الحدود الذى يجعل المجموع مساويًا ١٥٥ هو ١٠ حدود.

مثال ١٣

أوجد المتتابعة الحسابية التى مجموع الحدود العشرة الأولى منها ١٢٠ ومجموع الحدود الستة التالية لها ١٦٨

الحـــل

∵ حـ١٠ الأولى = ١٢٠ ∴ $\frac{١٠}{٢}$ [٢ أ + ٩ د] = ١٢٠

∴ ٢ أ + ٩ د = ٢٤ (١)

، ∵ حـ١٦ = ١٢٠ + ١٦٨ = ٢٨٨ ∴ $\frac{١٦}{٢}$ [٢ أ + ١٥ د] = ٢٨٨

∴ ٢ أ + ١٥ د = ٣٦ (٢)

وبطرح (١) من (٢) : ∴ ٦ د = ١٢ ∴ د = ٢

وبالتعويض فى (١) : ∴ أ = ٣ ∴ المتتابعة هى (٣ ، ٥ ، ٧ ، ...)

مثال ١٤

أوجد مجموع الأعداد الصحيحة المحصورة بين ١٠ ، ١٠٠ والتى لا تقبل القسمة على ٧

الحـــل

لإيجاد مجموع الأعداد الصحيحة المحصورة بين ١٠ ، ١٠٠ والتى لا تقبل القسمة على ٧ نتبع الآتى :

١ نحسب مجموع جميع الأعداد الصحيحة المحصورة بين ١٠ ، ١٠٠

وهى (١١ ، ١٢ ، ١٣ ، ... ، ٩٩) متتابعة حسابية فيها : أ = ١١ ، د = ١ ، ل = ٩٩

∵ ل = أ + (ن − ١) د ∴ ٩٩ = ١١ + (ن − ١) × ١

∴ ٩٩ = ن + ١٠ ∴ ن = ٨٩

∵ حـن = $\frac{ن}{٢}$ (أ + ل) ∴ حـ٨٩ = $\frac{٨٩}{٢}$ (١١ + ٩٩) = ٤٨٩٥

[٢] نحسب مجموع جميع الأعداد الصحيحة المحصورة بين ١٠ ، ١٠٠ والتى تقبل القسمة

على ٧ وهى (١٤ ، ٢١ ، ٢٨ ، ... ، ٩٨) متتابعة حسابية فيها : أ = ١٤ ، ء = ٧ ، ل = ٩٨

∵ ل = أ + (ن − ١) ء ∴ ٩٨ = ١٤ + (ن − ١) × ٧ ∴ ٩٨ = ٧ + ٧ ن

∴ ن = ١٣ ∴ جـ$_{١٣}$ = $\frac{١٣}{٢}$ (١٤ + ٩٨) = ٧٢٨

، من [١] ، [٢] :

∴ مجموع الأعداد الصحيحة المحصورة بين ١٠ ، ١٠٠

والتى لا تقبل القسمة على ٧ = ٤٨٩٥ − ٧٢٨ = ٤١٦٧

مثال ١٥

إذا كان مجموع ن حدًا الأولى من متتابعة حسابية يعطى بالقانون : جـ$_{ن}$ = ن (٣ ن + ٢)

فأوجد المتتابعة ثم أوجد حدها التاسع.

الحل

∵ جـ$_{ن}$ = ن (٣ ن + ٢)

، بوضع ن = ١ ∴ جـ$_{١}$ = ١ × (٣ × ١ + ٢) = ٥ ∴ ح$_{١}$ = ٥

، بوضع ن = ٢ ∴ جـ$_{٢}$ = ٢ × (٣ × ٢ + ٢) = ١٦

∴ ح$_{١}$ + ح$_{٢}$ = ١٦ ∴ ح$_{٢}$ = ١٦ − ٥ = ١١

، بوضع ن = ٣ ∴ جـ$_{٣}$ = ٣ × (٣ × ٣ + ٢) = ٣٣

∴ ح$_{١}$ + ح$_{٢}$ + ح$_{٣}$ = ٣٣ ولكن ح$_{١}$ + ح$_{٢}$ = ١٦ ∴ ح$_{٣}$ = ٣٣ − ١٦ = ١٧

∴ المتتابعة هى (٥ ، ١١ ، ١٧ ، ...) ∴ ح$_{٩}$ = أ + ٨ ء = ٥ + ٨ × ٦ = ٥٣

حل آخر :

∵ لكل ن > ١ نجد أن : ح$_{ن}$ = جـ$_{ن}$ − جـ$_{ن-١}$ = ن (٣ ن + ٢) − (ن − ١) (٣ (ن − ١) + ٢)

= ٣ ن^{٢} + ٢ ن − (ن − ١) (٣ ن − ٣ + ٢)

= ٣ ن^{٢} + ٢ ن − (ن − ١) (٣ ن − ١)

= ٣ ن^{٢} + ٢ ن − ٣ ن^{٢} + ٤ ن − ١ = ٦ ن − ١

، ∵ جـ$_{١}$ = ٥ ∴ ح$_{١}$ = ٥

∴ المتتابعة هى (ح$_{ن}$) = (٦ ن − ١) = (٥ ، ١١ ، ١٧ ، ...)

، ح$_{٩}$ = جـ$_{٩}$ − جـ$_{٨}$ = ٩ (٣ × ٩ + ٢) − ٨ (٣ × ٨ + ٢) = ٥٣

مثال ١٦

وفر رجل فى نهاية سنة ما مبلغ ٧٥٠٠ جنيه ثم أخذ يزيد ما يوفره فى كل سنة بمقدار ١٥٠٠ جنيه عن السنة السابقة لها. أوجد :

١ مقدار ما يوفره الرجل فى السنة السابعة عشر. ٢ جملة ما يوفره الرجل فى ١٧ عامًا.

الحل

المبالغ التى يوفرها الرجل فى نهاية كل سنة تكون المتتابعة الحسابية

(٧٥٠٠ ، ٩٠٠٠ ، ١٠٥٠٠ ، ...) التى حدها الأول = ٧٥٠٠ وأساسها = ١٥٠٠

١ ما يوفره الرجل فى السنة السابعة عشر = $ح_{١٧}$ من هذه المتتابعة = أ + ١٦ ء

= ٧٥٠٠ + ١٦ × ١٥٠٠ = ٣١٥٠٠ جنيه.

٢ جملة ما يوفره الرجل فى ١٧ عامًا = مجموع ١٧ حدًا الأولى من هذه المتتابعة

= $\frac{ن}{٢}$ (أ + ل) حيث ل = $ح_{١٧}$ = ٣١٥٠٠ جنيه

= $\frac{١٧}{٢}$ (٧٥٠٠ + ٣١٥٠٠) = $\frac{١٧}{٢}$ × ٣٩٠٠٠ = ٣٣١٥٠٠ جنيه.

مثال ١٧

فى مسابقة لإحدى شركات المياه الغازية وضعت ٢٤ زجاجة على خط مستقيم واحد والمسافة بين كل زجاجة وأخرى ٥ أمتار ووضع صندوق مجاور للزجاجة الأولى، فإذا قام متسابق بجمع هذه الزجاجات واحدة تلو الأخرى ثم وضعها فى الصندوق دون تحريكه فأوجد المسافة التى قطعها المتسابق حتى أتم جمع الزجاجات كلها.

الحل



المتسابق يضع الزجاجة الأولى فى الصندوق دون قطع أى مسافة لأنها مجاورة للصندوق ثم يمشى ٥ أمتار حتى يصل إلى الزجاجة الثانية ويعود نفس المسافة ليضعها فى الصندوق ثم يمشى عشرة أمتار حتى يصل إلى الزجاجة الثالثة ويعود نفس المسافة ليضعها فى الصندوق وهكذا ...

مجموع المسافات التى يمشيها = ٢ × ٥ + ٢ × ١٠ + ٢ × ١٥ + ... إلى ٢٣ حدًا

= ٢ (٥ + ١٠ + ١٥ + ... إلى ٢٣ حدًا)

= ٢ × مجموع ٢٣ حدًا من متتابعة حسابية حدها الأول ٥ وأساسها ٥

= ٢ × $\frac{٢٣}{٢}$ [٢ × ٥ + ٢٢ × ٥] = ٢٣ (١٠ + ١١٠)

= ٢٣ × ١٢٠ = ٢٧٦٠ مترًا.

تمارين 4 على المتسلسلات الحسابية

اختبر نفسك

من أسئلة الكتاب المدرسى • فهم • تطبيق • مستويات عليا

أولاً أسئلة الاختيار من متعدد

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) قيمة المتسلسلة الحسابية $\sum_{ر=١}^{٥} (٢ ر + ١)$ تساوى ....

(أ) ٢٥ (ب) ٣٠ (جـ) ٣٥ (د) ٤٠

(٢) قيمة المتسلسلة الحسابية $\sum_{ر=١}^{٢٠} (٣ - ٢ ر)$ تساوى ....

(أ) ٤٠٠ (ب) ‎-٤٠٠ (جـ) ‎-٣٦٠ (د) ٣٨٠

(٣) قيمة المتسلسلة : ٤ + ٩ + ١٤ + ... + (٥ ن - ١) باستخدام رمز التجميع هى ....

(أ) $\sum_{ر=٤}^{ن} (٥ ر - ١)$ (ب) $\sum_{ر=١}^{ن} (٥ ر + ١)$

(جـ) $\sum_{ر=١}^{ن} (٥ ر - ١)$ (د) $\sum_{ر=١}^{٥ن-١} (٣ ر + ١)$

(٤) قيمة المتسلسلة : ٧ + ١٢ + ١٧ + ٢٢ باستخدام رمز التجميع هى ....

(أ) $\sum_{ر=١}^{٤} (٥ ر + ٢)$ (ب) $\sum_{ر=١}^{٤} (٤ ر + ٣)$

(جـ) $\sum_{ر=١}^{٤} (٧ ر + ١)$ (د) $\sum_{ر=١}^{٤} (٣ ر + ٤)$

(٥) مجموع حدود المتتابعة الحسابية (٣ ، ٥ ، ٧ ، ... ، (٢ ن + ١)) ابتداءً من حدها الأول يساوى ....

(أ) ن(ن + ١) (ب) ن(ن + ٢)

(جـ) ن(ن + ٥) (د) ن(ن + ٢) (ن + ٣)

(٦) متتابعة حسابية مجموع حديها الأول والأخير ٤٦ ومجموع حدودها ٣٤٥ فإن عدد حدودها = ...

(أ) ٢٥ (ب) ١٥ (جـ) ٢٣ (د) ٢٢

(٧) متتابعة حسابية حدها الأول = ١٢ ، وحدها الأخير = ‎-٢٦ ومجموع حدودها يساوى ‎-١٤٠ ، فإن المتتابعة هى ....

(أ) (١٢ ، ٨ ، ٤ ، ... ، ‎-٢٦) (ب) (١٢ ، ٩ ، ٦ ، ... ، ‎-٢٦)

(جـ) (١٢ ، ٦ ، ٠ ، ... ، ‎-٢٦) (د) (١٢ ، ١٠ ، ٨ ، ... ، ‎-٢٦)

⑧ مجموع $ن$ حدًا من المتسلسلة : $\sqrt{٢} + \sqrt{٨} + \sqrt{١٨} + \sqrt{٣٢} + \cdots$ يساوى ....

(أ) $\frac{ن(ن+١)}{٢}$ (ب) $٢ ن(ن+١)$ (جـ) $\frac{ن(ن+١)}{\sqrt{٢}}$ (د) ١

⑨ مجموع حدود المتسلسلة الحسابية : ٨٩ + ٨٥ + ٨١ + ... + ٣٣ = ...

(أ) ٩٠٠ (ب) ٩١٠ (جـ) ٨٩٥ (د) ٩١٥

⑩ مجموع حدود المتسلسلة الحسابية : $\frac{١}{٢} + \frac{٣}{٢} + \frac{٥}{٢} + \cdots + \frac{١٣}{٢} =$ ....

(أ) ٢٣,٥ (ب) ٢٤,٥ (جـ) ٢٥ (د) ٢٢,٥

⑪ مجموع حدود المتسلسلة الحسابية : ٢ + ٥ + ٨ + ⋯ + ٦٢ = ...

(أ) ٦٦٤ (ب) ٦٧٠ (جـ) ٦٦٠ (د) ٦٧٢

⑫ مجموع المتسلسلة : $\frac{١}{٢} + \frac{١}{٣} + \frac{١}{٦} + \cdots$ إلى ٩ حدود = ...

(أ) $\frac{-٥}{٦}$ (ب) $-\frac{١}{٢}$ (جـ) ١ (د) $\frac{-٣}{٢}$

⑬ مجموع ٣٠ حدًا الأولى من المتتابعة $(ح_ن)$ حيث $ح_ن = ٢ن + ٣$ هو ....

(أ) ١٠٠٠ (ب) ١٠٢٤ (جـ) ١٠٢٠ (د) ١٠١٠

⑭ مجموع أول ١٠ أعداد زوجية فى مجموعة الأعداد الطبيعية يساوى ....

(أ) ٢٠ (ب) ٤٥ (جـ) ٥٥ (د) ٩٠

⑮ مجموع $ن$ حدًا الأولى من متتابعة الأعداد الطبيعية الفردية هو ....

(أ) $٢ن$ (ب) $ن^٢$ (جـ) $\frac{ن(ن-١)}{٢}$ (د) $\frac{ن(ن+١)}{٢}$

⑯ مجموع الأعداد الطبيعية التى تقبل القسمة على ٣ ومحصورة بين ٣٠ ، ٥٠ يساوى ....

(أ) ٨١ (ب) ٢٤٣ (جـ) ٣٤٣ (د) ٥١٢

⑰ مجموع الأعداد الصحيحة المحصورة بين ١٠٠ ، ١٧٠ والتى لا يقبل كل منها القسمة على ٣ يساوى ....

(أ) ٥١٥٠ (ب) ٧١٢٠ (جـ) ٦١٧٠ (د) ٦٢١٠

⑱ مجموع الأعداد الطبيعية الفردية التى هى أكبر من ١٠ وأقل من ٣٠ يساوى ....

(أ) ١٠٠ (ب) ١٥٠ (جـ) ٢٠٠ (د) ٢٥٠

⑲ مجموع الأعداد الصحيحة من ١ إلى ١٠٠ والتى تقبل القسمة على ٢ أو ٥ يساوى ....

(أ) ٣٠٠٠ (ب) ٣٠١٠ (جـ) ٣١٥٠ (د) ٣٠٥٠

⑳ مجموع كل الأعداد الفردية المكونة من رقمين يساوى ....

(أ) ٢٤٧٥ (ب) ٢٥٣٠ (جـ) ٤٩٠٥ (د) ٥٠٤٩

㉑ إذا كان : $س = ١ + ٣ + ٥ + \cdots (٢ن - ١)$ لكل قيم $ن \in ص^+$ فإن : $س$ تكون ....

(أ) عدد زوجى. (ب) مكعب كامل. (جـ) عدد فردى. (د) مربع كامل.

(٢٢) مجموع ٣٠ حدًا متتالية من المتتابعة (٢ ن – ١) ابتداءً من ح١٠ هو ....

(أ) ١٣٣٥ (ب) ١٧٤٠ (جـ) ١٦٧٥ (د) ١٧٢٠

(٢٣) مجموع الثمانية حدود الأولى من المتتابعة الحسابية التى حدها الرابع ٢ وحدها السابع $\frac{1}{4}$ هو ....

(أ) ١٣ (ب) ١٢$\frac{1}{2}$ (جـ) ١٣$\frac{2}{3}$ (د) ١٣$\frac{1}{2}$

(٢٤) أى المتتابعات الحسابية الآتية مجموع العشرين حدًا الأولى منها ٨٢٠ ؟

(أ) (٢ ، ٦ ، ١٠ ، ...) (ب) (١ ، ٥ ، ٩ ، ...)

(جـ) (٣ ، ٧ ، ١١ ، ...) (د) (٤ ، ٨ ، ١٢ ، ...)

(٢٥) إذا كان مجموع العشرين حدًا الأولى من متتابعة حسابية يساوى ٨٦٠ ومجموع حديها الثالث والرابع يزيد عن حدها السادس بمقدار ٥ فإن المتتابعة هى ....

(أ) (٤ ، ٩ ، ١٤ ، ...) (ب) (٥ ، ٩$\frac{1}{2}$ ، ١٤ ، ...)

(جـ) (٥ ، ٩ ، ١٣ ، ...) (د) (٥ ، ٨ ، ١١ ، ...)

(٢٦) متتابعة حسابية حدها الثانى = ١٣ ، ومجموع العشرة حدود الأولى منها = ٢٣٥ فإن المتتابعة هى ....

(أ) (٨ ، ١٣ ، ١٨ ، ...) (ب) (٩ ، ١٣ ، ١٧ ، ...)

(جـ) (١٢ ، ١٣ ، ١٤ ، ...) (د) (١٠ ، ١٣ ، ١٦ ، ...)

(٢٧) إذا كان : (ح ن) متتابعة حسابية فيها ح ن = ٨١ – ٢ ن فإن : حـ٨٠ الأولى = ...

(أ) صفر (ب) ٨١ (جـ) –٨١ (د) –١٦٢

(٢٨) متتابعة حسابية حدها الأول = ٧ ومجموع ١٠ حدود الأولى منها = ٢٥٠ فإن : ح٢٠ = ...

(أ) ٨٧ (ب) ٨٣ (جـ) ٨٦ (د) ٩١

(٢٩) متتابعة حسابية مكونة من ٢٧ حدًا وحدها الأوسط ٤١ فإن مجموع حدود هذه المتتابعة = ...

(أ) ٥٥٣,٥ (ب) ١١٠٧ (جـ) ٢٢١٤ (د) ٦٨

(٣٠) متتابعة حسابية عدد حدودها ن حدًا حيث ن عدد فردى والحد الأوسط منها = م فإن مجموع المتتابعة = ...

(أ) ٢ م ن (ب) $\frac{1}{2}$ م ن (جـ) م ن (د) م ن٢

(٣١) مجموع الحدود الزوجية الرتبة من حدود المتتابعة الحسابية (٥ ، ٧ ، ٩ ، ... ، ٦٥) هو ....

(أ) ٥٢٠ (ب) ٥٣٠ (جـ) ٥٢٥ (د) ٥٦٠

(٣٢) مجموع النصف الأخير من حدود المتتابعة الحسابية (١٢ ، ٨ ، ٤ ، ... ، –٢٤) يساوى ....

(أ) –٨٥ (ب) –٨٠ (جـ) –٧٥ (د) –٧٠

(٣٣) مجموع الربع الأخير من حدود المتتابعة الحسابية (٧ ، ١١ ، ١٥ ، ... ، ١٦٣) يساوى ....

(أ) ١٥٠٠ (ب) ١٤٢٠ (جـ) ١٤٥٠ (د) ١٤٣٠

(٣٤) أوجد عدد الحدود التى يجب أخذها من المتتابعة الحسابية (١ ، ٣ ، ٥ ، ...) ابتداءً من حدها الأول ليكون مجموع هذه الحدود مساويًا ٤٠٠ هو .... حدًا.

(أ) ١٨ (ب) ٢١ (جـ) ٢٠ (د) ١٩

(٣٥) عدد الحدود اللازم أخذها من المتتابعة (٢٧ ، ٢٤ ، ٢١ ، ...) ابتداءً من الحد الأول ليتلاشى المجموع هو .... حدًا.

(أ) ١٨ (ب) ١٩ (جـ) ٢٠ (د) ٢١

(٣٦) إذا كان مجموع العشرين حدًا الأولى من متتابعة حسابية يساوى ١٩٠ ، مجموع العشرة حدود التالية لها ٣٩٥ فإن : $ح_٨$ = ...

(أ) $-٩\frac{١}{٢}$ (ب) $-٥\frac{١}{٢}$ (جـ) $٢\frac{١}{٢}$ (د) $٤\frac{١}{٢}$

(٣٧) إذا كان $(ح_ن)$ متتابعة حسابية عدد حدودها (ن) فيها $ح_١ = ١٢$ ، $ح_ن = ٧٨$ ، $جـ_ن = ١٠٣٥$ فإن : $ح_٤$ = ...

(أ) ١٥ (ب) ١٨ (جـ) ٢١ (د) ٢٤

(٣٨) فى متتابعة حسابية إذا كان : $ح_٣ = ٥$ ، $ح_{ن-٢} = ٩٥$ وكان مجموع ن حدًا الأولى منها يساوى ١٠٠٠ فإن : ن = ...

(أ) ١٠ (ب) ١٢ (جـ) ١٦ (د) ٢٠

(٣٩) فى المتتابعة الحسابية (١ ، ٣ ، ٥ ، ...) بأى حد تبدأ المجموع ليكون مجموع عشرة حدود متتالية يساوى ٢٠٠ ؟

(أ) $ح_٣$ (ب) $ح_٦$ (جـ) $ح_٩$ (د) $ح_{١١}$

(٤٠) إذا كان $جـ_ن$ هو مجموع ن حدًا الأولى من حدود متتابعة حسابية حدها الأول = أ ، وأساسها = ء فإن : $جـ_ن - ٢ جـ_{ن-١} + جـ_{ن-٢}$ = ...

(أ) ٢ ء (ب) أ (جـ) ء (د) أ + ء

(٤١) أكبر عدد من الحدود يمكن أخذه من المتتابعة $(ح_ن)$ = (٣٢ ، ٢٨ ، ٢٤ ، ...) ابتداءً من الحد الأول ليكون المجموع موجب هو ....

(أ) ١٦ (ب) ١٧ (جـ) ١٨ (د) ٢٠

(٤٢) أكبر مجموع لحدود المتتابعة الحسابية التى فيها $ح_٦ = ١٦$ ، $ح_{١٨} = -٢٠$ هو ....

(أ) ١٧٣ (ب) ١٧٦ (جـ) ١٧٩ (د) ١٨٢

(٤٣) أكبر مجموع لحدود المتتابعة الحسابية (٣٣ ، ٣١ ، ٢٩ ، ...) يساوى ....

(أ) ٢٨٠ (ب) ٢٩٨ (جـ) ٢٩٠ (د) ٢٨٩

(٤٤) أصغر مجموع للمتتابعة الحسابية (-٢٤ ، -٢٠ ، -١٦ ، ...) يساوى ....

(أ) صفر (ب) -٨٦ (جـ) -٨٤ (د) -٨٨

(٤٥) أصغر عدد من الحدود يمكن أخذه من المتتابعة (٨٩ ، ٨١ ، ٧٣ ، ...) ابتداءً من الحد الأول ليكون المجموع سالبًا هو .... حدًا.

(أ) ٢٥ (ب) ٢٤ (جـ) ٢٦ (د) ٢٣

(٤٦) أكبر عدد من الحدود يمكن أخذه من المتتابعة (٢٥ ، ٢١ ، ١٧ ، ...) ابتداءً من الحد الأول ليكون المجموع موجبًا هو .... حدًا.

(أ) ١٢ (ب) ١٤ (جـ) ١٣ (د) ١١

(٤٧) إذا كان مجموع ٤٠ وسط حسابى بين عددين يساوى ١٢٠ فإن مجموع ٥٠ وسط حسابى بين نفس العددين = ...

(أ) ١٣٠ (ب) ١٦٠

(جـ) ١٥٠ (د) لا شئ مما سبق.

(٤٨) عند إدخال ٢٨ وسطًا حسابيًا بين ٤ ، ٩١ فإن مجموع حدود المتتابعة الحسابية الناتجة = ...

(أ) ١٢٢٥ (ب) ١٣١٥ (جـ) ١٤٢٥ (د) ١٥٢٥

(٤٩) عند إدخال ١٦ وسطًا حسابيًا بين أ ، ب ، فإن مجموع حدود المتتابعة المتولدة يساوى ....

(أ) ٨ (أ + ب) (ب) ٩ (أ + ب) (جـ) ١٦ (أ + ب) (د) ١٨ (أ + ب)

(٥٠) عند إدخال «ن» وسطًا حسابيًا بين ٣ ، ٥١ فإن مجموع المتتابعة الحسابية الناتجة يساوى ....

(أ) ٢٧ (ن − ٢) (ب) ٢٧ (ن − ١) (جـ) ٢٧ (ن + ١) (د) ٢٧ (ن + ٢)

(٥١) المتتابعة الحسابية التى مجموع العشرين حدًا الأولى منها = ٨٢٠ والوسط الحسابى لحديها الرابع والسابع = ٢١ هى ....

(أ) (٢ ، ٧ ، ١٢ ، ...) (ب) (٤ ، ٨ ، ١٢ ، ...)

(جـ) (٥ ، ٧ ، ٩ ، ...) (د) (٣ ، ٧ ، ١١ ، ...)

(٥٢) فى المتتابعة الحسابية (٥ ، ٨ ، ١١ ، ...) :

أولًا : مجموع ٢٠ حدًا الأولى منها = ...

(أ) ٦٧٠ (ب) ٨٢٠ (جـ) ٥٢٥ (د) ٦٩٠

ثانيًا : مجموع ١٠ حدود من حدودها ابتداءً من الحد السابع = ...

(أ) ٣٧٥ (ب) ٣٨٥ (جـ) ٣٥٥ (د) ٣٦٥

ثالثًا : مجموع حدود المتتابعة بدءًا من $ح_{١٠}$ إلى $ح_{٢٠}$ = ...

(أ) ٥١٣ (ب) ٥١٠ (جـ) ٥١٧ (د) ٥٢٠

(٥٣) متتابعة حسابية حدها الثانى = ٢٣ ، وحدها قبل الأخير = ٩٧ ومجموع حدودها ٢٤٠٠ فإن :

أولًا : عدد حدود المتتابعة = ... حدًا.

(أ) ٣٨ (ب) ٤٠ (جـ) ٤٢ (د) ٤٣

ثانيًا : المتتابعة هى ....

(أ) (١٩ ، ٢٣ ، ٢٧ ، ... ، ٩٨) (ب) (١٨ ، ٢٣ ، ٢٨ ، ... ، ١٠٨)

(جـ) (٢١ ، ٢٣ ، ٢٥ ، ... ، ٩٩) (د) (٢٠ ، ٢٣ ، ٢٦ ، ... ، ١٠٢)

(٥٤) إذا كان مجموع $ن$ حدًا الأولى من متتابعة حسابية يتعين بالقانون : $حـ_ن = ٢ ن (٧ - ن)$ فإن :

أولًا : $ح_٧ =$ ....

(أ) -١٥ (ب) -١٢ (جـ) -١٤ (د) -١١

ثانيًا : عدد الحدود اللازم أخذها من المتتابعة ابتداءً من الحد الأول حتى يكون المجموع مساويًا -٢٤٠ هو .... حدًا

(أ) ١٥ (ب) ١٧ (جـ) ١٤ (د) ١٢

(٥٥) متتابعة حسابية فيها $حـ_٥ - حـ_٤ = ٢٠$ ، $حـ_٨ - حـ_٧ = ٢٩$ فإن : $ح_{١٥} =$ ....

(أ) ٤٩ (ب) ٩٨ (جـ) ١٥٥ (د) ١٥٨

(٥٦) متتابعة حسابية حدها الأول = ٣ ، وحدها الأخير = ٣٩ ومجموع حدودها = ٢١٠

فإن عدد حدودها = ...

(أ) ٨ (ب) ١٠ (جـ) ١٢ (د) ١٥

(٥٧) متتابعة حسابية مجموع الخمسة حدود الأولى منها = ١٠ ، ومجموع العشرة حدود الأولى منها = ٥

فإن مجموع الخمسة عشرة حدًا الأولى = ...

(أ) ١٥ (ب) -١٥ (جـ) ٥٠ (د) -٥٠

(٥٨) متتابعة حسابية فيها $ح_١ = ١٠$ ، $ح_م = س$ ، $ح_س = م$ وكان : $حـ_ن =$ صفر

فإن : $ن =$ ....

(أ) س + م (ب) س - م (جـ) ٢٠ (د) ٢١

(٥٩) إذا كان مجموع $ن$ حدًا الأولى من متتابعة هو $\frac{ن}{ن + ١}$ فإن : $\frac{١}{ح_٨} =$ ....

(أ) ٦٤ (ب) ٨٠ (جـ) ٧٥ (د) ٧٢

(٦٠) إذا كان : $\frac{٣ + ٥ + ٧ + ... \text{ إلى } ن \text{ حدًا}}{٥ + ٨ + ١١ + ... \text{ إلى } ١٠ \text{ حدود}} = ٧$ فإن : $ن =$ ....

(أ) ٣٥ (ب) ٣٦ (جـ) ٣٧ (د) ٤٠

(٦١) $\frac{٢ + ٦ + ١٠ + ... \text{ إلى } ٧٥ \text{ حدًا من متتابعة حسابية}}{٣ + ٩ + ١٥ + ... + ٢٩٧ \text{ متسلسلة حسابية}} =$ ....

(أ) $\frac{٣}{٤}$ (ب) $\frac{٤}{٣}$ (جـ) $\frac{٢}{٣}$ (د) $\frac{٣}{٢}$

(٦٢) $\frac{١ + ٣ + ٥ + ... \text{ إلى } ن \text{ حدًا من متتابعة حسابية}}{٢ + ٤ + ٦ + ... + \text{ إلى } ن \text{ حدًا من متتابعة حسابية}} =$ ....

(أ) $\frac{٢ن}{ن + ١}$ (ب) $\frac{ن + ١}{٢}$ (جـ) $\frac{ن}{ن + ١}$ (د) $\frac{ن + ١}{ن + ٢}$

(٦٣) متتابعة حسابية فيها $ح_٤ = ٢٤$ ، النسبة بين مجموع الخمسة حدود الأولى منها إلى مجموع الخمسة حدود التالية لها كنسبة ١ : ٢ ، فإن هذه المتتابعة هي ....

(أ) (١٨ ، ٢٠ ، ٢٢ ، ...) (ب) (١٥ ، ١٨ ، ٢١ ، ...)
(جـ) (١٢ ، ١٦ ، ٢٠ ، ...) (د) (٩ ، ١٤ ، ١٩ ، ...)

(٦٤) ما عدد الدقات التى تدقها ساعة الحائط فى اليوم إذا علم أنها تدق مرة واحدة عند الساعة الواحدة ثم مرتين عند الساعة الثانية وهكذا ؟

(أ) ١٥٦ (ب) ١٣٢ (جـ) ١٢٠ (د) ٧٨

(٦٥) إذا كان $ح_{ن}$ هو مجموع $ن$ حدًا الأولى من متتابعة حسابية وكان : $ح_{١} = ٦$ ، $ح_{٧} = ١٠٥$

فإن : $\frac{ح_{ن}}{ح_{ن-٢}}$ = ... لكل $ن > ٣$

(أ) $\frac{ن}{ن-٣}$ (ب) $\frac{ن+٣}{ن}$ (جـ) $\frac{ن+٣}{ن-٣}$ (د) $\frac{ن}{ن+٣}$

(٦٦) إذا كان : $\sum_{ر=١}^{ن} ١ + \sum_{ر=١}^{ن} ٢ + \sum_{ر=١}^{ن} ٣ + \cdots + \sum_{ر=١}^{ن} ٢٠ = ١٠٥٠$ فإن : $ن$ = ...

(أ) ٢ (ب) ٣ (جـ) ٤ (د) ٥

(٦٧) إذا كانت : (٠ ، ١ ، ٢ ، ٣ ، ...) متتابعة حسابية حيث $ح_{م}$ مجموع أول م حدًا من الحدود الفردية الرتبة ، $ح_{ن}$ مجموع أول $ن$ حدًا من الحدود الزوجية الرتبة فإن : $\frac{ح_{م}}{ح_{ن}}$ = ...

(أ) $\frac{م^{٢} - ١}{ن^{٢}}$ (ب) $\frac{م^{٢} - م}{ن^{٢}}$ (جـ) $\frac{م(م+١)}{ن^{٢} - ١}$ (د) $\frac{م^{٢} - م}{ن^{٢} + ن}$

(٦٨) عدد حدود متتابعة حسابية (٢ $ن$ + ١) فإن النسبة بين مجموع الحدود الفردية الرتبة إلى مجموع الحدود الزوجية الرتبة هى ....

(أ) $\frac{ن}{ن+١}$ (ب) $\frac{ن+١}{ن}$ (جـ) $\frac{ن^{٢}}{ن+١}$ (د) $\frac{ن+١}{٢ن}$

(٦٩) فى متتابعة حسابية مكونة من ٩٩ حد ، مجموع الحدود الفردية الرتبة يساوى ٢٥٥٠ ، وعلى ذلك يكون مجموع جميع حدودها يساوى ....

(أ) ٥٠٤٩ (ب) ٥٠٥٠ (جـ) ٥١٠٠ (د) ٥٤٠٩

(٧٠) متتابعة حسابية مكونة من ٥١ حدًا ، مجموع الحدود الفردية الرتبة : مجموع حدود المتتابعة = ...

(أ) ٥٠ : ٥١ (ب) ٢٥ : ٢٦ (جـ) ٢٥ : ٥١ (د) ٢٦ : ٥١

(٧١) إذا أخطأ طالب فى حساب أساس متتابعة حسابية (معلوم حدها الأول) فكان −٢ بدلًا من ٢ فوجد أن مجموع الخمسة حدود الأولى من المتتابعة −٥ فإن المجموع الصحيح للخمسة حدود الأولى = ...

(أ) ٢٥ (ب) −٢٥ (جـ) −٣٥ (د) ٣٥

(٧٢) إذا كان : $ح = \sum_{ر=١}^{ن} (٢ر + ١)$ ، $م = \sum_{ر=١}^{ن} (٣ر)$ حيث $ن > ١$ فإن : ....

(أ) ح > م (ب) ح < م

(جـ) ح = م (د) لا يمكن المقارنة بينهما.

(٧٣) فى أحد المسارح تم تنظيم المقاعد بحيث يحتوى الصف الأخير على ٤٥ مقعد ثم ينقص كل صف تالى بمقدار ٢ مقعد عن الصف السابق ، فإذا كان عدد مقاعد المسرح ٥٢٠ مقعد فإن عدد الصفوف = ...

(أ) ٢٠ (ب) ٢٦ (جـ) ٢٠ أ ، ٢٦ (د) ٢٣

(٧٤) طريق مستقيم طوله ١١٠ كم. بدأت سيارتان الحركة معًا من نهايتيه فى اتجاهين متضادين فإذا قطعت إحداها فى الساعة الأولى ٨ كم ثم قطعت فى كل ساعة تالية مسافة تقل $\frac{1}{2}$ كم عن الساعة السابقة لها وقطعت السيارة الأخرى خلال الساعة الأولى ٤ كم ثم قطعت فى كل ساعة تالية مسافة تزيد ١ كم عن الساعة السابقة لها ، فإن الزمن اللازم لتقابل السيارتان هو .... ساعة.

(أ) ٥ (ب) ٨ (جـ) ١٠ (د) ١٢

ثانيًا الأسئلة المقالية

١ (١) مجموع حدود المتتابعة الحسابية (٢ ، ٥ ، ٨ ، ... ، ٨٠) «١١٠٧»

(٢) مجموع الأعداد الصحيحة المحصورة بين ٣ ، ١٠٠٠ وكل منها يقبل القسمة على ٧ «٧١٠٧١»

(٣) مجموع الحدود الفردية الرتبة من حدود المتتابعة الحسابية (٢ ، ٥ ، ٨ ، ... ، ١١٠) «١٠٦٤»

(٤) مجموع النصف الأخير من حدود المتتابعة الحسابية (٨ ، ١١ ، ١٤ ، ... ، ٧١) «٦١٦»

(٥) مجموع الثلث الأخير من حدود المتتابعة الحسابية (٢٥ ، ٢١ ، ١٧ ، ... ، -١٢٧) «-١٣٣٩»

٢ كم حدًا يلزم أخذه من المتتابعة الحسابية (٤٠ ، ٣٦ ، ٣٢ ، ...) ابتداءً من حدها الأول ليكون مجموعها ٢٠٨ ؟ فسر معنى الجوابين. «٨ أ ، ١٣»

٣ فى المتتابعة الحسابية (-١١٥ ، -١٠٩ ، -١٠٣ ، ...) أوجد :

(١) رتبة أول حد موجب.

(٢) أقل عدد من حدودها ابتداءً من الحد الأول يعطى مجموعًا موجبًا. «٢١ ، ٤٠»

٤ أوجد رتبة أول حد سالب من حدود المتتابعة (١٥٢ - ٩ ن) ، ثم أوجد أكبر مجموع يمكن الحصول عليه من حدود هذه المتتابعة. «١٧ ، ١٢٠٨»

٥ أوجد المتتابعة الحسابية التى فيها :

(١) ح١ = ٢٣ ، حن = ٨٦ ، جن = ٥٤٥ «(٢٣ ، ٣٠ ، ٣٧ ، ... ، ٨٦)»

(٢) ح١ = ١٧ ، حن = -٩٥ ، جن = -٥٨٥ «(١٧ ، ٩ ، ١ ، ... ، -٩٥)»

٦ أدخل ١٧ وسطًا حسابيًا بين ٤٢ ، -١٢ ثم أوجد رتبة أول حد سالب ومجموع حدود المتتابعة. «١٦ ، ٢٨٥»

٧ أوجد المتتابعة الحسابية التى مجموع حديها الثالث والخامس ٢٢ وينقص حدها الرابع عن حدها السابع بمقدار ٩ ثم أوجد مجموع ٢٥ حدًا الأولى منها. «(٢ ، ٥ ، ٨ ، ...) ، ٩٥٠»

٨ متتابعة حسابية مجموع حديها الأول والأخير ٢٦ ، ومجموع حدودها ٤٦٨ ، أوجد عدد حدودها وإذا كان حدها العاشر يساوى ٤٧ فأوجد المتتابعة. «٣٦ ، (٨٣ ، ٧٩ ، ٧٥ ، ...)»

٩ متتابعة حسابية فيها $ح_١ + ح_٢ = ٢٢٢$ ومجموع العشرة حدود الأولى منها ١٠٣٠
أوجد المتتابعة ثم أوجد أقل عدد من الحدود يلزم أخذه ابتداءً من الحد الأول ليكون المجموع سالبًا.
«(١١٢ ، ١١٠ ، ١٠٨ ، ...) ، ١١٤»

---

١٠ متتابعة حسابية حدها الأول ٢٩ وحدها الثانى يساوى خمسة أمثال حدها السابع .
أوجد المتتابعة ثم أوجد عدد الحدود التى يجب أخذها بدءًا من حدها الأول
حتى يكون المجموع أكبر ما يمكن.
«(٢٩ ، ٢٥ ، ٢١ ، ...) ، ٨»

---

١١ متتابعة حسابية حدها العشرون يساوى ٤١ ، ويزيد مجموع حديها الثالث والسادس عن حدها التاسع بمقدار الوحدة. أوجد المتتابعة وعدد الحدود اللازم أخذها منها ابتداءً من الحد الأول ليكون المجموع ٤٤٠
«(٣ ، ٥ ، ٧ ، ...) ، ٢٠»

---

١٢ متتابعة حسابية حدها الأول يزيد عن ضعف حدها الخامس بمقدار ٢ والوسط الحسابى لحديها الثالث والسادس يساوى ١٦ ، فما هى المتتابعة ؟ وكم حدًا يلزم أخذها ابتداءً من الحد الأول ليكون المجموع مساويًا الصفر ؟
«(٣٠ ، ٢٦ ، ٢٢ ، ...) ، ١٦»

---

١٣ متتابعة حسابية حدودها موجبة ، مجموع الثلاثة حدود الأولى منها يساوى ٣٠ ، وحاصل ضرب حديها الثالث والرابع يساوى ٣٠٠ ، أوجد هذه المتتابعة ، ثم أوجد مجموع الخمسة عشر حدًا الأولى منها.
«(٥ ، ١٠ ، ١٥ ، ...) ، ٦٠٠»

---

١٤ إذا كان مجموع الأحد عشر حدًا الأولى من متتابعة حسابية ٣٠٨ وحاصل ضرب حديها الثانى والسادس ٢٢٤ أوجد المتتابعة.
«(٣ ، ٨ ، ١٣ ، ...)»

---

١٥ مجموع الحدين الثالث والخامس من متتابعة حسابية تزايدية يساوى ٢٤ ومربع حدها السادس يساوى ٣٢٤ أوجد المتتابعة ، ثم أوجد مجموع العشرين حدًا الأولى منها.
«(٣ ، ٦ ، ٩ ، ...) ، ٦٣٠»

---

١٦ متتابعة حسابية فيها $ح_{٣٦} = ٠$ ، إذا كان مجموع $ن$ حدًا الأولى منها = ضعف مجموع الخمسة حدود الأولى منها ، أوجد قيمة $ن$
«١١ أ، ٦٠»

---

١٧ إذا أدخل $ن$ وسطًا حسابيًا بين ١ ، ٣١ وكانت نسبة الوسط السابع إلى الوسط الأخير كنسبة $\frac{١٥}{٢٩}$ فما عدد الأوساط ؟ وما مجموع المتتابعة ؟
«١٤ ، ٢٥٦»

---

١٨ متتابعة حسابية مجموع السبعة حدود الأولى منها = ٢٤٥ ومجموع السبعة حدود التالية لها = ٩٨
أوجد المتتابعة.
«(٤٤ ، ٤١ ، ٣٨ ، ...)»

---

١٩ متتابعة حسابية أساسها ٢ ومجموع $ن$ من حدودها الأولى ٣٢٠ ، مجموع ٢ $ن$ من حدودها الأولى ١١٥٢ أوجد المتتابعة وأوجد عدد الحدود اللازم أخذها ابتداءً من الحد الأول ليكون المجموع ٧٢٥ «(٥ ، ٧ ، ٩ ، ...) ، ٢٥»

---

٢٠ كم حدًا يلزم أخذه ابتداءً من الحد الأول للمتتابعة $(ح_ن) = (٤ ن + ٢)$ حتى يكون مجموع الثلث الأخير منها مساويًا أربعة أمثال مجموع الثلث الأول ؟
«١٨»

٢١ متتابعة حسابية مكونة من ٣٣ حدًا ، مجموع الأحد عشر حدًا الأولى منها يساوى ٢٦٤ ومجموع الأحد عشر حدًا الأخيرة منها يساوى ٣٣٠ ، أوجد مجموع حدود المتتابعة ثم أوجد مجموع الخمسة حدود الوسطى منها.
«٨٩١ ، ١٣٥»

---

٢٢ اكتشف الخطأ :

(١) لإيجاد أكبر مجموع للمتتابعة الحسابية نوجد عدد حدودها الموجبة وذلك بوضع $ح_ن > ٠$ لإيجاد قيمة $ن$ ، ومن ثم نوجد أكبر مجموع.

(٢) لإيجاد أصغر مجموع للمتتابعة الحسابية نوجد عدد حدودها السالبة وذلك بوضع $ح_ن < ٠$ لإيجاد قيمة $ن$ ومن ثم نوجد أصغر مجموع.

(٣) لإيجاد عدد حدود المتتابعة الحسابية الذى يتلاشى عنده المجموع نضع $ح_ن = ٠$
فيكون $أ + (ن - ١) ء = ٠$ [حيث $ن \neq ٠$] ومن ذلك نوجد عدد الحدود.

(٤) إذا كان مجموع $ن$ حدًا الأولى من حدود متتابعة حسابية يعطى بالعلاقة $ح_ن = \frac{ن}{٢} (٣ ن + ٥)$
فإن : $ع_ن = ح_{ن+١} - ح_ن$

ثالثًا مسائل تقيس مهارات التفكير

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) إذا أُدخلت $ن$ من الأوساط الحسابية بين عددين $أ$ ، $ب$ فإن مجموع هذه الأوساط يساوى ....

(أ) $\frac{أ + ب}{٢}$ (ب) $ن \left(\frac{أ + ب}{٢}\right)$ (جـ) $ن (أ - ب)$ (د) $\frac{ن}{٢} (ب - أ)$

(٢) إذا كانت $(ع_ن)$ متتابعة حسابية فيها : $ع_١ + ع_٥ + ع_{١٠} + ع_{١٦} = ٦٤$
فإن مجموع ١٥ حدًا الأولى = ...

(أ) ١٢٠ (ب) ١٨٠ (جـ) ٢٤٠ (د) ٣٦٠

(٣) إذا كان : $ح_ن = ح_م$ فى متتابعة حسابية حيث $ن \neq م$ فإن : $ح_{ن+م} =$ ....

(أ) $م + ن$ (ب) $-(م + ن)$ (جـ) صفر (د) $م^٢ + ن^٢$

(٤) إذا كانت قياسات الزوايا الداخلة للمضلع فى تتابع حسابى وكان قياس أصغر زاوية فيه = ١٢٠° وكان أساس المتتابعة = ٥° فإن عدد أضلاع المضلع = ...

(أ) ٣ أو ٩ (ب) ٤ أو ١٦ (جـ) ٣ أو ٤ (د) ٩ أو ١٦

(٥) متتابعة حسابية فيها $\frac{ح_م}{ح_ن} = \frac{م^٢}{ن^٢}$ حيث $م \neq ن$ فإن : $\frac{ع_م}{ع_ن} =$ ....

(أ) $\frac{م - ١}{ن - ١}$ (ب) $\frac{ن - ١}{م - ١}$ (جـ) $\frac{٢م - ١}{٢ن - ١}$ (د) $\frac{٢ن - ١}{٢م - ١}$

(٦) إذا كانت $(ع_ن)$ متتابعة حسابية فإن المقدار :
$(ع_١^٢ - ع_٢^٢ + ع_٣^٢ - ع_٤^٢ + ع_٥^٢ - ع_٦^٢ + \dots + ع_{٢ن-١}^٢ - ع_{٢ن}^٢)$ يساوى ....

(أ) $-ن ح_{٢ن}$ (ب) $-ء ح_{٢ن}$ (جـ) $ح_{٢ن} - ح_ن$ (د) $ح_{٢ن}^٢ - ح_ن^٢$

(٧) إذا كان $ح_ن$ مجموع ن حدًا الأولى من متتابعة حسابية وكان : $ح_{٢ن} = ٣ ح_ن$

فإن : $ح_{٣ن} : ح_ن =$ ....

(أ) ٤ (ب) ٦ (جـ) ٨ (د) ١٠

(٨) $ع_{٩٩}$ من حدود المتسلسلة ٢ + ٧ + ١٤ + ٢٣ + ٣٤ + ... هو ....

(أ) ٩٩٩٩ (ب) ٩٩٩٨

(جـ) ١٠٠٠٠ (د) لا شيء مما سبق.

(٩) إذا كانت (لو س ، لو س ص ، لو س $ص^٢$ ، ...) متتابعة حسابية وكان س = ١٦٠ ، ص = $\frac{١}{٢}$

فإن : $ح_٩ =$ ....

(أ) ٩ (ب) ٩ لو ٢٥ (جـ) ٢٥ لو ١٠ (د) ١٨ لو ١٦

(١٠) إذا كانت $ع_١ = ٥$ في المتتابعة $(ع_ن)$ حيث $ع_ن - ع_{ن-١} = ٢ن + ٣$ لكل $ن \geq ٢$ ،

فإن : $ع_{٥٠} =$ ....

(أ) ٢٧٠٠ (ب) ٢٧٠٢ (جـ) ٢٧٠٤ (د) ٢٧٠٦

تطبيقات عملية على المتتابعة الحسابية

(١) مسرح به ٢٥ صفًا من الكراسى ، يحتوى الصف الأول على ٢٠ كرسيًا ، ويحتوى الصف الثانى على ٢٢ كرسيًا ويحتوى الصف الثالث على ٢٤ كرسيًا وهكذا ، أوجد عدد الكراسى فى جميع صفوف المسرح.

«١١٠٠ كرسى»

---

(٢) ادخار : يدخر زياد من عمله اليومى ١٥ جنيهًا ، فإذا كان يدخر فى كل يوم مبلغًا يزيد بمقدار جنيهين عن اليوم السابق له مباشرة. فأوجد مجموع ما يدخره خلال ١٥ يومًا.

«٤٣٥ جنيهًا»

---

(٣) الربط بالتجارة : اقترض رجل مبلغًا من المال ، واتفق على أن يقوم بسداده على ١٠ أقساط ، يبدأ القسط الأول بمبلغ ٥٠٠ جنيه ، وكل قسط تالٍ يزيد عن القسط السابق له مباشرة بـ ٢٠٠ جنيه ، فما قيمة القرض ؟

«١٤٠٠٠ جنيه»

---

(٤) شخص مدين بمبلغ ٤٨٠٠٠ جنيه قرر أن يسدد دينه على عشرين قسطًا سنويًا تكون متتابعة حسابية وبعد أن دفع ٥ أقساط توفى وعليه $\frac{٤}{٥}$ الدين فكم كان مقدار القسط الأول ؟

«١٧٩٢ جنيهًا»

---

(٥) فى إحدى المسابقات المدرسية وضعت ٢١ ثمرة على خط مستقيم واحد والمسافة بين كل ثمرة وأخرى متران ووضع صندوق مجاور للثمرة الأولى فإذا قام متسابق بجمع هذه الثمار واحدة تلو الأخرى ثم وضعها فى الصندوق دون تحريك الصندوق فأوجد المسافة التى قطعها المتسابق حتى أتم جمع الثمار كلها. «٨٤٠ مترًا»

٦ **الربط بالرياضة :** يستعد كريم لسباق المسافات الطويلة ، فقرر أن يتدرب على الجرى مسافة ٤ كيلومترات فى اليوم الأول ثم يقوم بزيادة المسافة بمقدار نصف كيلومتر واحد يوميًا.

(١) أوجد المسافة التى يقطعها كريم فى اليوم السابع.

(٢) أوجد مجموع المسافات التى يقطعها كريم فى الأسبوع الأول (الأسبوع سبعة أيام).

(٣) إذا استمر كريم فى التدريب على هذا النمط دون انقطاع فما عدد الأيام التى يقطع خلالها مسافة ٨١ كيلومترًا ؟ «٧ كم ، $\frac{1}{2}$٣٨ كم ، ١٢ يومًا»

---

٧ **الربط بالفيزياء :** سقط جسم من ارتفاع ٤٩٠ مترًا تحت تأثير الجاذبية الأرضية ، وبفرض إهمال مقاومة الهواء فإنه يقطع مسافة ٤,٩ أمتار فى الثانية الأولى ، ١٤,٧ متر فى الثانية الثانية ، ٢٤,٥ متر فى الثانية الثالثة وهكذا ، أوجد :

(١) المسافة التى يقطعها الجسم فى الثانية السادسة.

(٢) مجموع المسافات المقطوعة فى الثوانى الثمان الأولى.

(٣) متى يصل الجسم إلى سطح الأرض. «٥٣,٩ م ، ٣١٣,٦ م ، ١٠ ث»

---

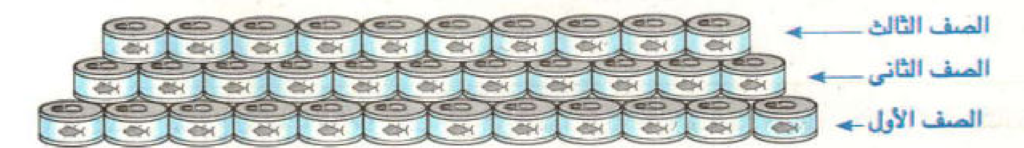
٨ يودع رجل مبلغًا ثابتًا فى بداية كل شهر فى بنك يعطى فائدة بسيطة قدرها ١٠٪ فى السنة وفى نهاية العام حسب له البنك الفوائد فكانت ١١٧ جنيهًا فكم المبلغ الذى كان يودعه الرجل شهريًا ؟ «١٨٠ جنيهًا»

---

٩ اشترى رجل شقة تمليك بمبلغ ١٦٤٠٠٠ جنيه ودفع من ثمنها فورًا ٦٨٠٠٠ جنيه واتفق مع البائع على أن يدفع له باقى الثمن على أقساط شهرية تكون متتابعة حسابية حدها النونى يساوى ٤٠٠ ن + ٦٠٠
أوجد عدد الأقساط. «٢٠»

---

١٠ يمتلك كريم محلًا تجاريًا للسلع الغذائية ويقوم بترتيب علب التونة فى صفوف بحيث يضع فى الصف السفلى ١٢ علبة والصف الذى يليه ١١ علبة والصف الذى يليه ١٠ علب وهكذا



(١) أوجد عدد علب التونة فى الصف السابع.

(٢) فى أى صف تكون علب التونة ٣ علب ؟

(٣) أوجد عدد علب التونة بدءًا من الصف الأول وحتى الصف الأخير الذى يحتوى على علبة واحدة. «٦ ، ١٠ ، ٧٨»



الدرس 5

المتتابعة الهندسية

تعريف

تسمى المتتابعة $(ح_ن)$ حيث $ح_ن \neq ٠$ متتابعة هندسية إذا كان : $\frac{ح_{ن+١}}{ح_ن}$ = (مقدارًا ثابتًا) لكل $ن \in ص^+$

وهذا المقدار الثابت يسمى أساس المتتابعة الهندسية ويرمز له بالرمز ر

أى أن : ر (أساس المتتابعة الهندسية) = $\frac{\text{أى حد فيها}}{\text{الحد السابق له مباشرة}}$

مثال ١

بين أى المتتابعات الآتية تكون متتابعة هندسية وأوجد أساسها :

١ $(ح_ن) = (٢ \times ٥^{ن-١})$ ٢ $(ح_ن) = (٣ن^٢)$ ٣ $(ح_ن) = (\text{لو } ٣ + ن \text{ لو } ٢)$

الحل

١ $\because ح_ن = ٢ \times ٥^{ن-١}$ ، $ح_{ن+١} = ٢ \times ٥^{(ن+١)-١} = ٢ \times ٥^ن$

$\therefore \frac{ح_{ن+١}}{ح_ن} = \frac{٢ \times ٥^ن}{٢ \times ٥^{ن-١}} = ٥$ = مقدار ثابت.

$\therefore (ح_ن) = (٢ \times ٥^{ن-١})$ متتابعة هندسية أساسها ر = ٥

٢ $\because ح_ن = ٣ن^٢$ ، $ح_{ن+١} = ٣(ن+١)^٢$

$\therefore \frac{ح_{ن+١}}{ح_ن} = \frac{٣(ن+١)^٢}{٣ن^٢} = \left(\frac{ن+١}{ن}\right)^٢ \neq$ مقدار ثابت.

$\therefore (ح_ن) = (٣ن^٢)$ ليست متتابعة هندسية.

٣ ∵ $ح_ن$ = لو ٣ + ن لو ٢ = لو ٣ + لو $٢^ن$ = لو (٣ × $٢^ن$)

∴ $ح_{ن+١}$ = لو (٣ × $٢^{ن+١}$) ∴ $\frac{ح_{ن+١}}{ح_ن} = \frac{لو (٣ × ٢^{ن+١})}{لو (٣ × ٢^ن)}$ ≠ مقدار ثابت.

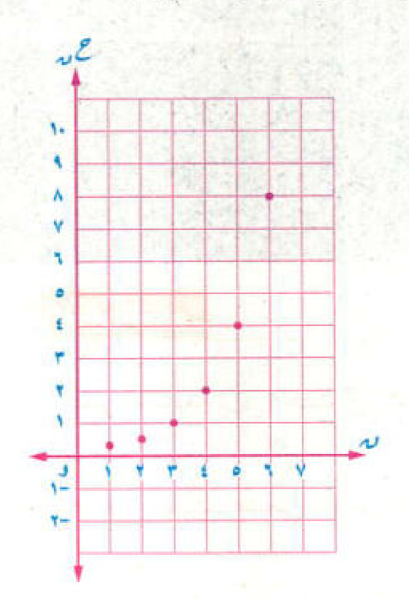
∴ ($ح_ن$) = (لو ٣ + ن لو ٢) ليست متتابعة هندسية.

التمثيل البيانى للمتتابعة الهندسية

مثال ٢

أثبت أن المتتابعة : ($ح_ن$) = ($\frac{١}{٨}$ × $٢^ن$) متتابعة هندسية ثم أوجد الستة حدود الأولى منها ومثلها بيانيًا.

الحل



∵ $\frac{ح_{ن+١}}{ح_ن} = \frac{\frac{١}{٨} × ٢^{ن+١}}{\frac{١}{٨} × ٢^ن} = ٢^{ن+١-ن} = ٢$ = مقدار ثابت.

∴ المتتابعة ($ح_ن$) = ($\frac{١}{٨}$ × $٢^ن$) متتابعة هندسية وأساسها ر = ٢

، ∵ $ح_١ = \frac{١}{٨} × ٢ = \frac{١}{٤}$ ، $ح_٢ = \frac{١}{٨} × ٢^٢ = \frac{١}{٢}$

، $ح_٣ = \frac{١}{٨} × ٢^٣ = ١$ ، $ح_٤ = \frac{١}{٨} × ٢^٤ = ٢$

، $ح_٥ = \frac{١}{٨} × ٢^٥ = ٤$ ، $ح_٦ = \frac{١}{٨} × ٢^٦ = ٨$

∴ الحدود الستة الأولى من المتتابعة الهندسية يمثلها بيانيًا النقط :

(١ ، $\frac{١}{٤}$) ، (٢ ، $\frac{١}{٢}$) ، (٣ ، ١) ، (٤ ، ٢) ، (٥ ، ٤) ، (٦ ، ٨)

وهى نقط لا تقع على استقامة واحدة كما فى المتتابعة الحسابية.

لاحظ أنه :

يمكن إيجاد كل حد من حدود المتتابعة بدءًا من حدها الثانى بضرب أساس المتتابعة ر فى الحد السابق له مباشرة ففى المثال السابق : $ح_١ = \frac{١}{٤}$ ، ر = ٢

∴ $ح_٢ = \frac{١}{٤} × ٢ = \frac{١}{٢}$ ، $ح_٣ = \frac{١}{٢} × ٢ = ١$ ، $ح_٤ = ١ × ٢ = ٢$ وهكذا ...

ملاحظات

المتتابعة الهندسية التى حدها الأول = أ وأساسها = ر حيث ر ≠ ٠ تكون :

١ تزايدية إذا كان : ر > ١ ، أ > ٠ أو ٠ > ر > ١ ، أ > ٠

فمثلًا : • إذا كان : أ = ٣ ، ر = ٢

فإن المتتابعة الهندسية (٣ ، ٦ ، ١٢ ، ٢٤ ، ...) تزايدية.

• إذا كان : أ = -٦ ، ر = $\frac{١}{٣}$

فإن المتتابعة الهندسية (-٦ ، -٢ ، $\frac{-٢}{٣}$ ، $\frac{-٢}{٩}$ ، ...) تزايدية.

٢ تناقصية إذا كان : ٠ < ر < ١ ، أ > ٠ أو ر > ١ ، أ < ٠

فمثلًا : • إذا كان : أ = ٢ ، ر = $\frac{١}{٢}$

فإن المتتابعة الهندسية (٢ ، ١ ، $\frac{١}{٢}$ ، $\frac{١}{٤}$ ، ...) تناقصية.

• إذا كان : أ = −٢ ، ر = ٣

فإن المتتابعة الهندسية (−٢ ، −٦ ، −١٨ ، −٥٤ ، ...) تناقصية.

٣ متناوبة الإشارة (تذبذبية) إذا كان : ر < ٠

فمثلًا : إذا كان : أ = ٣ ، ر = −٢

فإن المتتابعة الهندسية (٣ ، −٦ ، ١٢ ، −٢٤ ، ...) متناوبة الإشارة.

٤ ثابتة إذا كان : ر = ١

فمثلًا : إذا كان : أ = ٥ ، ر = ١ فإن المتتابعة (٥ ، ٥ ، ٥ ، ٥ ، ...) ثابتة.

الحد العام (النونى) للمتتابعة الهندسية

إذا كانت ($ح_ن$) متتابعة هندسية حدها الأول = أ ، أساسها = ر

فإن حدها العام يكون على الصورة $ح_ن = أ ر^{ن-١}$ حيث ن رتبة الحد.

الصورة العامة للمتتابعة الهندسية

بوضع ن = ١ ، ٢ ، ٣ ، ... فى القانون السابق نحصل على الصورة العامة للمتتابعة الهندسية

وهى : (أ ، أ ر ، أ $ر^٢$ ، أ $ر^٣$ ، ...)

حيث نلاحظ أن : $ح_١$ = أ ، $ح_٢$ = أ ر ، $ح_٣$ = أ $ر^٢$ ، ...

أى أن : أس ر فى أى حد من حدود المتتابعة الهندسية يقل بمقدار الواحد الصحيح عن رتبة هذا الحد (أى ترتيبه)

ملاحظة

إذا كانت المتتابعة الهندسية منتهية وعدد حدودها = ن

فإنه يرمز لحدها الأخير بالرمز ل حيث $ل = أ ر^{ن-١}$ حيث ن عدد الحدود

وتكون الصورة العامة للمتتابعة الهندسية فى هذه الحالة على الصورة :

(أ ، أ ر ، أ $ر^٢$ ، ... ، أ $ر^{ن-١}$) أ، (أ ، أ ر ، أ $ر^٢$ ، ... ، $\frac{ل}{ر^٢}$ ، $\frac{ل}{ر}$ ، ل)

مثال ٣

أوجد $ح_{٦}$ ، $ح_{١٠}$ من المتتابعة الهندسية (٦ ، ١٢ ، ٢٤ ، ...)

الحل

$أ = ٦$ ، $ر = \frac{١٢}{٦} = ٢$ ∴ $ح_{٦} = أ ر^{٥} = ٦ \times ٢^{٥} = ١٩٢$ ، $ح_{١٠} = أ ر^{٩} = ٦ \times ٢^{٩} = ٣٠٧٢$

مثال ٤

إذا كان $\frac{١}{٢٤٣}$ هو أحد حدود المتتابعة الهندسية (٢٧ ، ٩ ، ٣ ، ...) فما رتبة هذا الحد ؟

الحل

$أ = ٢٧$ ، $ر = \frac{٩}{٢٧} = \frac{١}{٣}$

∵ $ح_{ن} = أ ر^{ن-١}$ ∴ $\frac{١}{٢٤٣} = ٢٧ \left(\frac{١}{٣}\right)^{ن-١}$ ∴ $\frac{١}{٢٧} \times \frac{١}{٢٤٣} = \left(\frac{١}{٣}\right)^{ن-١}$

∴ $\frac{١}{٣^{٣}} \times \frac{١}{٣^{٥}} = \left(\frac{١}{٣}\right)^{ن-١}$ ∴ $\left(\frac{١}{٣}\right)^{٨} = \left(\frac{١}{٣}\right)^{ن-١}$ ∴ $ن - ١ = ٨$

∴ $ن = ٩$ ∴ الحد الذى قيمته $\frac{١}{٢٤٣}$ هو $ح_{٩}$

تعيين المتتابعة الهندسية

تتعين المتتابعة الهندسية متى علم حدها الأول (أ) وأساسها (ر)

مثال ٥

متتابعة هندسية حدها الثالث يساوى ١٢ وحدها الثامن يساوى ٣٨٤ أوجد المتتابعة.

الحل

∵ $ح_{٣} = ١٢$ ∴ $أ ر^{٢} = ١٢$ (١)

، ∵ $ح_{٨} = ٣٨٤$ ∴ $أ ر^{٧} = ٣٨٤$ (٢)

وبقسمة (٢) على (١) : ∴ $\frac{أ ر^{٧}}{أ ر^{٢}} = \frac{٣٨٤}{١٢}$

∴ $ر^{٥} = ٣٢$ ∴ $ر^{٥} = ٢^{٥}$

∴ ر = ٢ ، وبالتعويض فى (١) : ∴ أ = ٣ ∴ المتتابعة هى (٣ ، ٦ ، ١٢ ، ...)

لاحظ أن :

إذا كان : $ح_{س}$ ، $ح_{ص}$ حدين فى متتابعة هندسية فإن : $ر^{س-ص} = \frac{ح_{س}}{ح_{ص}}$

تذكر أن :



١ فرق بين مربعين : $١ - ر^{٢} = (١ - ر)(١ + ر)$

٢ فرق بين مكعبين : $١ - ر^{٣} = (١ - ر)(١ + ر + ر^{٢})$

٣ مجموع المكعبين : $١ + ر^{٣} = (١ + ر)(١ - ر + ر^{٢})$

٤ $١ + ر^{٢} + ر^{٤} = (١ - ر + ر^{٢})(١ + ر + ر^{٢})$

مثال ٦

متتابعة هندسية مجموع حديها الأول والثانى ٧٢ ومجموع حديها الثالث والرابع ٨ ، أوجد المتتابعة.

الحــل

∵ $ح_١ + ح_٢ = ٧٢$ ∴ $أ + أ ر = ٧٢$ ∴ $أ (١ + ر) = ٧٢$ (١)

، $ح_٣ + ح_٤ = ٨$ ∴ $أ ر^٢ + أ ر^٣ = ٨$ ∴ $أ ر^٢ (١ + ر) = ٨$ (٢)

بقسمة (٢) على (١) : ∴ $\frac{أ ر^٢ (١ + ر)}{أ (١ + ر)} = \frac{٨}{٧٢}$ ∴ $ر^٢ = \frac{١}{٩}$ ∴ $ر = \pm \frac{١}{٣}$

بالتعويض فى (١) عن $ر = \frac{١}{٣}$: ∴ $أ \left(١ + \frac{١}{٣}\right) = ٧٢$ ∴ $أ = ٥٤$

وبالتعويض فى (١) عن $ر = -\frac{١}{٣}$: ∴ $أ \left(١ - \frac{١}{٣}\right) = ٧٢$ ∴ $أ = ١٠٨$

∴ المتتابعة هى (٥٤ ، ١٨ ، ٦ ، ...) أ، (١٠٨ ، −٣٦ ، ١٢ ، ...)

مثال ٧

متتابعة هندسية حدودها موجبة ، حدها الخامس يزيد عن حدها الرابع بمقدار ٢٧ ، حدها الرابع يزيد عن حدها الثانى بمقدار ٣٠ ، أوجد هذه المتتابعة.

الحــل

∵ $ح_٥ - ح_٤ = ٢٧$ ∴ $أ ر^٤ - أ ر^٣ = ٢٧$ ∴ $أ ر^٣ (ر - ١) = ٢٧$ (١)

، $ح_٤ - ح_٢ = ٣٠$ ∴ $أ ر^٣ - أ ر = ٣٠$ ∴ $أ ر (ر^٢ - ١) = ٣٠$

∴ $أ ر (ر - ١) (ر + ١) = ٣٠$ (٢)

وبقسمة (١) على (٢) : ∴ $\frac{أ ر^٣ (ر - ١)}{أ ر (ر - ١) (ر + ١)} = \frac{٢٧}{٣٠}$ ∴ $\frac{ر^٢}{(ر + ١)} = \frac{٩}{١٠}$

∴ $١٠ ر^٢ = ٩ ر + ٩$ ∴ $١٠ ر^٢ - ٩ ر - ٩ = ٠$

∴ $(٢ ر - ٣) (٥ ر + ٣) = ٠$ ∴ $ر = \frac{٣}{٢}$ أ، $ر = \frac{-٣}{٥}$ (مرفوض)

وبالتعويض فى (١) عن $ر = \frac{٣}{٢}$: ∴ $أ \times \frac{٢٧}{٨} \left(\frac{٣}{٢} - ١\right) = ٢٧$

∴ $أ = ١٦$ ∴ المتتابعة هى : (١٦ ، ٢٤ ، ٣٦ ، ...)

مثال ٨

متتابعة هندسية مجموع حدها الخامس وضعف حدها السادس يساوى عشرة أمثال حدها الرابع ، حدها الثالث = ٤٠ ، أوجد المتتابعة.

الحــل

∵ $ح_٥ + ٢ ح_٦ = ١٠ ح_٤$ ∴ $أ ر^٤ + ٢ أ ر^٥ = ١٠ أ ر^٣$ وبقسمة الطرفين على $أ ر^٣$

∴ $ر + ٢ ر^٢ = ١٠$ ∴ $٢ ر^٢ + ر - ١٠ = ٠$ ∴ $(٢ ر + ٥) (ر - ٢) = ٠$

∴ $ر = -\frac{٥}{٢}$ أ، $ر = ٢$ ، ∵ $ح_٣ = ٤٠$ ∴ $أ ر^٢ = ٤٠$

وبالتعويض عن ر = $\frac{-٥}{٢}$: ∴ أ × $\frac{٢٥}{٤}$ = ٤٠ ∴ أ = $\frac{٣٢}{٥}$

∴ المتتابعة هى ($\frac{٣٢}{٥}$ ، -١٦ ، ٤٠ ، ...)

، وبالتعويض عن ر = ٢ : ∴ أ × ٤ = ٤٠ ∴ أ = ١٠

∴ المتتابعة هى (١٠ ، ٢٠ ، ٤٠ ، ...)

مثال ٩

موظف راتبه الشهرى ١٢٠٠ جنيه ويحصل على علاوة سنوية ثابتة بنسبة ٦ ٪ زيادة عن راتب السنة السابقة مباشرة فكم يكون راتبه بالجنيه بعد مرور ٦ سنوات ؟

الحل

بعد مرور ١ سنة يكون المرتب = ١٢٠٠ + ١٢٠٠ × ٦ ٪ = ١٢٠٠ (١ + ٠,٠٦) = ١٢٠٠ × (١,٠٦)

بعد مرور ٢ سنة يكون المرتب = ١٢٠٠ × (١,٠٦) + ١٢٠٠ × (١,٠٦) × ٦ ٪ = ١٢٠٠ (١,٠٦) [١ + ٦ ٪]

= ١٢٠٠ $(١,٠٦)^٢$

∴ المرتبات بعد الزيادة تكون متتابعة هندسية هى

(١٢٠٠ × (١,٠٦) ، ١٢٠٠ × $(١,٠٦)^٢$ ، ...)

أى أ = ١٢٠٠ × ١,٠٦

، ر = ١ + ٦٪ = ١ + ٠,٠٦ = ١,٠٦

∴ المرتب بعد مرور ٦ سنوات

= $ح_٦$ (من المتتابعة السابقة) = أ $ر^٥$

= ١٢٠٠ × (١,٠٦) × $(١,٠٦)^٥$

= ١٢٠٠ × $(١,٠٦)^٦$ ≃ ١٧٠٢ جنيه

ملاحظتان

١ المتتابعة الهندسية فى الحل الأول هى متتابعة المرتبات بعد الزيادة فيكون المرتب بعد مرور ن سنة هو $ح_ن$ = أ $ر^{ن-١}$ حيث أ هو المرتب بعد أول زيادة.

٢ المتتابعة الهندسية فى الحل الثانى هى متتابعة تشمل المرتب الأصلى والمرتبات بعد الزيادة فيكون المرتب بعد مرور ن سنة هو $ح_{ن+١}$ = أ $ر^ن$ حيث أ هو المرتب قبل أى زيادة.

حل آخر : المرتب الأصلى والمرتبات بعد الزيادة تكون متتابعة هندسية

هى (١٢٠٠ ، ١٢٠٠ × ١,٠٦ ، ١٢٠٠ × $(١,٠٦)^٢$ ، ...)

أى أ = ١٢٠٠ ، ر = ١,٠٦

ويكون المرتب بعد مرور ٦ سنوات = $ح_٧$ (من المتتابعة السابقة) = أ $ر^٦$ = ١٢٠٠ × $(١,٠٦)^٦$ ≃ ١٧٠٢ جنيه.

الأوساط الهندسية

تعريف

إذا كانت : أ ، ب ، حـ ثلاثة حدود متتالية من متتابعة هندسية فإن ب هى الوسط الهندسى بين أ ، حـ

ويكون : $\frac{ب}{أ} = \frac{حـ}{ب}$ ومنها $ب^2 = أ حـ$ ∴ $ب = \pm \sqrt{أ حـ}$

أى أن الوسط الهندسى لكميتين لهما نفس الإشارة (موجبتين معًا أو سالبتين معًا) هو الجذر التربيعى لحاصل ضربهما.

فمثلًا :

- الوسط الهندسى للكميتين ٢ ، ٣٢ = $\pm \sqrt{٢ \times ٣٢} = \pm \sqrt{٦٤} = \pm ٨$
- الوسط الهندسى للكميتين $أ^3 ب$ ، $أ ب^3$ = $\pm \sqrt{أ^3 ب \times أ ب^3} = \pm \sqrt{أ^4 ب^4} = \pm أ^2 ب^2$
- لا يوجد وسط هندسى للعددين −٤ ، ٩ لأنهما مختلفان فى الإشارة.

ملاحظة (الوسط الهندسى لعدة كميات)

يعرف الوسط الهندسى لعدة كميات موجبة عددها (ن) بأنه الجذر النونى الموجب لحاصل ضرب هذه الكميات جميعًا.

فمثلًا : الوسط الهندسى للكميات الموجبة أ ، ب ، حـ = $\sqrt[3]{أ ب حـ}$

والوسط الهندسى للأعداد الستة ٢ ، ٤ ، ٦ ، ٩ ، ٣٦ ، ٣ = $\sqrt[6]{٢ \times ٤ \times ٦ \times ٩ \times ٣٦ \times ٣} = \sqrt[6]{٤٦٦٥٦} = ٦$

مثال ١٠

عددان موجبان وسطهما الحسابى = ٥٠ ، وسطهما الهندسى = ٤٠ ، أوجد العددين.

الحل

نفرض أن العددين هما : س ، ص

∵ الوسط الحسابى = ٥٠ ∴ $\frac{س + ص}{٢} = ٥٠$

∴ س + ص = ١٠٠ ∴ ص = ١٠٠ − س (١)

، ∵ الوسط الهندسى = ٤٠ ∴ $\sqrt{س ص} = ٤٠$

∴ س ص = ١٦٠٠ (٢)

وبالتعويض من (١) فى (٢) :

∴ س (١٠٠ − س) = ١٦٠٠ ∴ $س^2 - ١٠٠ س + ١٦٠٠ = ٠$

∴ (س − ٢٠) (س − ٨٠) = ٠ ∴ س = ٢٠ أ، س = ٨٠

ص = ٨٠ أ، ص = ٢٠ ∴ العددان هما : ٢٠ ، ٨٠

مثال (١١)

إذا علم أن : ؍ - ٢ ، ؍ - ١ ، ٣ ؍ - ٥ ثلاثة حدود متتالية من متتابعة هندسية فما قيمة ؍ ؟

الحـــل

∵ ؍ - ٢ ، ؍ - ١ ، ٣ ؍ - ٥ حدود متتالية فى متتابعة هندسية.

∴ ؍ - ١ وسط هندسى بين ؍ - ٢ ، ٣ ؍ - ٥ ∴ $(؍ - ١)^{٢} = (؍ - ٢)\ (٣ ؍ - ٥)$

∴ $؍^{٢} - ٢ ؍ + ١ = ٣ ؍^{٢} - ١١ ؍ + ١٠$ ∴ $٢ ؍^{٢} - ٩ ؍ + ٩ = ٠$

∴ $(٢ ؍ - ٣)\ (؍ - ٣) = ٠$ ∴ ؍ = ٣ أ، ؍ = $\frac{٣}{٢}$

العلاقة بين الوسط الحسابى والوسط الهندسى لعددين

الوسط الحسابى لعددين حقيقيين موجبين مختلفين أكبر من وسطهما الهندسى.

الإثبات : نفرض أن العددين هما ؍ ، ب وأن ع وسطهما الحسابى ، هـ وسطهما الهندسى الموجب

∴ $ع = \frac{؍ + ب}{٢}$ ، $هـ = \sqrt{؍ ب}$

∴ $ع - هـ = \frac{؍ + ب}{٢} - \sqrt{؍ ب} = \frac{؍ + ب - ٢\sqrt{؍ ب}}{٢} = \frac{؍ - ٢\sqrt{؍ ب} + ب}{٢} = \frac{(\sqrt{؍} - \sqrt{ب})^{٢}}{٢} > ٠$ (موجب)

∴ ع > هـ وحيث إن الوسط الهندسى الموجب أكبر من الوسط الهندسى السالب.

∴ الوسط الحسابى لعددين حقيقيين موجبين مختلفين أكبر من وسطهما الهندسى. (وهو المطلوب)

ملاحظة

بفرض ؍ ، ب ، حـ ثلاثة أعداد حقيقية موجبة :

١ إذا كانت ؍ ، ب ، حـ ثلاثة حدود متتالية فى متتابعة حسابية فإن الوسط الحسابى بين ؍ ، حـ هو ب ، والوسط الهندسى بين ؍ ، حـ هو $\sqrt{؍ حـ}$ وحسب النظرية السابقة يكون $ب > \sqrt{؍ حـ}$

٢ إذا كانت ؍ ، ب ، حـ ثلاثة حدود متتالية فى متتابعة هندسية فإن الوسط الحسابى بين ؍ ، حـ هو $\frac{؍ + حـ}{٢}$ ، والوسط الهندسى بين ؍ ، حـ هو ب وحسب النظرية السابقة يكون $\frac{؍ + حـ}{٢} > ب$

٣ لأى عددين حقيقيين موجبين متساويين يكون الوسط الحسابى للعددين مساويًا لوسطهما الهندسى الموجب.

أى أنه : إذا كان : ؍ = ب فإن : $\frac{؍ + ب}{٢} = \sqrt{؍ ب}$

مثال ⑫

إذا كانت أ ، ب ، حـ ، ء أربع كميات موجبة متتالية من متتابعة هندسية فأثبت أن :

① أ + ء > ب + حـ   ② أ ب + أ ء + ء حـ > ٣ ب حـ

الحل

ب وسط هندسى بين أ ، حـ والوسط الحسابى بين أ ، حـ هو $\frac{أ + حـ}{٢}$

∴ $\frac{أ + حـ}{٢}$ > ب   ∴ أ + حـ > ٢ ب   (١)

، حـ وسط هندسى بين ب ، ء والوسط الحسابى بين ب ، ء هو $\frac{ب + ء}{٢}$

∴ $\frac{ب + ء}{٢}$ > حـ   ∴ ب + ء > ٢ حـ   (٢)

وبجمع (١) ، (٢) ∴ أ + حـ + ب + ء > ٢ ب + ٢ حـ   ∴ أ + ء > ب + حـ   (المطلوب أولًا)

وبضرب (١) فى (٢) ∴ (أ + حـ) (ب + ء) > ٢ ب × ٢ حـ

∴ أ ب + أ ء + ب حـ + حـ ء > ٤ ب حـ

∴ أ ب + أ ء + ء حـ > ٣ ب حـ   (المطلوب ثانيًا)

إدخال عدد محدود من الأوساط الهندسية بين كميتين معلومتين

إذا كانت أ ، ب كميتين معلومتين وأدخلنا بينهما ن وسطًا هندسيًا فإننا نحصل على متتابعة هندسية حدها الأول أ وعدد حدودها ن + ٢ وحدها الأخير ب

مثال ⑬

أدخل ٣ أوساط هندسية بين ٢ ، ٣٢

الحل

∵ عدد الأوساط = ٣   ∴ عدد حدود المتتابعة = ٣ + ٢ = ٥ حدود

∴ أ = ٢ ، ح$_٥$ = ٣٢   ∵ ح$_٥$ = أ ر^٤ ∴ ٣٢ = ٢ ر^٤

∴ ر^٤ = ١٦   ∴ ر = ± ٢

- عندما ر = ٢   ∴ الأوساط هى : ٤ ، ٨ ، ١٦
- عندما ر = −٢   ∴ الأوساط هى : −٤ ، ٨ ، −١٦

لاحظ أن :
عند إدخال ن وسط هندسى بين العددين أ ، ب
فإن : ر$^{ن+١}$ = $\frac{ب}{أ}$

مثال ١٤

إذا أدخلت أربعة أوساط هندسية بين عددين وكان مجموع الوسطين الأول والرابع يساوى ٩٠ ومجموع الوسطين الثانى والثالث يساوى ٦٠ فما هما العددان ؟

الحل

∵ عدد الأوساط = ٤ ∴ عدد حدود المتتابعة = ٤ + ٢ = ٦ حدود.

وبفرض أن العدد الأول = أ ∴ الوسطين الأول والرابع هما $ح_٢$ ، $ح_٥$

∴ $ح_٢ + ح_٥ = ٩٠$ ∴ أ ر + أ $ر^٤$ = ٩٠

∴ أ ر (١ + $ر^٣$) = ٩٠ (١)

، ∵ الوسطين الثانى والثالث هما $ح_٣$ ، $ح_٤$ ∴ أ $ر^٢$ + أ $ر^٣$ = ٦٠

∴ أ $ر^٢$ (١ + ر) = ٦٠ (٢)

بقسمة (١) على (٢) : ∴ $\frac{(١ + ر)(١ - ر + ر^٢)}{ر (١ + ر)} = \frac{٣}{٢}$ ∴ ٢ $ر^٢$ − ٢ ر + ٢ = ٣ ر

∴ ٢ $ر^٢$ − ٥ ر + ٢ = ٠ ∴ (ر − ٢) (٢ ر − ١) = ٠

∴ ر = ٢ أ، ر = $\frac{١}{٢}$

- وبالتعويض فى (٢) عن ر = ٢ : ∴ أ = ٥ والعددان هما أ ، أ $ر^٥$ أى ٥ ، ١٦٠
- وبالتعويض فى (٢) عن ر = $\frac{١}{٢}$: ∴ $\frac{٣}{٨}$ أ = ٦٠ ∴ أ = ١٦٠ والعددان هما أ ، أ $ر^٥$ أى ١٦٠ ، ٥

مثال ١٥

ثلاثة أعداد فى تتابع حسابى مجموعها ١٥ وإذا طرح من أولها واحد ومن ثانيها واحد وأضيف لثالثها واحد كونت ثلاثة حدود متتالية من متتابعة هندسية ، أوجد الأعداد الثلاثة.

الحل

نفرض أن الأعداد الثلاثة هى أ − ى ، أ ، أ + ى

، ∵ مجموعها = ١٥ ∴ (أ − ى) + أ + (أ + ى) = ١٥

∴ ٣ أ = ١٥ ∴ أ = ٥

∴ الأعداد الثلاثة هى : (٥ − ى) ، ٥ ، (٥ + ى) (١)

∴ الأعداد ٥ − ى − ١ ، ٥ − ١ ، ٥ + ى + ١ فى تتابع هندسى

أى ٤ − ى ، ٤ ، ٦ + ى فى تتابع هندسى ∴ ٤ وسط هندسى بين ٤ − ى ، ٦ + ى

∴ $(٤)^٢$ = (٤ − ى) (٦ + ى) ∴ ١٦ = ٢٤ − ٢ ى − $ى^٢$

∴ $ى^٢$ + ٢ ى − ٨ = ٠ ∴ (ى + ٤) (ى − ٢) = ٠ ∴ ى = ٢ أ، ى = −٤

- وبالتعويض فى (١) عن ى = ٢ ∴ الأعداد الثلاثة هى : ٣ ، ٥ ، ٧
- وبالتعويض فى (١) عن ى = −٤ ∴ الأعداد الثلاثة هى : ٩ ، ٥ ، ١

مثال ١٦

ثلاثة أعداد فى تتابع هندسى مجموعها ٢١ وإذا أضيف لثانيها $١\frac{١}{٢}$ كانت النواتج فى تتابع حسابى.
أوجد الأعداد الثلاثة الأصلية.

الحل

نفرض أن الأعداد الثلاثة هى : $أ$ ، $أ ر$ ، $أ ر^{٢}$

∵ مجموعها = ٢١ ∴ $أ + أ ر + أ ر^{٢} = ٢١$ ∴ $أ (١ + ر + ر^{٢}) = ٢١$ (١)

، $أ$ ، $أ ر + \frac{٣}{٢}$ ، $أ ر^{٢}$ فى تتابع حسابى.

∴ $أ ر + \frac{٣}{٢}$ وسط حسابى بين $أ$ ، $أ ر^{٢}$ ∴ $(أ ر + \frac{٣}{٢}) \times ٢ = أ + أ ر^{٢}$

∴ $٢ أ ر + ٣ = أ + أ ر^{٢}$ ∴ $أ ر^{٢} - ٢ أ ر + أ = ٣$

∴ $أ (ر^{٢} - ٢ ر + ١) = ٣$ (٢)

بقسمة (١) على (٢) ∴ $\frac{١ + ر + ر^{٢}}{ر^{٢} - ٢ ر + ١} = ٧$ ∴ $٧ ر^{٢} - ١٤ ر + ٧ = ١ + ر + ر^{٢}$

∴ $٦ ر^{٢} - ١٥ ر + ٦ = ٠$ ∴ $٢ ر^{٢} - ٥ ر + ٢ = ٠$

∴ $(ر - ٢)(٢ ر - ١) = ٠$ ∴ $ر = ٢$ أو $\frac{١}{٢}$

- بالتعويض فى (١) عن $ر = ٢$ ∴ $٧ أ = ٢١$ أى $أ = ٣$

وتكون الأعداد هى : ٣ ، ٦ ، ١٢

- وبالتعويض فى (١) عن $ر = \frac{١}{٢}$ ∴ $\frac{٧}{٤} أ = ٢١$ أى $أ = ١٢$

وتكون الأعداد هى : ١٢ ، ٦ ، ٣

ملاحظتان

* إذا كان : ($أ$ ، $ب$ ، $حـ$ ، ...) متتابعة هندسية أساسها ($ر$) ، ($س$ ، $ص$ ، $ع$ ، ...) متتابعة هندسية أساسها ($م$) فإن :

١ ($أ س$ ، $ب ص$ ، $حـ ع$ ، ...) تكون متتابعة هندسية أساسها ($ر م$)

٢ ($أ ك$ ، $ب ك$ ، $حـ ك$ ، ...) تكون متتابعة هندسية أساسها ($ر$) حيث $ك \neq ٠$

٣ ($\frac{أ}{ك}$ ، $\frac{ب}{ك}$ ، $\frac{حـ}{ك}$ ، ...) تكون متتابعة هندسية أساسها ($ر$) حيث $ك \neq ٠$

٤ ($أ^{ك}$ ، $ب^{ك}$ ، $حـ^{ك}$ ، ...) تكون متتابعة هندسية أساسها ($ر^{ك}$)

* إذا كان : ($ح_{١}$ ، $ح_{٢}$ ، $ح_{٣}$ ، ... ، $ح_{ن-١}$ ، $ح_{ن}$) متتابعة هندسية
فإن : $ح_{١} ح_{ن} = ح_{٢} ح_{ن-١} = ح_{٣} ح_{ن-٢} = ...$ وهكذا ...

تمارين 5 على المتتابعة الهندسية

اختبر نفسك

من أسئلة الكتاب المدرسى • فهم • تطبيق • مستويات عليا

أولاً أسئلة الاختيار من متعدد

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

تمارين على تعريف المتتابعة الهندسية وحدها العام وتعيين المتتابعة الهندسية

(١) الحد الخامس من المتتابعة $(ح_ن)$ حيث $ح_ن = ٢ \times (٣)^{ن-١}$ يساوى ....

(أ) ٨١ (ب) ١٦٢ (جـ) ٣٢٤ (د) ٢٤٣

(٢) الحد الرابع فى المتتابعة الهندسية ($\sqrt[4]{٣}$ ، $\sqrt[8]{٣}$ ، ١ ، ...) هو ....

(أ) $\sqrt[16]{٣}$ (ب) $\frac{١}{\sqrt[4]{٣}}$ (جـ) $\frac{١}{\sqrt[8]{٣}}$ (د) $\sqrt[32]{٣}$

(٣) فى المتتابعة الهندسية $(ح_ن)$ = (−٢٥٦٠ ، ١٢٨٠ ، ... ، −١٠) فإن الحد الرابع من النهاية = ...

(أ) ٤٠ (ب) −٤٠ (جـ) ٨٠ (د) −٨٠

(٤) أى مما يأتى يكون متتابعة هندسية ؟

(أ) (٢ ، ٥ ، ٨ ، ١١ ، ...) (ب) (٣ ، ٣٣ ، ٣ ، ٣٣ ، ...)

(جـ) (٥ ، −٥ ، ٥ ، −٥ ، ...) (د) (١ ، ٤ ، ٨ ، ١٦ ، ٣٢ ، ...)

(٥) جميع المتتابعات الآتية هندسية ما عدا المتتابعة ....

(أ) (٣ ، −٦ ، ١٢ ، −٢٤ ، ...) (ب) (لو$ا$ ، لو$ا^٢$ ، لو$ا^٣$ ، لو$ا^٤$ ، ...)

(جـ) $(\frac{٣}{٢} ، ١ ، \frac{٢}{٣} ، \frac{٤}{٩})$ (د) $(\frac{٣ب}{٢ا} ، ٣ ، \frac{٦ا}{ب} ، \frac{١٢ا^٢}{ب^٢})$

(٦) المتتابعة الهندسية من بين المتتابعات الآتية هى ....

(أ) $(ح_ن) = (٤ن^٢)$ لكل $ن \geq ١$

(ب) $(ح_ن)$ = حيث $ح_ن = \frac{١}{٤} ح_{ن-١}$ لكل $ن \geq ٢$ ، $ح_١ = ١$

(جـ) $(ح_ن) = (٢^ن - ١)$ لكل $ن \geq ١$

(د) $(ح_ن)$ = (لو (٣×٢^ن)) لكل $ن \geq ١$

(٧) متتابعة هندسية أساسها = $\frac{١}{٢}$ وحدها الثالث ٢٤ فإن المتتابعة هى ....

(أ) (٤٨ ، ٢٤ ، ١٢ ، ...) (ب) (٦ ، ١٢ ، ٢٤ ، ...)

(جـ) (٩٦ ، ٤٨ ، ٢٤ ، ...) (د) $(\frac{٨}{٣}$ ، ٨ ، ٢٤ ، ...)

(٨) متتابعة هندسية حدها الأول ٢ وحدها السادس ٦٤ فإن المتتابعة هى ....

(أ) (٢ ، ٨ ، ٣٢ ، ...) (ب) (٢ ، ٤ ، ٨ ، ...)

(جـ) (٢ ، −٤ ، ٨ ، ...) (د) (٢ ، ٦ ، ١٨ ، ...)

(٩) المتتابعة $\left(\frac{١}{\sqrt{٣}} ، \frac{٢}{\sqrt{٣}} ، \sqrt{٣} ، ....\right)$ تكون ....

(أ) هندسية وأساسها = ٢ (ب) هندسية وأساسها = $\frac{١}{\sqrt{٣}}$

(جـ) حسابية وأساسها = ١ (د) حسابية وأساسها = $\frac{١}{\sqrt{٣}}$

(١٠) المتتابعة (١٥ ، ٥ ، $\frac{٥}{٣}$ ، ...) هى متتابعة ....

(أ) حسابية وأساسها −٥ (ب) هندسية وأساسها ٣

(جـ) حسابية وأساسها ٥ (د) هندسية وأساسها $٣^{-١}$

(١١) المتتابعة $\left(\frac{١}{٢٤٣} ، -\frac{١}{٨١} ، \frac{١}{٢٧} ، -\frac{١}{٩} ، \frac{١}{٣}\right)$ هى متتابعة ....

(١) منتهية. (٢) تزايدية. (٣) تذبذبية. (٤) هندسية وأساسها −٣

(أ) (١) فقط. (ب) (١) ، (٢) فقط.

(جـ) (٣) ، (٤) فقط. (د) (١) ، (٣) ، (٤) فقط.

(١٢) الحد النونى للمتتابعة الهندسية (٣ ، −٦ ، ١٢ ، ...) هو ....

(أ) ٣ $(-٢)^{ن-١}$ (ب) ٣ $(-٢)^{ن}$ (جـ) $(-٦)^{ن-١}$ (د) $(-٦)^{ن}$

(١٣) الحد النونى للمتتابعة الهندسية $\left(\frac{-١}{٢} ، \frac{١}{٤} ، \frac{-١}{٨} ، ...\right)$ يساوى ....

(أ) $\left(\frac{-١}{٢}\right)^{ن-١}$ (ب) $\left(\frac{١}{٢}\right)^{ن-١}$ (جـ) $\left(\frac{١}{٢}\right)^{ن}$ (د) $\left(-\frac{١}{٢}\right)^{ن}$

(١٤) الحد النونى فى المتتابعة الهندسية ($س^{٣}$ ، س ، $س^{-١}$ ، ...) هو ....

(أ) $س^{٥-٢ن}$ (ب) $س^{٥+ن}$ (جـ) $س^{ن-٥}$ (د) $س^{ن-١}$

(١٥) إذا كانت (−١ ، −٥ ، −٢٥ ، −١٢٥ ، ...) متتابعة هندسية فإن .... لكل ن > ١

(أ) $ح_{ن} = \frac{١}{٥} ح_{ن-١}$ (ب) $ح_{ن} = -٥ ح_{ن-١}$

(جـ) $ح_{ن} = ١٠ ح_{ن-١}$ (د) $ح_{ن} = ٥ ح_{ن-١}$

(١٦) الحد التالى فى المتتابعة الهندسية (٨ ، ٦ ، $\frac{٩}{٢}$ ، $\frac{٢٧}{٨}$ ، ...) هو ....

(أ) $\frac{١١}{٨}$ (ب) $\frac{٢٧}{١٦}$ (جـ) $\frac{٩}{٤}$ (د) $\frac{٨١}{٣٢}$

(١٧) إذا كانت : س > ٠ فإن أساس المتتابعة الهندسية (٤ ، س − ٣ ، ٢س + ٦ ، ...) هو ....

(أ) ١ (ب) ٥ (جـ) ٣ (د) ٢٤

(١٨) إذا كان : (أ ، ب ، حـ ، ...) متتابعة هندسية أساسها (ر) فإن : $(\frac{1}{أ} ، \frac{1}{ب} ، \frac{1}{حـ} ، ...)$ تمثل متتابعة هندسية أساسها = ...

(أ) ر (ب) $\frac{1}{ر}$ (جـ) $ر^{2}$ (د) $\frac{1}{ر^{2}}$

(١٩) إذا كان : أ ، ب ، حـ ، ء ، هـ في تتابع هندسي فإن : $\frac{هـ}{حـ}$ = ...

(أ) $\frac{ء}{حـ}$ (ب) $\frac{ب}{أ}$ (جـ) $\frac{حـ}{ب}$ (د) $\frac{ء}{ب}$

(٢٠) المتتابعة الهندسية التي حدها الأول = أ وأساسها = ر تكون تزايدية إذا كان : ....

(أ) أ > ٠ ، −١ < ر < ٠ (ب) أ > ٠ ، ٠ < ر < ١
(جـ) أ < ٠ ، −١ < ر < ٠ (د) أ < ٠ ، ٠ < ر < ١

(٢١) المتتابعة الهندسية التي حدها الأول = أ وأساسها = ر تكون تناقصية إذا كان ....

(أ) أ > ٠ ، −١ < ر < ٠ (ب) أ > ٠ ، ٠ < ر < ١
(جـ) أ < ٠ ، −١ < ر < ٠ (د) أ < ٠ ، ٠ < ر < ١

(٢٢) المتتابعة الهندسية التي حدها الأول = أ وأساسها = ر تكون غير متناوبة الإشارة إذا كان ....

(أ) أ > ٠ ، ر < −١ (ب) أ > ٠ ، −١ < ر < ٠
(جـ) أ > ٠ ، ٠ < ر < ١ (د) أ < ٠ ، −١ < ر < ٠

(٢٣) الشكل المقابل يمثل متتابعة هندسية حدها العام $ح_{ن}$ = ...

(أ) $٢ \times (-١)^{ن}$ (ب) $(٢)^{ن}$
(جـ) $٢ \times (-١)^{ن+١}$ (د) $(-٢)^{ن}$

(٢٤) إذا كان : أ ، ب ، حـ في تتابع هندسي وأساس المتتابعة = ر فإن جميع العبارات الآتية صحيحة ما عدا ....

(أ) ر = $\frac{ب}{أ}$ (ب) ر = $\frac{حـ}{ب}$ (جـ) ر = $\frac{ب^{2}}{أ حـ}$ (د) ر = $\frac{ب + حـ}{أ + ب}$

(٢٥) إذا كان : أ ، ب ، حـ أعداد حقيقية موجبة في تتابع هندسي فإن : (لو أ ، لو ب ، لو حـ) تكون ....

(أ) متتابعة هندسية أساسها $\frac{ب}{أ}$ (ب) متتابعة هندسية أساسها لو $\frac{ب}{أ}$
(جـ) متتابعة حسابية أساسها (ب − أ) (د) متتابعة حسابية أساسها لو $\frac{ب}{أ}$

(٢٦) رتبة الحد الذي قيمته $\frac{1}{243}$ من المتتابعة الهندسية (٨١ ، ٢٧ ، ٩ ، ...) تساوي ....

(أ) ٥ (ب) ٧ (جـ) ٩ (د) ١٠

(٢٧) رتبة أول حد أصغر من الواحد الصحيح في المتتابعة الهندسية (١٠٢٤ ، ٥١٢ ، ٢٥٦ ، ...) هي ....

(أ) ٧ (ب) ١٠ (جـ) ١٢ (د) ١٤

(٢٨) إذا كان الحد الثالث فى متتابعة هندسية = ٤ فإن حاصل ضرب أول ٥ حدود هو ....

(أ) $٤^٢$ (ب) $٤^٣$ (جـ) $٤^٥$ (د) $٤^٦$

(٢٩) حاصل ضرب الحد رقم $ن$ من البداية فى الحد رقم $ن$ من النهاية من متتابعة هندسية يساوى ....

(أ) الحد الأخير. (ب) الحد الأول.

(جـ) حاصل ضرب الحد الأول والأخير. (د) لا شىء مما سبق.

(٣٠) إذا كان الحد الثالث من متتابعة هندسية يساوى مربع حدها الأول وحدها الثانى = ٨

فإن حدها السادس = ...

(أ) ١٢٠ (ب) ١٢٤ (جـ) ١٢٨ (د) ١٣٢

(٣١) عدد حدود المتتابعة الهندسية (٢٤٣ ، ٨١ ، ٢٧ ، ... ، $\frac{١}{٩}$) يساوى ....

(أ) ٦ (ب) ٧ (جـ) ٨ (د) ٩

(٣٢) رتبة الحد الذى قيمته = ١٠٢٤ فى المتتابعة الهندسية ($\frac{١}{٨}$ ، $\frac{١}{٤}$ ، $\frac{١}{٢}$ ، ١ ، ...) هى ....

(أ) ١٦ (ب) ١٤ (جـ) ١٢ (د) ١١

(٣٣) فى المتتابعة الهندسية (٦ ، ١٢ ، ٢٤ ، ...) تكون رتبة أول حد تزيد قيمته عن ٢٠٠ هو ....

(أ) ٧ (ب) ٨ (جـ) ٦ (د) ٩

(٣٤) متتابعة هندسية جميع حدودها موجبة ، $ح_٥ - ح_٤ = ٣٦$ ، $ح_٤ - ح_٢ = ٤٠$

فإن المتتابعة هى ....

(أ) (٦٤ ، ٣٢ ، ١٦ ، ...) (ب) ($\frac{٦٤}{٣}$ ، ٣٢ ، ٤٨ ، ...)

(جـ) (٣٢ ، ٤٨ ، ٧٢ ، ...) (د) (٢٤ ، ٣٦ ، ٥٤ ، ...)

(٣٥) متتابعة هندسية حدودها موجبة ، $ح_٣ + ح_٤ = ٦ ح_٢$ ، $ح_٧ = ٣٢٠$

فإن المتتابعة هى ....

(أ) (٢ ، ١٠ ، ٢٠ ، ...) (ب) (٢٤ ، ١٦ ، ٨ ، ...)

(جـ) (٣ ، ١٥ ، ٧٥ ، ...) (د) (٥ ، ١٠ ، ٢٠ ، ...)

(٣٦) متتابعة هندسية مجموع الحدود الثلاثة الأولى فيها ٢٦ ومجموع الحدود الثلاثة التالية لها ٧٠٢

فإن المتتابعة هى ....

(أ) (٣ ، ٦ ، ١٢ ، ...) (ب) ($\frac{٢٦}{٧}$ ، $\frac{٥٢}{٧}$ ، $\frac{١٠٤}{٧}$ ، ...)

(جـ) (٢ ، ‎-٨ ، ٣٢ ، ...) (د) (٢ ، ٦ ، ١٨ ، ...)

(٣٧) متتابعة هندسية حدها الثالث يزيد عن الحد الثانى بمقدار ٣ ومجموع مربعى الحدين الثانى والثالث ٤٥

والحد الأول موجب فإن المتتابعة هى ....

(أ) (٣ ، ٦ ، ١٢ ، ...) (ب) ($\frac{٢}{٣}$ ، ٢ ، ٦ ، ...)

(جـ) ($\frac{٣}{٢}$ ، ٣ ، ٦ ، ...) (د) (٢ ، ٦ ، ١٨ ، ...)

(٣٨) متتابعة هندسية عدد حدودها ن وحدها الأول = أ وحدها الأخير = ل
فإن حاصل ضرب حدودها = ...

(أ) $(أ \times ل)^{ن}$ (ب) $(أ \times ل)^{٢ن}$ (جـ) $\left(\frac{ل}{أ}\right)^{\frac{ن}{٢}}$ (د) $(أ \times ل)^{\frac{ن}{٢}}$

(٣٩) متتابعة هندسية فيها $ح_{م} \times ح_{ن} = ح_{ط} \times ح_{و}$ فإن : $\frac{م + ن}{ط + و} = ...$

(أ) ١ (ب) ٣ (جـ) −١ (د) −٢

(٤٠) إذا كانت (أ ، ب ، حـ) متتابعة هندسية جميع حدودها موجبة
فإن المنحنى : $ص = أ س^{٢} + ب س + حـ$

(أ) يمس محور السينات. (ب) يقطع محور السينات فى نقطتين مختلفتين.
(جـ) يقع بأكمله فوق محور السينات. (د) يقع بأكمله تحت محور السينات.

تمارين على الأوساط الهندسية

(٤١) إذا كانت : أ ، ب ، حـ فى تتابع هندسى ، فإن ....

(أ) $ب حـ = أ^{٢}$ (ب) $أ ب = حـ^{٢}$ (جـ) $ب^{٢} = أ حـ$ (د) $أ ب حـ = ١$

(٤٢) الوسط الهندسى للعددين ٤ ، ١٦ هو ....

(أ) ١٠ (ب) ٦٤ (جـ) ٨ (د) ± ٨

(٤٣) إذا كان : ٣ ، س ، ٩ فى تتابع هندسى فإن : س = ...

(أ) ± ٦ (ب) $٣\sqrt{٣}$ (جـ) $\pm ٣\sqrt{٣}$ (د) $-\sqrt{٣}$

(٤٤) إذا كان الوسط الهندسى للعددين ٩ ، ص هو ١٥ فإن : ص = ...

(أ) ٦ (ب) ٥ (جـ) ٢٥ (د) ٩

(٤٥) الوسط الحسابى لعددين حقيقيين موجبين مختلفين .... وسطهما الهندسى.

(أ) = (ب) > (جـ) < (د) ≥

(٤٦) إذا كانت : $(ح_{ن})$ متتابعة هندسية حيث $ح_{ن} = ٧ \times (٣)^{ن-١}$ فإن الوسط الهندسى بين $ح_{٣}$ ، $ح_{٧}$ هو ....

(أ) ± ٥٧٠ (ب) ± ٥٦٧ (جـ) ± ٥٤٠ (د) ± ٥٦٠

(٤٧) إذا كانت (١ ، م ، ٤ م − ٤) متتابعة هندسية فإن : م = ...

(أ) ٢ (ب) −٢ (جـ) ٤ (د) −٤

(٤٨) أى مما يأتى وسط هندسى للكميتين : $أ^{٤}$ ، $ب^{١٦}$ ؟

(أ) $أ^{٤} ب^{١٦}$ (ب) $أ^{٢} ب^{٨}$ (جـ) $أ^{٢} ب^{٤}$ (د) $أ ب^{٤}$

(٤٩) الوسط الهندسى للأعداد : ٢ ، ٥ ، ٨ ، ١٠ ، ١٢٥ يساوى ....

(أ) $٥\sqrt{١٠}$ (ب) ٣٠ (جـ) ٨ (د) ١٠

(٥٠) إذا كانت (س ، ص ، ع) ثلاثة أعداد حقيقية موجبة مختلفة فى تتابع هندسى فإن : ....

(أ) ٢ ص < س + ع (ب) $ص^٢$ > س ع
(جـ) ص = س ع (د) $\sqrt{ص}$ = س ع

(٥١) فى أى متتابعة هندسية يكون $ح_١ \times ح_٧$ = ...

(أ) $(ح_١)^٢$ (ب) $(ح_٤)^٢$ (جـ) $(ح_٧)^٢$ (د) $(ح_٨)^٢$

(٥٢) إذا كان $(ح_ن)$ متتابعة هندسية حدها الأول = أ وأساسها = أ فإن حدها الخامس هو ....

(أ) $أ^٣$ (ب) $أ^٤$ (جـ) $أ^٥$ (د) $أ^٦$

(٥٣) إذا كان الحد الثالث فى متتابعة هندسية حدودها موجبة يساوى المعكوس الضربى للحد الأول فإن الحد الثانى = ...

(أ) صفر (ب) −١ (جـ) ١ (د) ٢

(٥٤) إذا كان الوسط الحسابى بين أ ، ب يساوى ٩ ، والوسط الحسابى بين $\frac{١}{أ}$ ، $\frac{١}{ب}$ يساوى $\frac{١}{٤}$ فإن الوسط الهندسى الموجب بين أ ، ب يساوى ....

(أ) ٢ (ب) ٣ (جـ) ٦ (د) ٦,٥

(٥٥) إذا كانت : س − ١ ، س + ٢ ، ٣ س فى تتابع هندسى فإن : س = ...

(أ) $\frac{١}{٢}$ ، أ −٤ (ب) $-\frac{١}{٢}$ ، أ ٤ (جـ) $\frac{١}{٢}$ ، أ ٤ (د) $-\frac{١}{٢}$ ، أ −٤

(٥٦) إذا كانت (٥٤ ، س ، ص ، ٢) متتابعة هندسية فإن : $\frac{ص}{س}$ = ...

(أ) $\frac{١}{٣}$ (ب) ٣ (جـ) ٩ (د) ٢٧

(٥٧) إذا كانت (أ ، ب ، حـ) فى تتابع حسابى وأيضًا هندسى فإن ....

(أ) أ = ب ≠ حـ (ب) أ ≠ ب = حـ (جـ) أ ≠ ب ≠ حـ (د) أ = ب = حـ

(٥٨) إذا كان ($\frac{أ}{ب}$ ، $\frac{ب}{حـ}$ ، $\frac{حـ}{ء}$) ثلاث حدود متتالية فى متتابعة هندسية فإن : $\frac{أ}{ء}$ = ...

(أ) $\frac{ب}{حـ}$ (ب) $\frac{ب^٢}{حـ^٢}$ (جـ) $\frac{ب^٣}{حـ^٣}$ (د) $\frac{ب^٤}{حـ^٤}$

(٥٩) إذا كانت (٧ ، $ك_١$ ، $ك_٢$ ، $ك_٣$ ، $ك_٤$ ، $\frac{٧}{٣٢}$) متتابعة هندسية فإن : $ك_٢$ = ...

(أ) $\frac{١}{٤}$ (ب) $\frac{١}{٢}$ (جـ) $\frac{٧}{٤}$ (د) $\frac{٧}{٢}$

(٦٠) إذا كان أ ، ب عددين حقيقيين موجبين وأدخلت ٣ أوساط هندسية موجبة بين أ ، ب لتكون متتابعة هندسية أساسها $(ر_١)$ وأدخلت ٧ أوساط هندسية موجبة بين أ ، ب لتكون متتابعة هندسية أخرى أساسها $(ر_٢)$ فإن : ....

(أ) $ر_١ = \frac{٧}{٣} ر_٢$ (ب) $(ر_١)^٧ = (ر_٢)^٣$
(جـ) $ر_١ = \sqrt{ر_٢}$ (د) $ر_١ = (ر_٢)^٢$

(٦١) إذا كانت (أ ، ب ، حـ ، ...) متتابعة هندسية تزايدية وكانت (٣ أ ، ٢ ب ، حـ ، ...) متتابعة حسابية فإن أساس المتتابعة الهندسية = ...

(أ) ٢ (ب) ٣ (جـ) ٤ (د) ٥

(٦٢) عددان موجبان أ ، ب فإذا كان أول ثلاثة حدود فى المتتابعة (٤ ، أ ، ب ، ١٢) تكون فى تتابع هندسى وآخر ثلاثة حدود فى تتابع حسابى فإن : ب − أ = ...

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) $٢ \frac{١}{٢}$ (د) ٣

(٦٣) إذا كانت : $ح_٣$ ، $ح_٨$ ، $ح_{١٨}$ من متتابعة حسابية غير ثابتة تكون متتابعة هندسية ، فإن أساس المتتابعة الهندسية = ...

(أ) $\frac{٣}{٢}$ (ب) ٣ (جـ) ٢ (د) $\frac{٢}{٣}$

(٦٤) إذا كانت أ ، ب ، جـ ثلاثة أعداد حقيقية مختلفة فى تتابع حسابى ومجموعهم = ٣٠ ، أ ، جـ ، ب فى تتابع هندسى ، فإن أكبر هذه الأعداد يساوى ....

(أ) ٦٠ (ب) ٤٠ (جـ) ١٠ (د) −٢٠

(٦٥) إذا كانت (أ ، ب ، جـ ، ...) متتابعة هندسية وكانت : (أ ، أ + ب ، أ + جـ ، ...) متتابعة حسابية فإن : أ : ب : جـ = ...

(أ) ١ : ٣ : ٩ (ب) ١ : ٢ : ٤ (جـ) ١ : ٢ : ٣ (د) ١ : ٤ : ١٦

(٦٦) ثلاث أعداد أ ، ب ، جـ أى منها لايساوى الصفر فى تتابع حسابى وإذا أضيف ١ إلى العدد أ أو ٢ إلى العدد جـ فإنها تصبح فى تتابع هندسى فإن : ب = ...

(أ) ١٠ (ب) ١٢ (جـ) ١٤ (د) ١٦

(٦٧) إذا كان : أ ، ب ، جـ فى تتابع حسابى فإن : $١٠^{أ س + ١٠}$ ، $١٠^{ب س + ١٠}$ ، $١٠^{جـ س + ١٠}$ حيث س ≠ ٠ فى ....

(أ) تتابع حسابى.
(ب) تتابع هندسى فقط عندما س > ٠
(جـ) تتابع هندسى فقط عندما س < ٠
(د) تتابع هندسى لكل قيم س

(٦٨) الحد الرابع من المتتابعة الهندسية (س ، ٢ س + ٢ ، ٣ س + ٣ ، ...) هو ....

(أ) ٢٧ (ب) $\frac{٢٧}{٢}$ (جـ) −٢٧ (د) $\frac{-٢٧}{٢}$

(٦٩) إذا كان الحد الرابع والحد السابع والحد العاشر من متتابعة هندسية هما س ، ص ، ع على الترتيب فإن : ....

(أ) $س^٢ = ص^٢ + ع^٢$
(ب) $ص^٢ = س ع$
(جـ) $س^٢ = ص ع$
(د) س ص ع + س ص − ١ = ٠

(٧٠) إذا كان أ ، ب وسطين حسابيين بين س ، ص وكان ل ، م وسطين هندسيين بين س ، ص فإن : $\frac{أ + ب}{ل م}$ = ...

(أ) $\frac{س + ص}{٢ س ص}$ (ب) $\frac{٢ س ص}{س + ص}$ (جـ) $\frac{س + ص}{س ص}$ (د) $\frac{س ص}{س + ص}$

(٧١) إذا أدخلت عدة أوساط هندسية بين ٢ ، ١٤٥٨ وكانت النسبة بين مجموع الوسطين الأولين إلى مجموع الوسطين الأخيرين هى ١ : ٢٧ ، فإن عدد تلك الأوساط = ...

(أ) ٤ (ب) ٥ (جـ) ٧ (د) ٨

(٧٢) عددان وسطهما الحسابى (م) ووسطهما الهندسى (ن) فإن مجموع مربعيهما = ...

(أ) ٤ م^{٢} − ٢ ن^{٢} (ب) م^{٢} + ن^{٢} (جـ) ٢ م^{٢} − ن^{٢} (د) ٤ م^{٢}

ثانيًا الأسئلة المقالية

تمارين على تعريف المتتابعة الهندسية وحدها العام وتعيين المتتابعة الهندسية

١ بين أى المتتابعات الآتية هندسية واذكر أساسها واكتب الحدود الثلاثة الأولى من كل متتابعة هندسية :

(١) (ح$_{ن}$) = (٥ × ٢^{ن}) (٢) (ح$_{ن}$) = (٤ ن^{٢})

(٣) (ح$_{ن}$) حيث ح$_{١}$ = ١٢ ، ح$_{ن}$ = $\frac{١}{٤}$ × ح$_{ن-١}$ ، ن > ١

٢ أثبت أن المتتابعة (ح$_{ن}$) حيث ح$_{ن}$ = ٢ × ٣$^{ن-٥}$ متتابعة هندسية وأوجد حدها السابع. «١٨»

٣ بيِّن أن المتتابعة (ح$_{ن}$) حيث ح$_{ن}$ = $\frac{٣}{٨}$ (٢)^{ن} هى متتابعة هندسية ثم أوجد حدها الثامن ، رتبة الحد الذى قيمته ٧٦٨ «٩٦ ، ١١»

٤ أوجد الحدود الأربعة التالية فى كل من المتتابعتين الهندسيتين الآتيتين ثم مثل الحدود السبعة الأولى بيانيًا :

(١) (٨ ، ٤ ، ٢ ، ...) (٢) ($\frac{١}{٢٧}$ ، $\frac{١}{٩}$ ، $\frac{١}{٣}$ ، ...)

٥ فى كل مما يأتى أوجد :

(١) متتابعة هندسية مجموع الحدين الأول والثانى منها ٣ ومجموع الحدين الأول والرابع ٦٣

«($\frac{١}{٢}$ ، $\frac{٥}{٢}$ ، $\frac{٢٥}{٢}$ ، ...) أ (−١ ، ٤ ، −١٦ ، ...)»

(٢) متتابعة هندسية حدها الثانى = ٨ ومجموع حديها الأول والثالث يساوى ٢٠

«(١٦ ، ٨ ، ٤ ، ...) أ (٤ ، ٨ ، ١٦ ، ...)»

(٣) متتابعة هندسية جميع حدودها موجبة ، وحدها الأول يساوى أربعة أمثال حدها الثالث ، ومجموع حديها الثانى والخامس = ٣٦ «(٦٤ ، ٣٢ ، ١٦ ، ...)»

(٤) متتابعة هندسية حدها الثالث يساوى المعكوس الضربى لحدها الأول وحدها الخامس يساوى $\frac{١}{١٢٥}$ أثبت أن هناك حلين. «(٥ ، ١ ، $\frac{١}{٥}$ ، ...) أ (٥ ، −١ ، $\frac{١}{٥}$ ، ...)»

(٥) متتابعة هندسية حدودها موجبة فيها : ح$_{١}$ + ح$_{٢}$ = ٢٠ ، ح$_{٣}$ + ح$_{٥}$ = ٥ ح$_{٢}^{٢}$

«(٢ ، ٦ ، ١٨ ، ...)»

(٦) متتابعة هندسية تزايدية فيها الحد الثالث يزيد عن مجموع الحدين الأولين بمقدار ١٠ والحد الثانى ينقص عن مجموع الحدين الأول والثالث بمقدار ١٤ «(٢ ، ٦ ، ١٨ ، ...)»

(٧) متتابعة هندسية ثلاثة أمثال مجموع حديها الأول والثالث يساوى مجموع حديها الثانى والرابع ، وحدها الخامس يزيد عن ضعف مجموع حدودها الأربعة الأولى بمقدار ٢ «(٢ ، ٦ ، ١٨ ، ...)»

(٨) متتابعة هندسية حدودها موجبة ومجموع الحدود الخمسة الأولى منها يساوى ٢٤٢ وحدها الرابع يساوى حدها الثالث مضافاً إليه ستة أمثال حدها الثانى. «(٢ ، ٦ ، ١٨ ، ...)»

(٩) متتابعة هندسية فيها : $ح_٢ + ح_٤ = ٥$ ، $ح_١^٢ + ح_٢^٢ = ٨٠$

«(٨ ، ٤ ، ٢ ، ...) أ (−٨ ، ٤ ، −٢ ، ...)»

(١٠) متتابعة هندسية مجموع حديها الثانى والثالث يساوى ١٢ ، حاصل ضرب حديها الأول والرابع يساوى ٢٧ «(١ ، ٣ ، ٩ ، ...) أ (٢٧ ، ٩ ، ٣ ، ...)»

٦ ثلاثة أعداد من متتابعة هندسية مجموعها ٢١ وحاصل ضربها ٦٤ فما هى الأعداد الثلاثة ؟ «١ ، ٤ ، ١٦»

٧ مجموع ثلاثة أعداد متتالية موجبة من متتابعة هندسية يساوى ١٤ وحاصل ضرب مربعات هذه الأعداد يساوى ٤٠٩٦ فما هى تلك الأعداد ؟ «٨ ، ٤ ، ٢»

٨ ثلاثة أعداد موجبة تكون متتابعة هندسية مجموعها ٢٨ ومجموع مقلوباتها $\frac{٧}{١٦}$
أوجد هذه الأعداد. «١٦ ، ٨ ، ٤»

٩ مجموع الثلاثة حدود الأولى من متتابعة هندسية تساوى ٧ ومجموع مربعاتها تساوى ٢١
أوجد هذه الأعداد. «٤ ، ٢ ، ١»

١٠ متتابعة هندسية أساسها : ٥ ، $ح_{ن+٢} = ١٢٥$ ، $ح_{٢ن-٦} = ٢٥$ أوجد المتتابعة.
«($٥^{-٥}$ ، $٥^{-٤}$ ، $٥^{-٣}$ ، ...)»

١١ متتابعة هندسية فيها : $ح_ن = ١$ ، $ح_{ن+١} = \frac{١}{٢}$ ، $ح_{٢ن-١} = \frac{١}{٣٢}$ فأوجد قيمة ن
ثم أوجد المتتابعة. «٦ ، (٣٢ ، ١٦ ، ٨ ، ...)»

١٢ اكتشف الخطأ :

(١) تمثل حدود المتتابعة الهندسية بمجموعة من النقاط المنفصلة التى تقع على استقامة واحدة.

(٢) تسمى المتتابعة ($ح_ن$) هندسية إذا كان $\frac{ح_ن}{ح_{ن+١}}$ يساوى مقداراً ثابتاً يعرف بأساس المتتابعة (لكل ن ≥ ١)

(٣) تكون المتتابعة الهندسية تناقصية إذا كان أساسها ر ∈]−١ ، ٠[

تمارين على الأوساط الهندسية

١٣ عددان موجبان الفرق بينهما ٦٠ ، وسطهما الهندسى ١٦ فما العددان ؟ «٦٤ ، ٤»

١٤ أوجد العددين اللذين وسطهما الحسابى ٥ ووسطهما الهندسى ٣ «٩ ، ١»

١٥ أوجد عددين موجبين وسطهما الهندسى الموجب يزيد عن أحدهما بمقدار ٢ ويقل عن الآخر بمقدار ٣ «٤ ، ٩»

١٦ الوسط الحسابى لعددين يساوى $\frac{٤٥}{٢}$ وسطهما الهندسى وأصغر العددين يساوى ٩ أوجد العدد الآخر. «٨١»

١٧ عددان وسطهما الهندسى يزيد ٦ عن أصغر العددين ووسطهما الحسابى ينقص ٩ عن أكبر العددين أوجد العددين. «٦ ، ٢٤»

١٨ أدخل ستة أوساط هندسية بين $\frac{١}{٤}$ ، ٣٢

١٩ أوجد الأوساط الهندسية فى المتتابعة : (٤ ، ... ، ... ، ... ، ... ، ... ، ٢٩١٦)

٢٠ إذا كان الوسط الهندسى بين : س + ٢ ، ص − ٦ هو ٥ والوسط الحسابى بين س ، ص هو ٧ فأوجد قيمة كل من : س ، ص «٣ ، ١١»

٢١ إذا كانت : $\frac{١}{٢}$أ ، ب ، حـ كميات موجبة فى تتابع هندسى فأثبت أن : ٤ ب < أ + ٢ حـ

٢٢ إذا كانت : س ، ص ، ع ، ل كميات موجبة فى تتابع هندسى. فأثبت أن : س + ل > ص + ع

٢٣ أدخلت عدة أوساط هندسية موجبة بين العددين ٢ ، ٤٨٦ فإذا كان مجموع الوسطين الأخيرين يساوى تسعة أمثال مجموع الوسطين الأولين فأوجد عدد هذه الأوساط. «٤»

٢٤ إذا أدخلنا عدة أوساط هندسية بين ٣ ، ٣٨٤ كان حاصل ضرب الوسطين الثانى والأخير يساوى ٢٣٠٤ أوجد عدد الأوساط. «٦»

٢٥ إذا كان : (١ ، س ، ص) فى تتابع حسابى ، (١ ، ص ، س) فى تتابع هندسى فاحسب قيمة كل من : س ، ص حيث : س ≠ ص ≠ ١ «$\frac{١}{٤}$ ، $-\frac{١}{٢}$»

٢٦ إذا كانت : ٤ ، ب ، حـ فى تتابع حسابى ، وكانت ٢ ، ب + ٣ ، ٥ حـ فى تتابع هندسى فأوجد قيمة كل من : ب ، حـ «٧ ، ١٠»

٢٧ ثلاثة أعداد فى تتابع حسابى مجموعها ١٥ وإذا طرح من أولها واحد ومن ثانيها واحد وأضيف لثالثها واحد كونت ثلاثة حدود متتالية من متتابعة هندسية أوجد الأعداد الثلاثة. «٩ ، ٥ ، ١ أو ٣ ، ٥ ، ٧»

٢٨ مجموع ثلاثة أعداد فى تتابع هندسى يساوى ٧٠ وإذا ضرب الأول فى ٤ والثانى فى ٥ والثالث فى ٤ كونت النواتج حدود متتابعة حسابية فما هى الأعداد الثلاثة ؟ «٤٠ ، ٢٠ ، ١٠»

٢٩ ثلاثة أعداد موجبة فى تتابع هندسى حاصل ضربهم = ٨ وإذا طرح ١ من العدد الأكبر أصبحت فى تتابع حسابى. أوجد الأعداد. «١ ، ٢ ، ٤»

٣٠ إذا كانت : أ ، ٢ب ، ٣حـ ، ٤ء كميات موجبة فى تتابع هندسى.

فأثبت أن : (أ + ٣حـ) (ب + ٢ء) > ١٢ ب حـ

---

٣١ إذا كانت : (أب ، ب حـ ، حـ ء ، ء هـ) كميات موجبة فى تتابع حسابى. **فأثبت أن** : $حـ^{٢}$ > أ هـ

---

٣٢ إذا كانت : (لو أ ، لو ب ، لو حـ) فى تتابع حسابى. **فأثبت أن** : أ ، ب ، حـ فى تتابع هندسى.

---

٣٣ إذا كانت : أ ، ٣ب ، ٢حـ ، ٦ء أعدادًا حقيقية موجبة مختلفة تكون متتابعة حسابية.

أثبت أن : (١) ب حـ > أ ء (٢) ٩ $ب^{٢}$ + ٤ $حـ^{٢}$ > ٢ أ حـ + ١٨ ب ء

---

٣٤ اكتشف الخطأ :

(١) تعرف الأوساط الهندسية بأنها الحدود الواقعة بين حدين غير متتاليين من متتابعة هندسية ويمكن إيجادها متى علم قيمة هذين الحدين.

(٢) الوسط الحسابى لعددين حقيقيين مختلفين أكبر من وسطهما الهندسى.

---

٣٥ تفكير إبداعى :

(١) إذا كان : أ + ب + حـ = ١ حيث أ ، ب ، حـ كميات موجبة ومختلفة.

أثبت أن : (١ - أ) (١ - ب) (١ - حـ) > ٨ أ ب حـ

(٢) إذا كانت : س ∈ $ح^{+}$ ، س ≠ ١ **أثبت أن** : س + $\frac{١}{س}$ > ٢

(٣) إذا كان : أ ب حـ ء = ١ حيث أ ، ب ، حـ ، ء كميات موجبة ومختلفة

أثبت أن : (أ + ١) (ب + ١) (حـ + ١) (ء + ١) > ١٦

ثالثًا مسائل تقيس مهارات التفكير

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) إذا كانت ($ح_{ن}$) ، ($ح'_{ن}$) متتابعتين هندسيتين فأى مما يأتى يمثل متتابعة هندسية ؟

(أ) ($ح_{ن}^{ك}$) (ب) (ك $ح'_{ن}$) (جـ) ($ح_{ن}$ $ح'_{ن}$) (د) كل ما سبق.

(٢) إذا كانت : (أ ، ب ، حـ) متتابعة حسابية أساسها (م) فإن : ($٣^{أ}$ ، $٣^{ب}$ ، $٣^{حـ}$) تكون ....

(أ) متتابعة حسابية أساسها = ٣ (ب) متتابعة هندسية أساسها = ٣

(جـ) متتابعة حسابية أساسها = $٣^{م}$ (د) متتابعة هندسية أساسها = $٣^{م}$

(٣) إذا كان : (أ ، ب ، حـ) فى تتابع حسابى وكان (س ، ص ، ع) فى تتابع هندسى

فإن : $س^{ب-حـ}$. $ص^{حـ-أ}$. $ع^{أ-ب}$ = ...

(أ) س ص ع (ب) ١ (جـ) س + ص + ع (د) أ + ب + حـ

④ إذا كان الوسط الحسابى والوسط الهندسى لجذرى معادلة تربيعية هما ٨ ، ٥ على الترتيب

فإن المعادلة هى ....

(أ) $س^٢ - ١٦ س - ٢٥ = ٠$

(ب) $س^٢ - ٨ س + ٥ = ٠$

(جـ) $س^٢ - ١٦ س + ٢٥ = ٠$

(د) $س^٢ + ١٦ س - ٢٥ = ٠$

⑤ إذا كانت ارتفاعات مثلث أ ب حـ المرسومة من رؤوسه أ ، ب ، حـ على الترتيب فى تتابع حسابى

فإن ....

(أ) أ ، ب ، حـ فى تتابع حسابى.

(ب) أ ، ب ، حـ فى تتابع هندسى.

(جـ) أ ب ، أ حـ ، ب حـ فى تتابع حسابى.

(د) أ ب ، ب حـ ، حـ أ فى تتابع هندسى.

⑥ إذا كانت : (أ ، ب ، حـ ، ....) م.هـ وكان : $أ^{س} = ب^{ص} = حـ^{ع}$ فإن : ....

(أ) $\frac{١}{س} + \frac{١}{ع} = \frac{٢}{ص}$

(ب) $\frac{١}{س} + \frac{١}{ص} = \frac{٢}{ع}$

(جـ) $\frac{١}{ص} + \frac{١}{ع} = \frac{٢}{س}$

(د) $\frac{س}{ع} + ١ = \frac{٢}{ص}$

تطبيقات على المتتابعة الهندسية

١ سيارة ثمنها ١٥٠ ألف جنيه فإذا كان ثمن السيارة يتناقص سنويًا بنسبة ١٠٪ فكم يكون ثمن السيارة بعد ٤ سنوات ؟ «٩٨٤١٥ جنيه»

٢ موظف راتبه الشهرى ١٢٠٠ جنيه ويحصل على علاوة سنوية ثابتة بنسبة ١٠٪ زيادة عن راتبه فى السنة السابقة مباشرة. فكم يكون راتبه بالجنيه بعد مرور ٤ سنوات ؟ «١٧٥٦,٩٢ جنيه»

٣ يصب الماء فى خزان بمعدل ضعف اليوم السابق له مباشرة ، فإذا صب فى اليوم الأول ١٢ لترًا فبعد كم يومًا يصب فيه ١٥٣٦ لترًا ؟ «٨ أيام»

٤ إذا كان عدد الطلاب المقبولين بالمرحلة الثانوية فى إحدى الإدارات التعليمية يزداد بمعدل ٤٪ سنويًا ، وكان عدد الطلاب حاليا ٢٤٠٠ طالب. فكم من المتوقع أن يكون عددهم بعد ٦ سنوات ؟ «٣٠٣٧ طالبًا»

٥ تسقط كرة من المطاط من ارتفاع ٢٤٠ مترًا فوق سطح الأرض ، فإذا كانت الكرة ترتد إلى ارتفاع قدره $\frac{٣}{٤}$ ارتفاعها السابق مباشرة ، فكم يكون ارتفاعها بعد الاصطدام السابع ؟ «٣٢ مترًا»



الدرس

6

المتسلسلات الهندسية

المتسلسلة الهندسية

هى مجموع حدود المتتابعة الهندسية.

أى أنه : إذا كانت ($أ ، أ ر ، أ ر^٢ ، \cdots ، أ ر^{ن-١}$) متتابعة هندسية

فإن : $أ + أ ر + أ ر^٢ + \cdots + أ ر^{ن-١} = \sum_{ر=١}^{ن} أ ر^{ر-١}$ (حيث ن عدد حدود المتتابعة)

يسمى متسلسلة هندسية.

فمثلًا المتسلسلة : $٣ + ٦ + ١٢ + ٢٤ + ٤٨ + ٩٦ = \sum_{ر=١}^{٦} ٣ (٢)^{ر-١}$ هى مجموع حدود المتتابعة الهندسية

(٣ ، ٦ ، ١٢ ، ٢٤ ، ٤٨ ، ٩٦) التى حدها الأول أ = ٣ ، وأساسها ر = ٢

وحدها العام : $ح_ن = أ ر^{ن-١} = ٣ (٢)^{ن-١}$ وعدد حدودها = ٦ حدود.

مجموع ن حدًا الأولى من متسلسلة هندسية ($جـ_ن$)

١ إيجاد مجموع ن حدًا من متسلسلة هندسية بمعلومية حدها الأول (أ) وأساسها (ر) :

لأى متسلسلة هندسية حدها الأول = أ ، وأساسها = ر يكون : $جـ_ن = أ + أ ر + أ ر^٢ + \cdots + أ ر^{ن-١}$ (١)

وبضرب الطرفين فى ر : ∴ $ر جـ_ن = أ ر + أ ر^٢ + أ ر^٣ + \cdots + أ ر^ن$ (٢)

وبطرح (٢) من (١) : ∴ $جـ_ن - ر جـ_ن = أ - أ ر^ن$ ∴ $جـ_ن (١ - ر) = أ (١ - ر^ن)$

∴ $جـ_ن = \frac{أ (١ - ر^ن)}{١ - ر}$ ، ر ≠ ١

ملاحظات

١ يمكن كتابة قانون المجموع على الصورة $حـ_ن = \frac{أ(ر^ن - ١)}{ر - ١}$ ، ر ≠ ١

٢ إذا كانت : ر = ١ فإن : $حـ_ن = أ + أ + أ + \cdots + أ$ (ن حدًا) = ن أ أي أن : $حـ_ن = \sum_{ر=١}^{ن} أ = ن أ$

٣ $حـ_ن = \sum_{ر=١}^{ن} أ ر^{ر-١} = \frac{أ(١ - ر^ن)}{١ - ر}$ حيث ر ≠ ١

مثال ١

أوجد مجموع الحدود الستة الأولى من المتتابعة الهندسية : (٤ ، ١٢ ، ٣٦ ، ...)

الحل

أ = ٤ ، $ر = \frac{١٢}{٤} = ٣$ ، ن = ٦

∵ $حـ_ن = \frac{أ(١ - ر^ن)}{١ - ر}$ ∴ $حـ_٦ = \frac{٤(١ - ٣^٦)}{١ - ٣} = ١٤٥٦$

٢ إيجاد مجموع ن حدًا من متسلسلة هندسية بمعلومية حدها الأول (أ) وحدها الأخير (ل) :

∵ $حـ_ن = \frac{أ(١ - ر^ن)}{١ - ر} = \frac{أ - أ ر^ن}{١ - ر}$ (١) ، ∵ $ل = أ ر^{ن-١}$

∴ $ل ر = أ ر^ن$ وبالتعويض في (١) : ∴ $حـ_ن = \frac{أ - ل ر}{١ - ر}$ ، ر ≠ ١

ويمكن استخدام القانون على الصورة : $حـ_ن = \frac{ل ر - أ}{ر - ١}$ ، ر ≠ ١

مثال ٢

أوجد قيمة : ٢ + ٦ + ١٨ + ... + ٤٨٦

الحل

أ = ٢ ، $ر = \frac{٦}{٢} = ٣$ ، ل = ٤٨٦

∵ $حـ_ن = \frac{أ - ل ر}{١ - ر}$ ∴ $حـ_ن = \frac{٢ - ٤٨٦ \times ٣}{١ - ٣} = ٧٢٨$

∴ ٢ + ٦ + ١٨ + ... + ٤٨٦ = ٧٢٨

استخدام رمز التجميع $\sum$

مثال ٣

أوجد : ١ $\sum_{ر=٤}^{١٠} ٥ (٢)^{ر-١}$ ٢ $\sum_{ر=١}^{\infty} ١٢٥ (٥)^{١-ر}$

الحـــل

١ $\sum_{ر=٤}^{١٠} ٥ (٢)^{ر-١} = ع_٤ + ع_٥ + ع_٦ + \cdots + ع_{١٠}$ من متتابعة هندسية حدها الأول أ = ٥

وأساسها ر = ٢ بدءًا من $ع_٤$ إلى $ع_{١٠}$

، $\because ع_٤ = أ ر^٣ = ٥ \times ٢^٣ = ٤٠$ ، $ع_{١٠} = أ ر^٩ = ٥ \times ٢^٩ = ٢٥٦٠$

، $\because ح_ن = \frac{أ - ل ر}{١ - ر}$ وبوضع أ = ٤٠ ، ل = ٢٥٦٠ ، ر = ٢

$\therefore ح_ن = \frac{٤٠ - ٢٥٦٠ \times ٢}{١ - ٢} = ٥٠٨٠$ $\therefore \sum_{ر=٤}^{١٠} ٥ (٢)^{ر-١} = ٥٠٨٠$

* لاحظ أنه : في المثال السابق يمكن إيجاد عدد الحدود المطلوب جمعها :

$ن = ١٠ - ٤ + ١ = ٧$ حدود.

واستخدام القانون : $ح_ن = \frac{أ(١ - ر^ن)}{١ - ر}$ فيكون $ح_٧ = \frac{٤٠ (١ - ٢^٧)}{١ - ٢} = ٥٠٨٠$

٢ $\because \sum_{ر=١}^{٥} ١٢٥ (٥)^{١-ر} = \sum_{ر=١}^{٥} ١٢٥ \left(\frac{١}{٥}\right)^{ر-١}$ وهي مجموع حدود متتابعة هندسية

حدها الأول أ = ١٢٥ وأساسها ر = $\frac{١}{٥}$ بدءًا من $ع_١$ إلى $ع_٥$

$\therefore \sum_{ر=١}^{٥} ١٢٥ (٥)^{١-ر} = \frac{١٢٥ \left(١ - \left(\frac{١}{٥}\right)^٥\right)}{١ - \frac{١}{٥}} = \frac{٧٨١}{٥}$

مثال ٤

أثبت أن المتتابعة $(ع_ن) = \left(٢ (-٣)^{ن-١}\right)$ متتابعة هندسية وأوجد مجموع الحدود الثمانية الأولى منها.

الحـــل

$\because \frac{ع_{ن+١}}{ع_ن} = \frac{٢ (-٣)^ن}{٢ (-٣)^{ن-١}} = -٣$ = مقدار ثابت هو أساس المتتابعة.

$\therefore$ المتتابعة هندسية أساسها (ر) = −٣

بوضع ن = ١ $\therefore ع_١ = ٢$

، $\because ح_ن = \frac{أ(١ - ر^ن)}{١ - ر}$ $\therefore ح_٨ = \frac{٢ \left[١ - (-٣)^٨\right]}{١ + ٣} = -٣٢٨٠$

مثال ٥

كم حدًا يلزم أخذه من المتتابعة الهندسية (١, ٠ ، -٤, ٠ ، ١,٦ ، ...) ابتداءً من الحد الأول ليكون المجموع -٩, ٨١ ؟

الحل

أ = ١, ٠ ، ر = $\frac{-٤,٠}{٠,١}$ = -٤

، ∵ $حـ_ن = \frac{أ(١ - ر^ن)}{١ - ر}$

∴ $-٨١,٩ = \frac{٠,١ [١ - (-٤)^ن]}{١ + ٤}$

∴ $-٨١,٩ = \frac{١ - (-٤)^ن}{٥ \times ١٠}$

∴ $-٨١,٩ \times ٥٠ = ١ - (-٤)^ن$

∴ $(-٤)^ن = ٤٠٩٦ = (-٤)^٦$

∴ ن = ٦

∴ عدد الحدود اللازم أخذها = ٦ حدود.

مثال ٦

أوجد أقل عدد من حدود المتتابعة الهندسية (٧ ، ١٤ ، ٢٨ ، ...) يؤخذ ابتداءً من الحد الأول ليكون المجموع أكبر من ٧٠٠٠

الحل

أ = ٧ ، ر = $\frac{١٤}{٧}$ = ٢

، ∵ $حـ_ن = \frac{أ(١ - ر^ن)}{١ - ر}$

∴ $حـ_ن = \frac{٧(١ - ٢^ن)}{١ - ٢}$

∴ $حـ_ن = ٧(٢^ن - ١)$

ويكون $حـ_ن > ٧٠٠٠$ إذا كان $٧(٢^ن - ١) > ٧٠٠٠$

∴ $٢^ن - ١ > ١٠٠٠$

∴ $٢^ن > ١٠٠١$

وبأخذ لوغاريتم الطرفين : ∴ ن لو ٢ > لو ١٠٠١

∴ ن > $\frac{لو ١٠٠١}{لو ٢}$ وباستخدام الآلة الحاسبة ن > ٩,٩٦٧٢٢٦٢٥٩

∴ ن = ١٠ أ، ١١ أ، ١٢ أ، ...

∴ أقل عدد من الحدود يمكن أخذه هو ١٠ حدود.

مثال ٧

إذا كان مجموع الخمسة حدود الأولى من متتابعة هندسية يساوى ٣١ ومجموع الخمسة حدود التالية يساوى ٩٩٢ فأوجد المتتابعة وأوجد حاصل ضرب حدودها العشرة الأولى.

الحل

∵ $حـ_٥ = ٣١$

∴ $٣١ = \frac{أ(١ - ر^٥)}{١ - ر}$ (١)

، ∵ $حـ_{١٠}$ الأولى = ٣١ + ٩٩٢ = ١٠٢٣

∴ $١٠٢٣ = \frac{أ(١ - ر^{١٠})}{١ - ر}$ (٢)

بقسمة (٢) على (١) : ∴ $\frac{١٠٢٣}{٣١} = \frac{١ - ر^{١٠}}{١ - ر^٥}$

∴ $\frac{١٠٢٣}{٣١} = \frac{(١ - ر^٥)(١ + ر^٥)}{١ - ر^٥}$

∴ $١ + ر^٥ = ٣٣$ ∴ $ر^٥ = ٣٢ = ٢^٥$ ∴ ر = ٢

وبالتعويض فى (١) :

∴ $٣١ = \frac{أ(١ - ٣٢)}{١ - ٢}$

∴ ٣١ = ٣١ أ

∴ أ = ١

∴ المتتابعة هى (١ ، ٢ ، ٤ ، ...)

لاحظ أن :

إذا كان : $ح_ن$ = مجموع ن حدًا الأولى من حدود متتابعة هندسية ، $ح_م$ = مجموع ن حدًا التالية لها

فإن : $ر^ن = \frac{ح_م}{ح_ن}$

، حاصل ضرب الحدود العشرة الأولى = $أ × أ ر × أ ر^٢ × ... × أ ر^٩$

$= (أ × أ × أ × ...$ إلى ١٠ عوامل$) × (ر × ر^٢ × ر^٣ × ... × ر^٩)$

$= أ^{١٠} ر^{١ + ٢ + ٣ + ... + ٩} = أ^{١٠} ر^{\frac{٩}{٢}(١ + ٩)} = أ^{١٠} ر^{٤٥}$

، ∵ أ = ١ ، ر = ٢ ∴ حاصل ضرب الحدود العشرة الأولى = $(١)^{١٠} × (٢)^{٤٥} = ٢^{٤٥}$

حل آخر :

∵ $ح_٥$ الأولى = ٣١ ∴ $أ + أ ر + أ ر^٢ + أ ر^٣ + أ ر^٤ = ٣١$

∴ $أ (١ + ر + ر^٢ + ر^٣ + ر^٤) = ٣١$ (١)

∵ $ح_٥$ التالية = ٩٩٢ ∴ $أ ر^٥ + أ ر^٦ + أ ر^٧ + أ ر^٨ + أ ر^٩ = ٩٩٢$

∴ $أ ر^٥ (١ + ر + ر^٢ + ر^٣ + ر^٤) = ٩٩٢$ (٢)

وبقسمة (٢) على (١) : ∴ $ر^٥ = ٣٢ = ٢^٥$ ∴ ر = ٢

وبالتعويض فى (١) : ∴ أ (١ + ٢ + ٤ + ٨ + ١٦) = ٣١

∴ ٣١ أ = ٣١ ∴ أ = ١

∴ المتتابعة هى (١ ، ٢ ، ٤ ، ...) ثم يكمل الحل.

ملاحظة

إذا كان : $ح_ن$ هو مجموع حدود المتتابعة بدءًا من $ع_١$ إلى $ع_ن$

فإن : $ع_ن = ح_ن - ح_{ن-١}$ لكل ن > ١

فمثلًا : $ع_٢ = ح_٢ - ح_١$ ، $ع_٣ = ح_٣ - ح_٢$ وهكذا.

مثال ٨

إذا كان مجموع $ن$ حدًا الأولى من متتابعة هندسية يعطى بالقانون $ح_ن = ٢٥٦ - ٢^{٨ - ن}$ فأوجد المتتابعة وأوجد كذلك حدها السابع.

الحـــل

$ح_ن = ٢٥٦ - ٢^{٨ - ن}$

* بوضع $ن = ١$ $\therefore ح_١ = ٢٥٦ - ٢^٧ = ٢٥٦ - ١٢٨ = ١٢٨$ $\therefore ع_١ = ١٢٨$

* بوضع $ن = ٢$ $\therefore ح_٢ = ٢٥٦ - ٢^٦ = ٢٥٦ - ٦٤ = ١٩٢$

$\therefore ع_١ + ع_٢ = ١٩٢$ $\therefore ع_٢ = ١٩٢ - ١٢٨ = ٦٤$

* بوضع $ن = ٣$ $\therefore ح_٣ = ٢٥٦ - ٢^٥ = ٢٥٦ - ٣٢ = ٢٢٤$

$\therefore ع_١ + ع_٢ + ع_٣ = ٢٢٤$ $\therefore ع_٣ = ٢٢٤ - ١٩٢ = ٣٢$

$\therefore$ المتتابعة هى (١٢٨ ، ٦٤ ، ٣٢ ، ...)

، $\because ع_٧ = ح_٧ - ح_٦$ $\therefore ع_٧ = [٢٥٦ - ٢^١] - [٢٥٦ - ٢^٢] = ٢٥٤ - ٢٥٢ = ٢$

مثال ٩

صهريج مياه سعته ٦٣٠٥ لترًا كان فارغًا ثم مُلئ بالماء بواسطة صنبور يصب فى الساعة الأولى ١٢٨ لترًا ، ويصب فى كل ساعة تالية مرة ونصف مرة قدر ما صبه فى الساعة السابقة.

بعد كم ساعة يمتلئ الصهريج ؟

الحـــل

مقدار ما صبه فى الساعة الأولى = ١٢٨ $\therefore$ ما يصب فى الساعة الثانية = $١٢٨ \left(\frac{٣}{٢}\right)$

، ما يصب فى الساعة الثالثة = $١٢٨ \left(\frac{٣}{٢}\right) \times \frac{٣}{٢} = ١٢٨ \left(\frac{٣}{٢}\right)^٢$ وهكذا ...

$\therefore$ ما يصب فى الصهريج فى الساعات المتتالية يكون متتابعة هندسية هى :

$\left(١٢٨ ، ١٢٨ \left(\frac{٣}{٢}\right) ، ١٢٨ \left(\frac{٣}{٢}\right)^٢ ، ...\right)$

وعندما يمتلئ الصهريج يكون مجموع $ن$ حدًا من هذه المتتابعة = سعة الصهريج أى ٦٣٠٥

، $\because ح_ن = \frac{أ(١ - ر^ن)}{١ - ر}$ $\therefore ٦٣٠٥ = \frac{١٢٨ \left[١ - \left(\frac{٣}{٢}\right)^ن\right]}{١ - \frac{٣}{٢}}$

$\therefore ٦٣٠٥ = ١٢٨ \times ٢ \left[\left(\frac{٣}{٢}\right)^ن - ١\right]$ $\therefore \frac{٦٣٠٥}{١٢٨ \times ٢} = \left(\frac{٣}{٢}\right)^ن - ١$

$\therefore \left(\frac{٣}{٢}\right)^ن = \frac{٦٣٠٥}{١٢٨ \times ٢} + ١$ $\therefore \left(\frac{٣}{٢}\right)^ن = \frac{٦٥٦١}{٢٥٦} = \left(\frac{٣}{٢}\right)^٨$

$\therefore ن = ٨$ $\therefore$ الصهريج يمتلئ بعد ٨ ساعات.

المتسلسلات الهندسية غير المنتهية

تعريـــف

المتسلسلة الهندسية غير المنتهية هى التى لها عدد لا نهائى من الحدود.

- وإذا كان مجموعها يقترب من عدد حقيقى (أى يساوى تقريبًا عددًا حقيقيًا) فإنها تكون متقاربة (تقاربية)
- وإذا كان ليس لها مجموع فإنها تكون غير متقاربة (تباعدية)

أى أن : المتسلسلة الهندسية : $ا + ا ر + ا ر^{٢} + \cdots + ا ر^{ن-١} + \cdots = \sum_{ر=١}^{\infty} ا ر^{ر-١}$ متسلسلة غير منتهية.

وتكون : (١) متقاربة (يمكن إيجاد مجموعها) إذا كان :

$|ر| < ١$ **أى أن :** $-١ < ر < ١$

(٢) غير متقاربة (لا يمكن إيجاد مجموعها) إذا كان :

$|ر| > ١$ **أى أن :** $ر > ١$ أ، $ر < -١$

مجموع المتتابعة الهندسية غير المنتهية

∵ مجموع المتتابعة الهندسية يعطى بالقانون : $ح_{ن} = \frac{ا(١ - ر^{ن})}{١ - ر}$

وعندما $ن \longrightarrow \infty$ ، $|ر| < ١$ فإن : $ر^{ن} \longrightarrow$ صفر

حينئذ يصبح مجموع عدد لا نهائى من حدود المتتابعة الهندسية : $\boxed{ح_{\infty} = \frac{ا}{١ - ر}}$

مثال ١٠

بين أى من المتسلسلات الهندسية الآتية يمكن جمع عدد لا نهائى من حدودها وأوجد هذا المجموع إن أمكن :

(١) $٨١ - ٢٧ + ٩ - ٣ + \cdots$ | (٢) $-١ - ٢ - ٤ - ٨ - \cdots$

(٣) $\sum_{ر=١}^{\infty} (٢ \times ٣^{١-ر})$

الحـل

(١) ∵ $ر = \frac{-٢٧}{٨١} = \frac{-١}{٣}$ ∴ $|ر| = |\frac{-١}{٣}| = \frac{١}{٣} < ١$

∴ المتسلسلة تقاربية ويمكن جمع عدد لا نهائى من حدودها.

، ∵ $ا = ٨١$ ∴ $ح_{\infty} = \frac{ا}{١ - ر} = \frac{٨١}{١ - (-\frac{١}{٣})} = \frac{٣}{٤} ٦٠$

(٢) ∵ $ر = \frac{-٢}{-١} = ٢$ ∴ $|ر| = |٢| = ٢ > ١$

∴ المتسلسلة غير تقاربية ولا يمكن جمع عدد لا نهائى من حدودها.

3 ∵ $\sum_{ر=1}^{\infty} (2 \times 3^{1-ر}) = \sum_{ر=1}^{\infty} \left(2 \times \left(\frac{1}{3}\right)^{ر-1}\right)$ ∴ $أ = 2$ ، $ر = \frac{1}{3}$

، ∵ $|ر| = \left|\frac{1}{3}\right| = \frac{1}{3} < 1$

∴ المتسلسلة تقاربية ويمكن جمع عدد لا نهائى من حدودها. ∴ $حـ_{\infty} = \frac{أ}{1 - ر} = \frac{2}{1 - \frac{1}{3}} = 3$

مثال 11

مجموع عدد غير منته من حدود متتابعة هندسية يساوى ٤ وحدها الثانى −٣ أوجد المتتابعة.

الحل

∵ $حـ_{\infty} = 4$ ∴ $\frac{أ}{1 - ر} = 4$ (1)

∵ $ح_2 = -3$ ∴ $أ ر = -3$ (2)

وبقسمة (2) على (1) : ∴ $أ ر \times \frac{1 - ر}{أ} = \frac{-3}{4}$ ∴ $ر (1 - ر) = \frac{-3}{4}$

∴ $4 ر^2 - 4 ر - 3 = 0$ ∴ $(2 ر - 3)(2 ر + 1) = 0$

∴ $ر = \frac{3}{2}$ (مرفوض) أ، $ر = -\frac{1}{2}$ وبالتعويض فى (2) :

∴ $أ = 6$ ∴ المتتابعة هى $(6 ، -3 ، \frac{3}{2} ، ...)$

مثال 12

متتابعة هندسية مجموع حدودها إلى ∞ يساوى ٣ ، مجموع مكعبات حدودها إلى ∞ يساوى ٨١ فما هى المتتابعة ؟

الحل

نفرض أن المتتابعة هى : $(أ ، أ ر ، أ ر^2 ، ...)$

، ∵ $حـ_{\infty} = 3$ ∴ $\frac{أ}{1 - ر} = 3$ (1)

، ∵ $(أ^3 + أ^3 ر^3 + أ^3 ر^6 + ...) = 81$

وهذه متتابعة هندسية غير منتهية حدها الأول $= أ^3$ ، أساسها $= ر^3$ ∴ $\frac{أ^3}{1 - ر^3} = 81$ (2)

وبتكعيب (1) والقسمة على (2) : ∴ $\frac{أ^3}{(1 - ر)^3} \times \frac{1 - ر^3}{أ^3} = \frac{27}{81}$

∴ $\frac{(1 - ر)(1 + ر + ر^2)}{(1 - ر)^3} = \frac{1}{3}$ ∴ $\frac{1 + ر + ر^2}{1 - 2 ر + ر^2} = \frac{1}{3}$

∴ $3 + 3 ر + 3 ر^2 = 1 - 2 ر + ر^2$ ∴ $2 ر^2 + 5 ر + 2 = 0$

∴ $(ر + 2)(2 ر + 1) = 0$

∴ ر = −٢ (مرفوض) أ، ر = $-\frac{١}{٢}$ وبالتعويض فى (١) : ∴ $\frac{أ}{١ + \frac{١}{٢}} = ٣$

∴ أ = ٣ × $\frac{٣}{٢}$ = $\frac{٩}{٢}$ ∴ المتتابعة هى : $\left(\frac{٩}{٢} ، -\frac{٩}{٤} ، \frac{٩}{٨} ، ...\right)$

مثال ١٣

متتابعة هندسية أى حد من حدودها يساوى ضعف مجموع الحدود التالية له إلى ∞ من الحدود أوجد أساسها، وإذا كان حدها الثالث = ٩ فأوجد المتتابعة.

الحـــل

نفرض أن المتتابعة هى (أ ، أ ر ، أ $ر^٢$ ، ...)

، ∵ أى حد من حدودها = ضعف مجموع الحدود التالية له إلى ∞

∴ أ = ٢ (أ ر + أ $ر^٢$ + أ $ر^٣$ + ...) ∴ أ = ٢ × $\frac{أ ر}{١ - ر}$

[لاحظ أن المتتابعة (أ ر ، أ $ر^٢$ ، أ $ر^٣$ ، ...) متتابعة هندسية حدها الأول أ ر وأساسها ر]

∴ أ (١ − ر) = ٢ أ ر وبالقسمة على أ ∴ ١ − ر = ٢ ر

∴ ٣ ر = ١ ∴ ر = $\frac{١}{٣}$

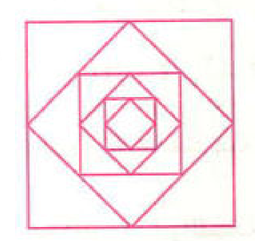
، ∵ $ح_٣$ = ٩ ∴ أ $ر^٢$ = ٩

∴ أ $\left(\frac{١}{٣}\right)^٢$ = ٩ ∴ أ = ٨١

∴ المتتابعة هى : (٨١ ، ٢٧ ، ٩ ، ...)

مثال ١٤

الشكل المقابل يبين ستة مربعات فى متتابعة لا نهائية فيها كل مربع أصغر مكون من توصيل منتصفات أضلاع المربع الأكبر منه مباشرة فإذا كانت مساحة المربع الأكبر ١٦ وحدة مربعة. أوجد مجموع مساحات هذه المربعات إلى ∞



الحـــل

∵ مساحة المربع الناتج من توصيل منتصفات أضلاع مربع تساوى $\frac{١}{٢}$ مساحة المربع الأكبر

∴ مجموع مساحات المربعات إلى ∞ يكون متسلسلة هندسية لا نهائية حدها الأول ١٦ وأساسها $\frac{١}{٢}$

∴ $ح_\infty = \frac{١٦}{١ - \frac{١}{٢}}$ = ٣٢ وحدة مربعة.

تحويل الكسر العشرى الدائرى إلى كسر اعتيادى

لتحويل الكسر الاعتيادى $\frac{١}{٣}$ إلى كسر عشرى فإننا نجرى عملية القسمة كما هو متبع حيث نلاحظ أن عملية القسمة لا تنتهى وإن الرقم ٣ فى خارج القسمة يظل متكررًا. أى أن

$\frac{١}{٣}$ = ٠,٣٣٣ ..... ونختصر هذا الناتج بأن نكتب $\frac{١}{٣}$ = ٠,$\overline{٣}$ وذلك بوضع خط فوق العدد ٣ الذى يتكرر وتقرأ ٠,٣ دائر.

وبالمثل $\frac{٥}{٩}$ = ٠,٥٥٥٥ ..... = ٠,$\overline{٥}$ ، $\frac{١}{٦}$ = ٠,١٦٦٦٦ ..... = ٠,١$\overline{٦}$

، $\frac{٥}{٣٣}$ = ٠,١٥١٥١٥ ..... = ٠,$\overline{١٥}$ ، $\frac{١٤}{١١١}$ = ٠,١٢٦١٢٦١٢٦ ..... = ٠,$\overline{١٢٦}$

ونلاحظ أن وضع الخط فوق رقم أو رقمين أو ثلاث ... معناه استمرار تكرار هذا الرقم أو الرقمين أو الثلاثة أرقام ... بنفس الترتيب.

وإذا كان العكس هو المطلوب أى تحويل الكسر العشرى الدائر إلى كسر اعتيادى فإننا نضع الكسر العشرى الدائر على صورة مجموع حدود متتابعة هندسية غير منتهية كما يتضح من المثال الآتى :

مثال ١٥

ضع كلاً من الكسور العشرية الدائرية الآتية على صورة كسر اعتيادى :

١ ٠,$\overline{٧}$ ٢ ٠,$\overline{٢٤}$ ٣ ٣,٤$\overline{١٢}$

الحل

١ ∵ ٠,$\overline{٧}$ = ٠,٧٧٧٧...

∴ ٠,$\overline{٧}$ = ٠,٧ + ٠,٠٧ + ٠,٠٠٧ + ... "متسلسلة هندسية حدها الأول ٠,٧ وأساسها ر = ٠,١"

∴ ٠,$\overline{٧}$ = $\frac{أ}{١ - ر}$ = $\frac{٠,٧}{١ - ٠,١}$ = $\frac{٠,٧}{٠,٩}$ = $\frac{٧}{٩}$

٢ ∵ ٠,$\overline{٢٤}$ = ٠,٢٤٢٤٢٤...

∴ ٠,$\overline{٢٤}$ = ٠,٢٤ + ٠,٠٠٢٤ + ٠,٠٠٠٠٢٤ + ...

= $\frac{أ}{١ - ر}$ = $\frac{٠,٢٤}{١ - ٠,٠١}$ = $\frac{٠,٢٤}{٠,٩٩}$ = $\frac{٨}{٣٣}$

٣ ∵ ٣,٤$\overline{١٢}$ = ٣,٤١٢١٢١٢.....

∴ ٣,٤$\overline{١٢}$ = ٣,٤ + ٠,٠١٢ + ٠,٠٠٠١٢ + ٠,٠٠٠٠٠١٢ + ...

= ٣,٤ + (٠,٠١٢ + ٠,٠٠٠١٢ + ٠,٠٠٠٠٠١٢ + ...)

= ٣,٤ + $\frac{أ}{١ - ر}$ = ٣,٤ + $\frac{٠,٠١٢}{١ - ٠,٠١}$ = ٣,٤ + $\frac{٠,٠١٢}{٠,٩٩}$ = $\frac{٥٦٣}{١٦٥}$

تمارين 6 على المتسلسلات الهندسية

اختبر نفسك

من أسئلة الكتاب المدرسي • فهم • تطبيق • مستويات عليا

أولًا أسئلة الاختيار من متعدد

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

تمارين على المتسلسلة الهندسية ومجموع ن حدًا الأولى من متسلسلة هندسية

① مجموع المتتابعة الهندسية التى فيها أ = $\frac{1}{2}$ ، ر = −٢ ، ن = ١٠ يساوى ....

(أ) −١٧٠,٥ (ب) ١٥٨ (جـ) ١٦٤ (د) −١٦٤

② المتتابعة الهندسية التى حدها الأول أ = ٢ ، وأساسها ر = ١

يكون مجموع ١٠ حدود الأولى منها = ...

(أ) ٢٠ (ب) ٢ (جـ) ١٠ (د) ١٠٢٤

③ مجموع المتتابعة الهندسية التى فيها أ = ٩ ، ر = ٣ ، ل = ٦٥٦١ هو ....

(أ) ٢٩٥٢٤ (ب) ٩٨٣٧ (جـ) ٢٩٥٤ (د) ٨٩٣٧

④ مجموع ٨ حدود الأولى من المتسلسلة الهندسية : $\frac{1}{4}$ + $\frac{1}{2}$ + ١ + ٢ + ...

(أ) ٦٣$\frac{3}{4}$ (ب) ٣٢ (جـ) ٣١$\frac{3}{4}$ (د) ٦٤

⑤ مجموع المتتابعة الهندسية (١ ، −$\frac{1}{2}$ ، $\frac{1}{4}$ ، ... إلى ٩ حدود) يساوى ....

(أ) $\frac{171}{256}$ (ب) $\frac{-85}{128}$ (جـ) $\frac{-85}{256}$ (د) $\frac{178}{256}$

⑥ ٣ + ٦ + ١٢ + ... + ١٩٢ = ...

(أ) ١٩٢ (ب) ٣٨١ (جـ) ١٨٩ (د) ٧٦٥

⑦ مجموع المتتابعة الهندسية (٣ ، −٦ ، ١٢ ، ... ، ٧٦٨) يساوى ....

(أ) −٩٨ (ب) −٣١٤ (جـ) ٤٩٨ (د) ٥١٣

⑧ مجموع الثمانية حدود الأولى من المتتابعة الهندسية ($ح_ن$) حيث $ح_ن$ = ٢ $(٣)^{ن+١}$

يساوى ....

(أ) ٥٦٠١٤ (ب) ٥٨٠٩٤ (جـ) ٥٩٠٤٠ (د) ٤٩٥٠

⑨ مجموع ٥ حدود من المتتابعة الهندسية (١ ، ٣ ، ٩ ، ...) ابتداءً من حدها الثالث يساوى ....

(أ) ١٠٨٩ (ب) ٢٠١٣ (جـ) ٩٩٨ (د) ١٠٥٤

(١٠) فى المتسلسلة الهندسية التى حدها الأول أ = ٢ ، أساسها ر = $\frac{1}{2}$ يكون $\sum_{ن=١}^{٦}$ أ ر$^{ن-١}$ = ...

(أ) ٣ $\frac{15}{16}$ (ب) $\frac{1}{16}$ (جـ) ٣ $\frac{7}{8}$ (د) $\frac{1}{32}$

(١١) $\sum_{ن=٣}^{٧}$ (٢ × ٣$^{ن-١}$) = ...

(أ) ٢٤٢ (ب) ١٤٥٨ (جـ) ٧٣٨ (د) ٢١٧٨

(١٢) متتابعة مجموع ن حدًا الأولى منها يعطى بالعلاقة : حـ$_ن$ = ٣$^{ن+١}$ − ٤

فإن الحد الثالث منها يساوى ....

(أ) ١٨ (ب) ٢٣ (جـ) ٥٤ (د) ٧٧

(١٣) عدد الحدود الذى يلزم أخذها من المتتابعة الهندسية (٣ ، ٦ ، ١٢ ، ...) ابتداءً من حدها الأول ليكون مجموع هذه الحدود = ٣٨١ هو .... حدًا.

(أ) ٨ (ب) ٦ (جـ) ٩ (د) ٧

(١٤) عدد الحدود التى يجب أخذها من المتتابعة الهندسية (٢ ، ٦ ، ١٨ ، ...) ابتداءً من حدها الثانى ليكون مجموع هذه الحدود مساويًا ٦٥٥٨ هو .... حدًا.

(أ) ٧ (ب) ٨ (جـ) ٩ (د) ١٠

(١٥) المتتابعة الهندسية التى حدها الأول = ٢٤٣ ، حدها الأخير = ١

، مجموع حدودها ٣٦٤ هى ....

(أ) (٢٤٣ ، ٢٧ ، ٣ ، ...) (ب) (٧٢٩ ، ٢٤٣ ، ... ، ١)

(جـ) (٢٤٣ ، ٨١ ، ... ، ١) (د) (٢٤٣ ، ١٢١,٥ ، ٦٠,٧٥ ، ... ، ١)

(١٦) المتتابعة الهندسية التى مجموعها ١٠٩٣ ، وحدها الأخير ٧٢٩ وأساسها ٣ هى ....

(أ) (١ ، ٣ ، ٩ ، ... ، ٧٢٩) (ب) (٢ ، ٦ ، ١٨ ، ... ، ٧٢٩)

(جـ) (٣ ، ٩ ، ٢٧ ، ... ، ٧٢٩) (د) (−٣ ، ٩ ، −٢٧ ، ... ، ٧٢٩)

(١٧) أقل عدد من حدود المتتابعة الهندسية (٥ ، ١٥ ، ٤٥ ، ...) يلزم أخذه ابتداءً من حدها الأول ليكون المجموع أكبر من ٦٤٠٠ هو .... حدًا.

(أ) ٥ (ب) ٦ (جـ) ٧ (د) ٨

(١٨) متتابعة هندسية مجموع الخمسة حدود الأولى منها = ٧,٧٥ ومجموع الخمسة حدود التالية لها = ٢٤٨ فإن المتتابعة هى ....

(أ) (٤ ، ٢ ، ١ ، ...) (ب) ($\frac{1}{4}$ ، $\frac{1}{2}$ ، ١ ، ...)

(جـ) (٢ ، ٤ ، ٨ ، ...) (جـ) ($\frac{1}{8}$ ، $\frac{1}{4}$ ، $\frac{1}{2}$ ، ...)

(١٩) متتابعة هندسية مجموع حديها الرابع والسادس = ١٢٠ ومجموع حديها الخامس والسابع = ٢٤٠ فإن مجموع ١٠ حدود الأولى منها = ...

(أ) ٧٢٠ (ب) ١٠٢٣ (جـ) ٣٠٦٩ (د) ٦١٣٨

(٢٠) متتابعة هندسية حدودها موجبة ، مجموع الأثنى عشر حدًا الأولى منها يساوى ٢٧٣ مرة قدر مجموع الأربعة حدود الأولى منها فإن أساس المتتابعة = ...

(أ) ± ٤ (ب) ± ٢ (جـ) ١٧ (د) ٢

(٢١) متتابعة هندسية عدد حدودها (٢ ن) وأساسها (ر) فإن النسبة بين مجموع حدودها الفردية الرتبة إلى مجموع حدودها الزوجية الرتبة تساوى ....

(أ) $\frac{1}{ر}$ (ب) $\frac{1}{ر^{2}}$ (جـ) $ر^{2}$ (د) $\frac{ن}{ر}$

(٢٢) متتابعة هندسية عدد حدودها (٢ ن) وكان مجموع كل حدود المتتابعة يساوى خمسة أمثال مجموع الحدود الفردية الرتبة فإن أساس المتتابعة = ...

(أ) ٢ (ب) ٣ (جـ) ٤ (د) ٥

تمارين على المتسلسلات الهندسية غير المنتهية - مجموع المتتابعة الهندسية غير المنتهية

(٢٣) يمكن إيجاد مجموع عدد غير منته من حدود متتابعة هندسية إذا وفقط إذا كان ....

(أ) $ر < 1$ (ب) $ر > 1$ (جـ) $|ر| < 1$ (د) $|ر| > 1$

(٢٤) مجموع حدود المتتابعة الهندسية : (٨١ ، ٢٧ ، ٩ ، ...) يساوى ....

(أ) $\frac{٢٤٣}{٤}$ (ب) ١١٧ (جـ) ١١٨ (د) $\frac{٢٤٣}{٢}$

(٢٥) مجموع المتتابعة الهندسية (٢٥ ، −٥ ، ١ ، ...) إلى ∞ يساوى ....

(أ) ٢٢ (ب) ٢١ (جـ) $٢٠\frac{٥}{٦}$ (د) $٢١\frac{٣}{٤}$

(٢٦) 📖 مجموع المتتابعة الهندسية (٣ ، $\sqrt{٣}$ ، ١ ، ...) إلى ∞ يساوى ....

(أ) $\frac{٥ + ٢\sqrt{٣}}{٢}$ (ب) $\frac{٩ + ٣\sqrt{٣}}{٢}$ (جـ) $\frac{٨ + ٤\sqrt{٣}}{٣}$ (د) $٣ + \sqrt{٣}$

(٢٧) مجموع عدد غير منته من حدود المتتابعة الهندسية ($٣^{-١}$ ، $(-٣)^{-٣}$ ، $٣^{-٥}$ ، ...) يساوى ....

(أ) $\frac{١}{٣}$ (ب) $\frac{٢}{٣}$ (جـ) ٠,٣٣٣٣ (د) ٠,٣

(٢٨) 📖 مجموع عدد غير منته من حدود المتتابعة الهندسية ($ح_{ن}$) = ($٣^{٣-ن}$) يساوى ....

(أ) ١٣ (ب) $١٣\frac{١}{٢}$ (جـ) $١٣\frac{١}{٣}$ (د) $١٢\frac{١}{٢}$

(٢٩) $\sum\limits_{ر=١}^{\infty} ٤ \left(\frac{١}{٢}\right)^{ر-١}$ = ...

(أ) ٨ (ب) ٤ (جـ) $٤\frac{١}{٢}$ (د) ٢

(٣٠) $\sum\limits_{ن=١}^{\infty} ٢٤ \left(\frac{-١}{٥}\right)^{ن-١}$ = ...

(أ) ٥٠ (ب) ٤٠ (جـ) ٢٠ (د) ١٠

(٣١) $\sum\limits_{ر=١}^{\infty} ٢٧ \left(٣\right)^{١-ر}$ = ...

(أ) ٤٠ (ب) $\frac{٨١}{٥}$ (جـ) ٣٩ (د) $\frac{٨١}{٢}$

(٣٢) المتسلسلة الهندسية : ٤٨ + ٢٤ + ١٢ + ... باستخدام رمز التجميع تساوى ....

(أ) $\sum_{ر=١}^{\infty}$ ٤٨ × ٢ $^{ر-١}$ (ب) $\sum_{ر=١}^{\infty}$ ٢٤ $^{ر-١}$

(جـ) $\sum_{ر=١}^{\infty}$ ٤٨ × ٢ $^{١-ر}$ (د) $\sum_{ر=١}^{\infty}$ ٢٤ × $\left(\frac{١}{٢}\right)^{ر-١}$

(٣٣) ٠,$\overline{٢٤}$ = ...

(أ) $\frac{٦}{٢٥}$ (ب) $\frac{٢}{١١}$ (جـ) $\frac{١١}{٤٥}$ (د) $\frac{٨}{٣٣}$

(٣٤) ٠,$\overline{٥٧}$ = ...

(أ) $\frac{٥٧}{١٠٠}$ (ب) $\frac{٢٥}{٣٣}$ (جـ) $\frac{٢٣}{٤٠}$ (د) $\frac{١٩}{٣٣}$

(٣٥) ٠,$\overline{٤٣٢}$ = ...

(أ) $\frac{٢١٤}{٤٩٥}$ (ب) $\frac{٣٨٩}{٩٠٠}$ (جـ) $\frac{٤٣}{٩٩}$ (د) $\frac{١٦}{٣٧}$

(٣٦) إذا كان مجموع عدد غير منته من حدود متتابعة هندسية أساسها $\frac{١}{٢}$ هو ١٣$\frac{١}{٢}$

فإن حدها الأول يساوى ....

(أ) ٦ (ب) ٨ (جـ) ٩ (د) ١٢

(٣٧) إذا كان مجموع عدد غير منته من حدود المتتابعة الهندسية التى حدها الأول ١٢ هو ٩٦

فإن أساسها يساوى ....

(أ) $\frac{١}{٣}$ (ب) $\frac{١}{٢}$ (جـ) $\frac{٧}{٨}$ (د) $\frac{٣}{٤}$

(٣٨) مجموع عدد لا نهائى من حدود المتتابعة الهندسية ($ح_ن$) التى حدها الأول

$ح_١$ = ١ ، $ح_ن$ = ٢ $ح_{ن+١}$ يساوى ....

(أ) ∞ (ب) ٢ (جـ) ٣ (د) ٤

(٣٩) مجموع مربعات حدود متتابعة هندسية غير منتهية حدها الأول = ١ وأساسها

يساوى ص هو ....

(أ) $\frac{١}{١ - ص}$ (ب) $\frac{١}{١ - ص^٢}$ (جـ) $\frac{١}{ص^٢}$ (د) $\frac{١}{ص}$

(٤٠) مجموع المتسلسلة $\left(١ + \frac{١}{س} + \frac{١}{س^٢} + \cdots\right)$ يساوى .... (حيث |س| > ١)

(أ) $\frac{١}{١ - س}$ (ب) $\frac{س}{١ - س}$ (جـ) $\frac{س}{س - ١}$ (د) $\frac{س}{س^٢ - ١}$

(٤١) متتابعة هندسية حدها الأول يساوى مجموع الحدود التالية إلى ما لا نهاية

فإن أساس هذه المتتابعة يساوى ....

(أ) ٠,٥ (ب) ٠,٣٣٣ (جـ) ٠,٢٥ (د) ٠,٦٦٦

(٤٢) إذا كان الحد الأول من متتابعة هندسية لا نهائية يساوى ضعف مجموع الحدود التالية له فإن أساس المتتابعة = ...

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) $\frac{١}{٣}$ (د) $\frac{-١}{٣}$

(٤٣) إذا كانت : (٩٦ ، س ، ص ، ع ، ٦ ، ...) هى متتابعة هندسية حدودها موجبة فإن مجموع عدد غير منته من حدودها = ...

(أ) ١٨٠ (ب) ١٩٢ (جـ) ٣٨٤ (د) ٧٦٨

(٤٤) متتابعة هندسية فيها $ح_٢$ = ٢٤٠ ، $ح_٥$ = ٣٠ فإن مجموع عدد غير منته من حدودها = ...

(أ) ١٩٢٠ (ب) ٩٦٠ (جـ) ٤٨٠ (د) ٣٦٠

(٤٥) مجموع عدد غير منته من حدود متتابعة هندسية = ٥٤ وحدها الأول = ١٨ فإن المتتابعة هى ....

(أ) (١٨ ، ٦ ، ٢ ، ...) (ب) (١٨ ، ٩ ، $\frac{٩}{٢}$ ، ...)

(جـ) (١٨ ، ١٣,٥ ، $\frac{٨١}{٨}$ ، ...) (د) (١٨ ، ١٢ ، ٨ ، ...)

(٤٦) متتابعة هندسية غير منتهية ، حدودها موجبة ، يزيد حدها الأول عن حدها الثانى بمقدار ٣٠ ، ومجموع عدد غير منته من حدودها يساوى $\frac{١٣٥}{٢}$ فإن هذه المتتابعة هى ....

(أ) (٤٥ ، ١٥ ، ٥ ، ...) (ب) (٦٠ ، ٣٠ ، ١٥ ، ...)

(جـ) (٩٠ ، ٦٠ ، ٢٠ ، ...) (د) (٣٢ ، ٢ ، $\frac{٢}{١٦}$ ، ...)

(٤٧) متتابعة هندسية مجموع حدودها إلى ∞ يساوى ٤ ومجموع مكعبات حدودها إلى ∞ يساوى ١٩٢ فإن المتتابعة هى ....

(أ) (٦ ، ٣ ، $\frac{٣}{٢}$ ، ...) (ب) (٨ ، ٦ ، $٤\frac{١}{٢}$ ، ...)

(جـ) (٦ ، -٢ ، $-\frac{٢}{٣}$ ، ...) (د) (٦ ، -٣ ، $\frac{٣}{٢}$ ، ...)

(٤٨) متتابعة هندسية كل حد من حدودها يساوى نصف مجموع الحدود التالية له مباشرة إلى ∞ فإذا كان مجموع حديها الثانى والرابع $٨\frac{٢}{٣}$ فإن المتتابعة هى ....

(أ) ($\frac{٢٧}{٨}$ ، $\frac{٩}{٤}$ ، $\frac{٣}{٢}$ ، ...) (ب) (١ ، $\frac{٣}{٢}$ ، $\frac{٩}{٤}$ ، ...)

(جـ) (٩ ، ٦ ، ٤ ، ...) (د) (١ ، $\frac{٢}{٣}$ ، $\frac{٤}{٩}$ ، ...)

(٤٩) متتابعة هندسية حدودها موجبة ، مجموع حديها الثانى والثالث يساوى ٢٠ ومجموع حدودها الثلاثة الأولى يساوى ٦٥ فإن مجموع حدودها إلى ما لا نهاية يساوى ....

(أ) ٤٢,٥ (ب) ٦٧,٥ (جـ) ٧٨,٥ (د) ١٧٠

(٥٠) إذا كان مجموع أول حدين من متتابعة هندسية لا نهائية يساوى ١ وكان كل حد يساوى ضعف مجموع الحدود التالية له فإن الحد الأول = ...

(أ) $\frac{١}{٣}$ (ب) $\frac{٢}{٣}$ (جـ) $\frac{٣}{٤}$ (د) $\frac{١}{٤}$

(٥١) قيمة المتسلسلة : (١ + $\frac{١}{٣}$ + $\frac{١}{٣^٢}$ + ...) تساوى ....

(أ) ٢ (ب) $\frac{٣}{٢}$ (جـ) $\frac{٤}{٣}$ (د) $\frac{١٠}{٩}$

(٥٢) إذا كان مجموع متتابعة هندسية إلى ما لا نهاية ثلاثة أمثال مجموع أول حدين فيها

فإن الأساس = ...

(أ) $\pm \frac{\sqrt{2}}{3}$ (ب) $\sqrt{\frac{2}{3}}$ (جـ) $\pm \sqrt{\frac{2}{3}}$ (د) $\frac{\sqrt{2}}{3}$

(٥٣) إذا كان : $حـ = ١ + أ + أ^٢ + \cdots \infty$ حيث $|أ| < ١$

، $حـَ = ١ + ب + ب^٢ + \cdots \infty$: $|ب| < ١$ فإن : $\frac{حـ}{حـَ} =$ ....

(أ) $\frac{أ}{ب}$ (ب) $\frac{أ + ١}{ب + ١}$ (جـ) $\frac{١ - أ}{١ - ب}$ (د) $\frac{١ - ب}{١ - أ}$

(٥٤) متتابعة هندسية لا نهائية حدها الثانى يساوى ٢ ومجموع عدد لانهائى من حدودها يساوى ٨

فإن أساسها = ...

(أ) $\frac{٣}{٤}$ (ب) $\frac{٤}{٣}$ (جـ) $\frac{١}{٢}$ (د) $\frac{١}{٤}$

(٥٥) قيمة المتسلسلة : $(١ + حا^٢ هـ + حا^٤ هـ + \cdots)$ تساوى .... حيث $هـ \neq ن\pi$ حيث $ن \in ص$

(أ) $حا^٢ هـ$ (ب) $قتا^٢ هـ$ (جـ) $حتا^٢ هـ$ (د) $قا^٢ هـ$

(٥٦) إذا كان : $(١ + حا \theta + حا^٢ \theta + حا^٣ \theta + \cdots) = ٢ - \sqrt{٢}$

فإن : $\theta =$ .... حيث $\theta \in]٠ ، \pi[$

(أ) $\frac{\pi}{٨}$ (ب) $\frac{\pi}{٤}$ (جـ) $\frac{٣\pi}{٨}$ (د) $\frac{٣\pi}{٤}$

(٥٧) حاصل ضرب $٣^{\frac{١}{٣}} \times ٩^{\frac{١}{٩}} \times ٢٧^{\frac{١}{٢٧}} \times \cdots$ إلى ∞ يساوى ....

(أ) ٣ (ب) ٦ (جـ) ٩ (د) ١

(٥٨) إذا كان $حـ_ن$ هو مجموع $ن$ حدًا الأولى من المتسلسلة الهندسية الغير منتهية $١ + \frac{١}{٢} + \frac{١}{٤} + \frac{١}{٨} + \cdots$

وكان $حـ_\infty - حـ_ن < \frac{١}{١٠٠٠}$ فإن أقل قيمة للعدد $ن =$ ....

(أ) ٨ (ب) ٩ (جـ) ١٠ (د) ١١

ثانيًا الأسئلة المقالية

تمارين على المتسلسلة الهندسية ومجموع ن حدًا الأولى من متسلسلة هندسية

١ أوجد مجموع كل من المتسلسلتين الهندسيتين الآتيتين :

(١) $١ + ٣ + ٩ + \cdots + ٦٥٦١$ | (٢) $٢٠ - ١٠ + ٥ - \cdots - \frac{٥}{٣٢}$

٢ أوجد مجموع كل من المتتابعتين الهندسيتين اللتين فيهما :

(١) أ = ٤ ، ر = ٣ ، ن = ٦ | (٢) أ = −٤ ، ر = $-\frac{١}{٢}$ ، ل = $\frac{١}{٨}$

٣ أوجد :

(١) $\sum_{ر=١}^{٥} ٢ \times \left(\frac{١}{٢}\right)^{ر-١}$ | (٢) $\sum_{ر=٥}^{١٢} ٣ (٢)^{ر-١}$

٤ أثبت أن : المتابعة ($ح_ن$) = ($١٠ \times ٢^{ن-٢}$) هى متتابعة هندسية ، وأوجد عدد الحدود ابتداءً من الحد الأول التى يجب أخذها من المتتابعة ليكون مجموعها ٢٥٥٠ «٩»

٥ متتابعة هندسية حدها الأول ٢ وحدها الرابع ٥٤ أوجد أقل عدد من حدودها يلزم أخذه ابتداءً من الحد الأول ليكون مجموعها أكبر من ٥٠٠٠ «٨»

٦ متتابعة هندسية حدها الرابع يساوى ٨ وحدها السابع يساوى ٦٤ أوجد المتتابعة ومجموع العشرة حدود الأولى منها. «(١ ، ٢ ، ٤ ، ...) ، ١٠٢٣»

٧ ($ح_ن$) متتابعة هندسية حدودها موجبة فيها : $ح_٢ = ٦$ ، $ح_٣ - ح_١ = ٩$ أوجد هذه المتتابعة ومجموع الاثنى عشر حدًا الأولى منها. «(٣ ، ٦ ، ١٢ ، ...) ، ١٢٢٨٥»

٨ متتابعة هندسية حدودها موجبة وحدها الأول يساوى أربعة أمثال حدها الثالث ومجموع حديها الثانى والخامس = ٣٦ أوجد المتتابعة ومجموع العشرة حدود الأولى منها. «(٦٤ ، ٣٢ ، ١٦ ، ...) ، $١٢٧\frac{٧}{٨}$»

٩ متتابعة هندسية جميع حدودها موجبة فإذا كان : $ح_٣ + ح_٤ = ٦ ح_٢$ ، $ح_٧ = ٣٢٠$

أوجد المتتابعة ثم أوجد مجموع الثمانية حدود الأولى منها. «(٥ ، ١٠ ، ٢٠ ، ...) ، ١٢٧٥»

١٠ متتابعة هندسية مجموع حدودها الثلاثة الأولى يساوى ١٣ ، مجموع حدودها الثلاثة التالية لها يساوى ٣٥١ ، أوجد المتتابعة ومجموع الحدود العشرة الأولى منها. «(١ ، ٣ ، ٩ ، ...) ، ٢٩٥٢٤»

١١ متتابعة هندسية مجموع الأربعة حدود الأولى منها يساوى ٦٠ ومجموع الحدود الأربعة التالية يساوى ١٦ مرة مجموع الحدود الأربعة الأولى. أوجد المتتابعة. «(٤ ، ٨ ، ١٦ ، ...) أ، (-١٢ ، ٢٤ ، -٤٨ ، ...)»

١٢ إذا كان مجموع ن حدًا الأولى من متتابعة يعطى بالقانون : $حـ_ن = \frac{١}{٢} [٣^{ن+٢} - ٩]$

أثبت أن المتتابعة هندسية ثم أوجدها. «(٩ ، ٢٧ ، ٨١ ، ...)»

١٣ عند إدخال ن من الأوساط الهندسية بين ٨١ ، $\frac{١}{٧٢٩}$ كان مجموع الوسطين الأولين ٣٦ ، ومجموع الوسطين الأخيرين $\frac{٤}{٢٤٣}$ ، أوجد مجموع هذه الأوساط الهندسية. «$\frac{٩٨٤١}{٢٤٣}$»

١٤ إذا كان مجموع التسعة حدود الأولى من متتابعة هندسية يساوى ل ، ومجموع التسعة حدود التالية لها يساوى م ، فأثبت أن : أساس المتتابعة = $\sqrt[٩]{\frac{م}{ل}}$

تمارين على المتسلسلات الهندسية غير المنتهية - مجموع المتتابعة الهندسية غير المنتهية

١٥ بين أى المتسلسلات الهندسية الآتية يمكن جمع عدد لا نهائى من حدودها ، وأوجد هذا المجموع إن أمكن :

(١) ٧ + ٢١ + ٦٣ + ...

(٢) ٧٥ + ٤٥ + ٢٧ + ...

(٣) ١٥ - ٥ + $\frac{٥}{٣}$ - $\frac{٥}{٩}$ + ...

(٤) ٩٦ - ٤٨ + ٢٤ - ١٢ + ...



١٦ بين أى المتتابعات الهندسية الآتية يمكن إيجاد مجموعها إلى ∞ من الحدود وأوجد هذا المجموع إن أمكن :

① (٢٤ ، ١٢ ، ٦ ، ...) ② (٣ ، -٦ ، ١٢ ، ...)

③ $(ح_ن) = (٥ \times ٢^{ن})$ ④ $(ح_ن) = (٢ \times ٥^{١-ن})$

١٧ ضع كلاً من الكسور العشرية الدائرية الآتية على صورة كسر اعتيادى :

① ٠,$\overline{٣}$ «$\frac{١}{٣}$» ② ٠,$\overline{١٨}$ «$\frac{٢}{١١}$»

③ $\sqrt[٣]{٠,٠\overline{٣٧}}$ «$\frac{١}{٣}$» ④ ٠,$\overline{٤}$ + ٠,٢$\overline{٣}$ «$\frac{٦١}{٩٠}$»

١٨ أوجد :

① $\sum_{ر=١}^{\infty} ٥٦ \left(\frac{٣}{٤}\right)^{ر-١}$ «٢٢٤» ② $\sum_{ر=٢}^{\infty} \frac{١}{٨١} (٣)^{١-ر}$ «$\frac{١}{١٦٢}$»

١٩ إذا كان الحد الأول من متتابعة هندسية عدد حدودها غير منته = ١٨ ، الحد الرابع منها = $\frac{١٦}{٣}$ ، فما مجموعها ؟ «٥٤»

٢٠ متتابعة هندسية مجموع عدد لا نهائى من حدودها ابتداء من حدها الأول يساوى ١٠٨ ، ويزيد حدها الأول عن حدها الثانى بمقدار ١٢ ، أوجد المتتابعة ومجموع حدودها السبعة الأولى.

«(٣٦ ، ٢٤ ، ١٦ ، ...) ، $\frac{٨٢٣٦}{٨١}$»

٢١ أوجد المتتابعة الهندسية التى مجموع حديها الأول والثانى = ١٦ ، ومجموع عدد غير منته من حدودها = ٢٥

«(١٠ ، ٦ ، $\frac{١٨}{٥}$ ، ...) أ (٤٠ ، -٢٤ ، $\frac{٧٢}{٥}$ ، ...)»

٢٢ متتابعة هندسية غير منتهية ، حدها الأول = مجموع الحدود التالية له إلى ما لا نهاية ، مجموع حديها الأول والثانى = ٩ ، أوجد هذه المتتابعة. «(٦ ، ٣ ، $\frac{٣}{٢}$ ، ...)»

٢٣ متتابعة هندسية حدودها موجبة وكل حد من حدودها يساوى ضعف مجموع الحدود التالية له مباشرة إلى ∞ من الحدود فإذا كان حدها الثالث يساوى المعكوس الضربى لحدها الخامس فأوجد المتتابعة ومجموع الخمسة حدود الأولى منها. «(٢٧ ، ٩ ، ٣ ، ...) ، $\frac{١٢١}{٣}$»

٢٤ متتابعة هندسية كل حد من حدودها يساوى ٧ أمثال مجموع الحدود التالية له مباشرة إلى ∞ فإذا كان حدها الثالث يساوى $\frac{٣}{٨}$ فأوجد المتتابعة. «(٢٤ ، ٣ ، $\frac{٣}{٨}$ ، ...)»

٢٥ إذا كان مجموع متتابعة هندسية غير منتهية $\frac{٣٧٥}{٤}$ ، مجموع حديها الأول والثانى يساوى ٩٠ ، فأثبت أنه توجد متتابعتان وأوجدهما.

«(٧٥ ، ١٥ ، ٣ ، ...) أ (١١٢,٥ ، -٢٢,٥ ، ٤,٥ ، ...)»

٢٦ $(ح_ن)$ متتابعة هندسية فيها : $ح_٢ - ح_٣ = ٤٥$ ، $ح_١$ الأولى = ١٨٠ ، أوجد المتتابعة ، وبين أنه يمكن جمع عدد لا نهائى من حدودها وأوجد هذا المجموع. «(٩٦ ، ٤٨ ، ٢٤ ، ...) ، ١٩٢»

٢٧ متتابعة هندسية حدودها موجبة ، مجموع حديها الأول والثانى يساوى ١٠٨ ومجموع حديها الثالث والرابع يساوى ١٢ أوجد المتتابعة وبين أنه يمكن إيجاد مجموع عدد غير منته من حدودها وأوجد ذلك المجموع.
«(٨١ ، ٢٧ ، ٩ ، ...) ، ١٢١,٥»

---

٢٨ ($ح_ن$) متتابعة هندسية فيها : $ح_١ + ح_٤ = ٧٠$ ، $ح_٢ + ح_٣ = ٦٠$ أثبت أنه :
توجد متتابعتان ، وأنه يمكن إيجاد مجموع عدد غير منته من حدود إحداهما ، وأوجد هذا المجموع بدءًا من حدها الأول.
«١٦٢»

---

٢٩ متتابعة هندسية حاصل ضرب الحدود الثلاثة الأولى منها = ٦٤ ومجموع حدودها الثانى والثالث والرابع = ٧
أثبت أنه توجد متتابعتان يمكن جمع إحداهما إلى ∞ وأوجد هذا المجموع.
«١٦»

---

٣٠ متتابعة هندسية غير منتهية مجموع حدودها إلى ∞ يساوى ١٨ ومجموع مربعات تلك الحدود إلى ∞ يساوى ١٠٨ أوجد المتتابعة.
«(٩ ، $\frac{٩}{٢}$ ، $\frac{٩}{٤}$ ، ...)»

---

٣١ إذا كان مجموع الثلاثة حدود الأولى من متتابعة هندسية ١٤ ومجموع مربعاتها ٨٤ أثبت أنه توجد متتابعتان وأنه يمكن إيجاد مجموع إحداهما إلى ما لا نهاية وأوجد هذا المجموع.
«١٦»

---

٣٢ اكتشف الخطأ :

① يمكن إيجاد مجموع متسلسلة هندسية لا نهائية عندما تكون $|ر| \geq ١$

② مجموع عدد غير منته من حدود المتتابعة (١٦ ، ٨ ، ٤ ، ...) أكبر من ضعف حدها الأول.

ثالثًا مسائل تقيس مهارات التفكير

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

① متتابعة هندسية غير منتهية فيها الحدان الأول و الثانى عددان صحيحان موجبان مجموعهما = ٣
فإن : $ح_\infty$ = ...

(أ) ٤ (ب) ٨ (جـ) ٦٤ (د) ١٠٢٤

② إذا كان : $\sum_{ر=٠}^{\infty} \frac{أ}{(٤)^ر} = ١٦$ فإن : أ = ...

(أ) ٤ (ب) ٨ (جـ) ١٢ (د) ١٦

③ متتابعة هندسية لا نهائية حدها الأول = س ومجموع حدودها = ٥ فإن : ....

(أ) س ≥ ١٠ (ب) ٠ < س < ١٠ (جـ) س < -١٠ (د) -١٠ < س < ٠

④ متتابعة هندسية فيها $ح_{١٨}$ الأولى − $ح_{١٠}$ الأولى = س ، $ح_{١٥}$ الأولى − $ح_٧$ الأولى = ص
فإن : ر = ...

(أ) $\frac{س}{ص}$ (ب) $\sqrt{\frac{س}{ص}}$ (جـ) $\sqrt[٣]{\frac{س}{ص}}$ (د) $\sqrt{\frac{ص}{س}}$

(٥) متتابعة هندسية حدها الأول (أ) وأساسها (ر) وعدد حدودها (ن) ومجموع حدودها (ح) فإن مجموع مقلوبات هذه الحدود = ...

(أ) $\frac{ح}{أ ر^{ن-1}}$ (ب) $\frac{أ ح}{ر^{ن-1}}$ (جـ) $\frac{ح^2}{أ ر^{ن-1}}$ (د) $\frac{ح}{أ^2 ر^{ن-1}}$

(٦) متتابعة هندسية حدها الأول (أ) وحدها الأخير (ل) وعدد حدودها (ن) فإن حاصل ضرب جميع حدودها هو ....

(أ) $\left(\frac{أ}{ل}\right)^{\frac{ن}{2}}$ (ب) $(أ ل)^{ن}$ (جـ) $أ (ل)^{\frac{ن}{2}}$ (د) $(أ ل)^{\frac{ن}{2}}$

(٧) إذا كان : $س = \sum_{ن=.}^{\infty} جتا^{2ن} هـ$ ، $ص = \sum_{ن=.}^{\infty} جا^{2ن} هـ$ فإن : ....

(أ) س ص = ١ (ب) س ص = س + ص

(جـ) س + ص = ١ (د) س = ص

(٨) إذا كان : $ح_ن$ هو الحد النونى فى متتابعة هندسية حدودها أعداد صحيحة موجبة وكان :

$أ = \sum_{ن=1}^{1..} ح_{2ن}$ ، $ب = \sum_{ن=1}^{1..} ح_{2ن+1}$ حيث أ ≠ ب فإن أساس المتتابعة الهندسية = ...

(أ) $\frac{أ}{ب}$ (ب) $\frac{ب}{أ}$ (جـ) $\sqrt{\frac{أ}{ب}}$ (د) $\sqrt{\frac{ب}{أ}}$

(٩) مجموع المتسلسلة (١ + ٢ س + ٣ $س^2$ + ٤ $س^3$ + ... إلى ∞) لكل ٠ < س < ١ يساوى ....

(أ) $\frac{1}{1 - س}$ (ب) $\frac{1}{1 + س}$ (جـ) $\frac{1}{1 - 2 س}$ (د) $\frac{1}{(1 - س)^2}$

(١٠) إذا كان : ل ، م جذرى المعادلة ١٦ $س^2$ + ١ = ١٦ س فإن : $\sum_{ر=1}^{\infty} ل^{ر} + \sum_{ر=1}^{\infty} م^{ر}$ = ...

(أ) ١٢ (ب) ١٤ (جـ) ١٦ (د) ٣٢

(١١) مجموع العشرين حدًا الأولى من المتتابعة (١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٨ ، ٧ ، ١٦ ، ...) هو ....

(أ) ٥١٢ (ب) ١٠٢٣ (جـ) ١١٢٣ (د) ٢١٤٦

تطبيقات حياتية

١ الربط بالأحياء : إذا تضاعفت زراعة البكتيريا كل يوم (فى أحد الأوساط الغذائية) ، فكم يكون عدد البكتيريا بعد عشرة أيام إذا كان عددها فى اليوم الأول ٨٠٠ «٨١٨٤٠٠»

٢ خزان به ٦١٣٨ لترًا من الماء ، يتسرب منه فى أول يوم ٦ لترات وفى اليوم الثانى ١٢ لترًا وفى اليوم الثالث ٢٤ لترًا وهكذا فبعد كم يوم يصبح الخزان فارغًا ؟ «١٠»

٣ الربط بالدخل : بدأ شخص العمل فى مصنع بمرتب سنوى قدره ٧٢٠٠ جنيه على أن يحصل على علاوة سنوية قدرها ٦ ٪ من مرتب السنة السابقة. احسب مرتبه فى السنة السابعة ، ومجموع ما يحصل عليه فى السنوات السبع الأولى. «١٠٢١٣ ، ٦٠٤٣٦ جنيه»

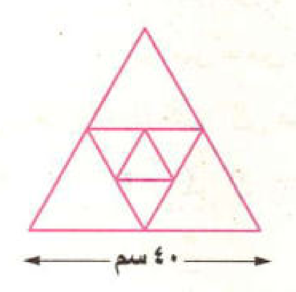
٤ شركة لتخزين المحاصيل الزراعية لديها سبعة صوامع لتخزين القمح ، تسع الصومعة الأولى ٢٧٠ طنًا من القمح ، وكل صومعة بعد ذلك تسع ثلثى الكمية التى تسعها الصومعة السابقة لها ، هل يمكن للشركة أن تقوم بتخزين ٨٠٠ طن من القمح ؟ وما أكبر كمية تستطيع الشركة تخزينها بصوامعها مقربًا الناتج لأقرب طن ؟ «٧٦٣ طن»

---

٥ **الربط بالتعدين :** منجم للذهب ينتج فى العام الأول ٤٢٠٠ كجم من الذهب ، ويتناقص إنتاج المنجم بمعدل ١٠ ٪ سنويًا من إنتاج السنة السابقة لها مباشرة. أوجد إنتاج المنجم فى السنة الثامنة ، ثم احسب إنتاج المنجم خلال الثمان سنوات الأولى. «٢٠٠٨,٨ ، ٢٣٩٢٠ كجم»



٦ **الربط بالهندسة :**



يبين الشكل المقابل مثلثًا متساوى الأضلاع طول ضلعه ٤٠ سم ، رسم مثلث آخر نحو الداخل عن طريق توصيل النقاط التى تمثل منتصفات أضلاع المثلث الأكبر ، ويتم تكرار رسم المثلثات الداخلية بنفس الطريقة فأوجد لأقرب عدد صحيح مجموع محيطات الـ ١٠ مثلثات الأولى فى هذا النمط. «٢٤٠ سم»

---

٧ أيهما يعطى لك دخلاً أكثر على مدى ٢٥ عامًا : عمل يبدأ بمرتب سنوى قدره ١٠٠٠ جنيه مع علاوة ثابتة سنوية قدرها ٣٠ جنيهًا أو عمل يبدأ بنفس المرتب السنوى مع علاوة سنوية قدرها ٢٪ من قيمة مرتب السنة السابقة ؟ وما الفرق بين الدخلين ؟ «١٩٧٠ جنيهًا»

---

٨ يتناقص إنتاج بئر بترول سنويًا بمعدل ٥٪ عن إنتاج السنة السابقة له مباشرة فإذا كان إنتاج البترول فى السنة الأولى ٤٨٠٠٠ برميل فأوجد أقصى ما يمكن إنتاجه من هذا البئر. «٩٦٠٠٠٠ برميل»

---

٩ **الربط بالفيزياء :** دحرجت كرة صغيرة من الحديد على مستوى أفقى فإذا قطعت الكرة فى الدقيقة الأولى ٢٥ مترًا ثم بدأت تقطع ٦٠ ٪ فقط فى كل دقيقة تالية من المسافة التى قطعتها فى الدقيقة السابقة. فأوجد المسافة الكلية التى قطعتها الكرة حتى تقف. «$\frac{١٢٥}{٢}$ متر»

---

١٠ كرة من المطاط تسقط من ارتفاع ١٠ أمتار على الأرض وترتد رأسيًا إلى نصف الارتفاع الذى سقطت منه فى كل مرة ترتد فيها لأعلى ، أوجد مجموع المسافات التى قطعتها الكرة حتى تسكن. «٣٠ متر»

الوحدة الثانية

التباديل والتوافيق

1 2 3

يمكنك حل الامتحانات التفاعلية على الدروس من خلال مسح QR code الخاص بكل امتحان



الدرس

1

مبدأ العد - التباديل

مبدأ العد الأساسى

تعريف

إذا كان عدد طرق إجراء عمل ما يساوى $م_{١}$ طريقة وعدد طرق إجراء عمل ثان $م_{٢}$ طريقة وعدد طرق إجراء عمل ثالث $م_{٣}$ طريقة وهكذا ... فإن : عدد طرق إجراء هذه الأعمال معًا = $م_{١} \times م_{٢} \times م_{٣} \times ... \times م_{ن}$

مثال ١

بكم طريقة يمكن لشخص الدخول والخروج من محل له ثلاثة أبواب مرقمة بالأرقام ١ ، ٢ ، ٣ ؟

الحل

عدد طرق الدخول = ٣ طرق (يمكن الدخول من الباب رقم ١ أو ٢ أو ٣ أى بثلاث طرق)

عدد طرق الخروج = ٣ طرق (يمكن الخروج من الباب رقم ١ أو ٢ أو ٣ أى بثلاث طرق)

وبحسب مبدأ العد يكون :

عدد طرق إجراء عمليتى الدخول والخروج معًا = عدد طرق الدخول × عدد طرق الخروج = ٣ × ٣ = ٩ طرق

ملاحظة

مبدأ العد ينتج لنا عدد الطرق التى يمكن بها إجراء عمليتين أو أكثر معًا ويمكن توضيح هذه الطرق باستخدام المخطط البيانى المقابل الذى يعرف باسم الشجرة البيانية :

دخول	خروج	(دخول ، خروج)
١	١	(١ ، ١)
	٢	(٢ ، ١)
	٣	(٣ ، ١)
٢	١	(١ ، ٢)
	٢	(٢ ، ٢)
	٣	(٣ ، ٢)
٣	١	(١ ، ٣)
	٢	(٢ ، ٣)
	٣	(٣ ، ٣)

لاحظ أن :

(١ ، ٢) يعبر عن دخول من الباب ١ وخروج من الباب ٢ بينما (٢ ، ١) يعبر عن دخول من الباب ٢ وخروج من الباب ١ ولذلك فإن : (١ ، ٢) ، (٢ ، ١) يعبران عن طريقتين مختلفتين للدخول والخروج.

مبدأ العد المشروط

مثال ٢

في المثال السابق إذا أضفنا شرطًا ألا يخرج الشخص من نفس الباب الذى دخل منه فكم يكون عدد طرق دخول وخروج هذا الشخص ؟

الحل

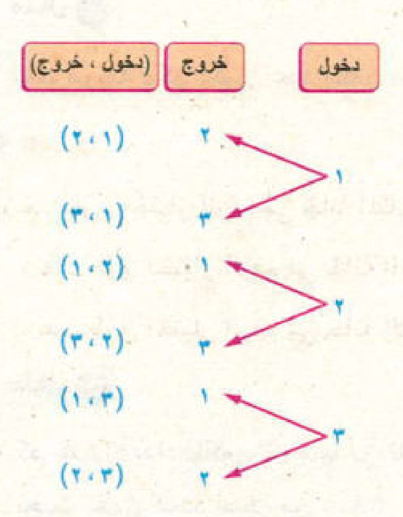
عدد طرق الدخول = ٣ طرق (يمكن الدخول من الباب رقم ١ أو ٢ أو ٣ أى بثلاث طرق)

عدد طرق الخروج = ٢ طريقة (يمكن الخروج من بابين فقط بعد استبعاد الباب الذى دخل منه)

وبحسب مبدأ العد يكون :

عدد طرق إجراء عمليتى الدخول والخروج معًا = ٣ × ٢ = ٦ طرق

والشجرة البيانية المقابلة توضح طرق الدخول والخروج.



مثال ٣

إذا كان لدى شخص ٤ بدل ، ٦ قمصان ، ٣ أربطة عنق.

بكم طريقة يمكن لهذا الشخص الظهور فى زى مكون من بدلة وقميص ورابطة عنق ؟

الحل

عدد طرق اختيار البدلة = ٤ طرق ، عدد طرق اختيار القميص = ٦ طرق

، عدد طرق اختيار رابطة العنق = ٣ طرق.

∴ عدد طرق اختيار الزى = ٤ × ٦ × ٣ = ٧٢ طريقة.

مثال ٤

كم عدد مكون من رقمين يمكن تكوينه من الأرقام ٢ ، ٤ ، ٥ ، ٦ ، ٨ إذا كان :

١ غير مسموح بتكرار أى رقم فى العدد. ٢ مسموحًا بتكرار الأرقام فى العدد.

الحـــل

١ عدد طرق اختيار الرقم فى خانة العشرات = ٥ طرق.

، عدد طرق اختيار الرقم فى خانة الآحاد = ٤ طرق.

(لاحظ استبعاد الرقم الذى تم اختياره فى خانة العشرات)

∴ عدد طرق تكوين العدد = ٥ × ٤ = ٢٠ طريقة.

٢ عدد طرق اختيار الرقم فى خانة العشرات = ٥ طرق.

، عدد طرق اختيار الرقم فى خانة الآحاد = ٥ طرق.

(لاحظ عدم استبعاد الرقم الذى تم اختياره فى خانة العشرات)

∴ عدد طرق تكوين العدد = ٥ × ٥ = ٢٥ طريقة.

مثال ٥

بكم طريقة يمكن تكوين عدد مكون من ٣ أرقام مختلفة من الأرقام {٠ ، ١ ، ٢ ، ٣} ؟

الحـــل

عدد طرق اختيار الرقم فى خانة المئات = ٣ طرق (لاحظ استبعاد العدد صفر من خانة المئات)

، عدد طرق اختيار الرقم فى خانة العشرات = ٣ طرق (لاحظ استبعاد الرقم المختار فى خانة المئات)

، عدد طرق اختيار الرقم فى خانة الآحاد = ٢ طريقة ∴ عدد طرق تكوين العدد = ٣ × ٣ × ٢ = ١٨ طريقة.

مثال ٦

كم عدد الأعداد المكون كل منها من ثلاثة أرقام مختلفة من مجموعة الأرقام {٢ ، ٣ ، ٧ ، ٨}
بحيث يكون العدد أصغر من ٨٠٠ ؟

الحـــل

لاحظ أنه لكى يكون العدد أصغر من ٨٠٠ يجب اختيار الرقم فى خانة المئات أقل من ٨

∴ عدد طرق اختيار الرقم فى خانة المئات = ٣ طرق (لاحظ استبعاد الرقم ٨ من الاختيار)

، عدد طرق اختيار الرقم فى خانة العشرات = ٣ طرق

(لاحظ اختيارنا للرقم ٨ والرقمان الباقيان من الاختيار السابق)

، عدد طرق اختيار الرقم فى خانة الآحاد = ٢ طريقة

∴ عدد طرق تكوين العدد الأصغر من ٨٠٠ = ٣ × ٣ × ٢ = ١٨ طريقة.

مضروب العدد

مضروب العدد الصحيح الموجب $ن$ يكتب على الصورة $\underline{|ن}$ ويساوي حاصل ضرب جميع الأعداد الصحيحة الموجبة الأصغر من أو تساوى $ن$

أى أن $\underline{|ن} = ن(ن - ١) \times (ن - ٢) \times ... \times ٣ \times ٢ \times ١$

ويكون عدد عوامل المضروب = $ن$ من العوامل

فمثلًا : • $\underline{|٥} = ٥ \times ٤ \times ٣ \times ٢ \times ١$ (خمسة عوامل)

• $\underline{|٩٩} = ٩٩ \times ٩٨ \times ٩٧ \times ... \times ٣ \times ٢ \times ١$ (٩٩ عاملًا)

ملاحظات

١ أصغر عوامل $\underline{|ن}$ يساوى واحد وأكبرهم = $ن$

٢ $\underline{|٠} = \underline{|١} = ١$ ومن ذلك إذا كان $\underline{|ن} = ١$ فإن : $ن$ = صفر أ، $ن = ١$

٣ يمكن كتابة مضروب العدد بدلالة مضروب عدد أقل منه أى أن :

$\underline{|ن} = ن\underline{|ن - ١} = ن(ن - ١)\underline{|ن - ٢} = ...$ حيث $ن \in ص^+$

فمثلًا : $\underline{|٥} = ٥\underline{|٤} = ٥ \times ٤\underline{|٣} = ...$

٤ مضروب أى عدد صحيح موجب يقبل القسمة على مضروب أى عدد صحيح موجب أقل منه

فمثلًا : $\frac{\underline{|٥}}{\underline{|٤}} = \frac{٥\underline{|٤}}{\underline{|٤}} = ٥$ ، $\frac{\underline{|١٢}}{\underline{|١٠}} = \frac{١٢ \times ١١\underline{|١٠}}{\underline{|١٠}} = ١٣٢$

مثال ٧

أوجد بدون استخدام الآلة الحاسبة كلًا مما يأتى :

١ $\frac{\underline{|١٢}}{\underline{|١٣}}$ ٢ $\underline{|٥} - \underline{|٤} - \underline{|٣}$ ٣ $\frac{\underline{|٨}}{\underline{|٦}} - \frac{\underline{|٧}}{\underline{|٥}}$

الحل

١ $\frac{\underline{|١٢}}{\underline{|١٣}} = \frac{\underline{|١٢}}{١٣\underline{|١٢}} = \frac{١}{١٣}$

٢ $\underline{|٥} - \underline{|٤} - \underline{|٣} = ٥ \times ٤\underline{|٣} - ٤\underline{|٣} - \underline{|٣}$

$= ٢٠\underline{|٣} - ٤\underline{|٣} - \underline{|٣} = ١٥\underline{|٣} = ١٥ \times (٣ \times ٢ \times ١) = ٩٠$

٣ $\frac{\underline{|٨}}{\underline{|٦}} - \frac{\underline{|٧}}{\underline{|٥}} = \frac{٨ \times ٧\underline{|٦}}{\underline{|٦}} - \frac{٧ \times ٦\underline{|٥}}{\underline{|٥}} = ٥٦ - ٤٢ = ١٤$

ملاحظة

يمكن استخدام الآلة الحاسبة فى إيجاد مضروب العدد بكتابة العدد ثم الضغط على SHIFT ثم $x!$ ثم =

فمثلاً : لحساب $\underline{|5}$ نضغط 5 ثم SHIFT ثم $x!$ ثم = فيظهر الناتج ١٢٠

مثال ٨

أوجد قيمة $ن$ إذا كان :

١ $\underline{|ن} = ٧٢٠$

٢ $\dfrac{\underline{|ن-١}}{\underline{|ن-٣}} = ٣٠$

٣ $ن\,\underline{|٢ن-١} = ١٢$

٤ $\dfrac{١}{\underline{|ن}} + \dfrac{٢}{\underline{|ن+١}} - \dfrac{٥٦}{\underline{|ن+٢}} = ٠$

الحل

١ $\because \underline{|ن} = ٧٢٠$

$\therefore \underline{|ن} = ٦ \times ٥ \times ٤ \times ٣ \times ٢ \times ١$

$\therefore \underline{|ن} = \underline{|٦}$ $\quad \therefore ن = ٦$

لاحظ أنه :

لمعرفة العدد الذى مضروبه	٧٢٠ ÷ ١ = ٧٢٠
= ٧٢٠ نبدأ بقسمة ٧٢٠ ÷ ١	٧٢٠ ÷ ٢ = ٣٦٠
ثم نقسم العدد الناتج ÷ ٢	٣٦٠ ÷ ٣ = ١٢٠
ثم على ٣ ثم على ٤ وهكذا	١٢٠ ÷ ٤ = ٣٠
إلى أن نصل إلى العدد ١ من	٣٠ ÷ ٥ = ٦
ناتج القسمة :	٦ ÷ ٦ = ١

٢ $\because \dfrac{\underline{|ن-١}}{\underline{|ن-٣}} = ٣٠$

$\therefore \dfrac{(ن-١)(ن-٢)\underline{|ن-٣}}{\underline{|ن-٣}} = ٣٠$

$\therefore (ن-١)(ن-٢) = ٦ \times ٥$

$\therefore ن - ١ = ٦$ $\quad \therefore ن = ٧$

٣ $\because ن\,\underline{|٢ن-١} = ١٢$ (بضرب الطرفين × ٢)

$\therefore ٢ن\,\underline{|٢ن-١} = ٢٤$ $\quad \therefore \underline{|٢ن} = ٢٤$

$\therefore \underline{|٢ن} = \underline{|٤}$ $\quad \therefore ٢ن = ٤$ $\quad \therefore ن = ٢$

٤ $\because \dfrac{١}{\underline{|ن}} + \dfrac{٢}{\underline{|ن+١}} - \dfrac{٥٦}{\underline{|ن+٢}} = ٠$

$\therefore \dfrac{١}{\underline{|ن}} + \dfrac{٢}{(ن+١)\underline{|ن}} - \dfrac{٥٦}{(ن+٢)(ن+١)\underline{|ن}} = ٠$ (بالضرب × $\underline{|ن}$)

$\therefore ١ + \dfrac{٢}{ن+١} - \dfrac{٥٦}{(ن+٢)(ن+١)} = ٠$ $\quad \therefore ١ + \dfrac{٢}{ن+١} = \dfrac{٥٦}{(ن+٢)(ن+١)}$

$\therefore \dfrac{ن+١+٢}{ن+١} = \dfrac{٥٦}{(ن+٢)(ن+١)}$ $\quad \therefore ن+٣ = \dfrac{٥٦}{ن+٢}$

$\therefore (ن+٣)(ن+٢) = ٥٦$ $\quad \therefore (ن+٣)(ن+٢) = ٨ \times ٧$

$\therefore ن+٣ = ٨$ $\quad \therefore ن = ٥$

الترتيب فى صف - الترتيب فى دائرة

١ ترتيب $ن$ من الأشياء فى صف واحد

الأول	الثانى	الثالث	الرابع	....	النونى

- عدد طرق اختيار الشىء فى المكان الأول = $ن$
- عدد طرق اختيار الشىء فى المكان الثانى = ($ن$ − ١)

«لاحظ أن عدد الطرق نقص بمقدار واحد بعد وضع أحد الأشياء فى المكان الأول».

- عدد طرق اختيار الشىء فى المكان الثالث = ($ن$ − ٢) ... وهكذا

إلى أن نصل إلى عدد طرق اختيار الشىء فى المكان النونى = ١

∴ عدد طرق ترتيب $ن$ من الأشياء فى صف واحد

= $ن$ ($ن$ − ١) ($ن$ − ٢) ($ن$ − ٣) ... × ٣ × ٢ × ١ = $\underline{|ن}$

أى أن عدد طرق ترتيب $ن$ من الأشياء فى صف واحد = $\underline{|ن}$

٢ ترتيب $ن$ من الأشياء على دائرة

حيث إنه ليس للدائرة نقطة بداية أو نقطة نهاية فإن الترتيب يظهر بعد وضع الشىء الأول فى أى مكان على الدائرة ثم :

- اختيار الشىء فى المكان الثانى بطرق عددها ($ن$ − ١)
- اختيار الشىء فى المكان الثالث بطرق عددها ($ن$ − ٢) ... وهكذا

إلى أن نصل إلى عدد طرق اختيار الشىء فى المكان النونى وهو ١

∴ عدد طرق ترتيب $ن$ من الأشياء على دائرة

= ($ن$ − ١) ($ن$ − ٢) ($ن$ − ٣) ... × ٣ × ٢ × ١ = $\underline{|ن − ١}$

أى أن عدد طرق ترتيب $ن$ من الأشياء على دائرة = $\underline{|ن − ١}$

مثال ٩

بكم طريقة يمكن لمجموعة من ٦ أشخاص فى حفل أن يرتبوا أنفسهم بحيث يجلسون :

١ فى صف واحد.　　　　٢ حول مائدة مستديرة.

الحــل

١ يمكن للأشخاص الستة أن يجلسوا فى صف بطرق عددها = ⌊٦ = ٦ × ٥ × ٤ × ٣ × ٢ × ١ = ٧٢٠ طريقة.

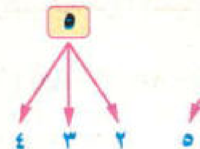
٢ يمكن للأشخاص الستة أن يجلسوا حول مائدة مستديرة بطرق عددها

= ⌊٦ − ١ = ⌊٥ = ٥ × ٤ × ٣ × ٢ × ١ = ١٢٠ طريقة.

التبــاديــل

عند تكوين عدد مكون من رقمين مختلفين من الأرقام ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥

فإن عدد طرق تكوين العدد = عدد طرق اختيار الرقم فى خانة العشرات × عدد طرق اختيار الرقم فى خانة الآحاد = ٤ × ٣ = ١٢ طريقة

الأعداد هى ٢٣ ، ٢٤ ، ٢٥ ، ٣٢ ، ٣٤ ، ٣٥ ، ٤٢ ، ٤٣ ، ٤٥ ، ٥٢ ، ٥٣ ، ٥٤

وهذه الأعداد تمثل كل التبديلات الممكنة للأرقام ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ باختيار رقمين منهم فى كل مرة وعدد هذه الأعداد (التبديلات) يرمز له بالرمز $^{٤}ل_{٢}$ وتقرأ (٤ لام ٢)　　**أى أن :** $^{٤}ل_{٢}$ = ٤ × ٣ = ١٢ طريقة.

تعريــف

يرمز لعدد تباديل ن من العناصر المتمايزة مأخوذ منها ر من العناصر فى كل مرة بالرمز $^{ن}ل_{ر}$ حيث :

١ $^{ن}ل_{ر}$ = ن (ن − ١) (ن − ٢) ... (ن − ر + ١) حيث ١ ≤ ر ≤ ن ، ن ، $^{ن}ل_{ر}$ ∈ $ص^{+}$

٢ $^{ن}ل_{ر}$ = ١ عندما ر = ٠.

فمثلًا :

- $^{٩}ل_{٦}$ = حاصل ضرب ٦ عوامل أكبرهم ٩ وأصغرهم (٩ − ٦ + ١) = ٤ وكل عامل ينقص بمقدار ١ عن سابقه

أى أن : $^{٩}ل_{٦}$ = ٩ × ٨ × ٧ × ٦ × ٥ × ٤

- $^{ن}ل_{٧}$ = ن (ن − ١) (ن − ٢) × ... × (ن − ٧ + ١)

= ن (ن − ١) (ن − ٢) × ... × (ن − ٦) (٧ عوامل أكبرهم ن وأصغرهم ن − ٦)

ملاحظات

١ $\;{}^{ن}ل_{ر} = \dfrac{ن!}{(ن - ر)!}$

فمثلًا : ${}^{٧}ل_{٣} = \dfrac{٧!}{(٧ - ٣)!} = \dfrac{٧!}{٤!}$ ، ${}^{ن}ل_{ر - ١} = \dfrac{ن!}{(ن - (ر - ١))!} = \dfrac{ن!}{(ن - ر + ١)!}$

٢ $\;{}^{ن}ل_{.} = ١$

الإثبات : ${}^{ن}ل_{.} = \dfrac{ن!}{(ن - .)!} = \dfrac{ن!}{ن!} = ١$ **فمثلًا :** ${}^{٥}ل_{.} = ١$ ، ${}^{(ن - ١)}ل_{.} = ١$

٣ $\;{}^{ن}ل_{ن} = ن!$

الإثبات : ${}^{ن}ل_{ن} = \dfrac{ن!}{(ن - ن)!} = \dfrac{ن!}{.!} = \dfrac{ن!}{١} = ن!$ **فمثلًا :** ${}^{٥}ل_{٥} = ٥!$ ، ${}^{٣}ل_{٣} = ٣!$

مثال ١٠

أوجد :

١ ${}^{٨}ل_{٢}$	٢ ${}^{١٢}ل_{٣}$	٣ ${}^{ن}ل_{٤}$
٤ ${}^{ن + ٢}ل_{٣}$	٥ ${}^{ن - ٢}ل_{٥}$	٦ ${}^{ن + ١}ل_{ر + ١}$

الحل

١ ${}^{٨}ل_{٢} = ٨ \times ٧ = ٥٦$

٢ ${}^{١٢}ل_{٣} = ١٢ \times ١١ \times ١٠ = ١٣٢٠$

٣ ${}^{ن}ل_{٤} = ن(ن - ١)\,(ن - ٢)\,(ن - ٣)$

٤ ${}^{ن + ٢}ل_{٣} = (ن + ٢)\,(ن + ١)\,ن$

٥ ${}^{ن - ٢}ل_{٥} = (ن - ٣)\,(ن - ٤)\,(ن - ٥)\,(ن - ٦)\,(ن - ٧)$

٦ ${}^{ن + ١}ل_{ر + ١} = (ن + ١)\,(ن)\,(ن - ١)\,(ن - ٢) \dots ((ن + ١) - (ر + ١) + ١)$

$= (ن + ١)\,(ن)\,(ن - ١)\,(ن - ٢) \dots (ن + ١ - ر - ١ + ١)$

$= (ن + ١)\,(ن)\,(ن - ١)\,(ن - ٢) \dots (ن - ر + ١)$

ملاحظة (استخدام الآلة الحاسبة)

يمكن استخدام الآلة الحاسبة فى إيجاد ناتج التبديل كما يلى :

١ ${}^{٧}ل_{٥} = ٢٥٢٠$

ابدأ ← 7 SHIFT × 5 = 2520

٢ ${}^{٤}ل_{٤} = ٤! = ٢٤$

ابدأ ← 4 SHIFT x! = 24

مثال ١١

إذا كان : $^{١٣}ل_{ر} = ١٧١٦٠$ **فأوجد قيمة : ر** **ثم أوجد :** $^{٢ر+١}ل_{٣}$

الحل

نوجد مجموعة من العوامل المتتالية التى أكبرها ١٣ وذلك بقسمة العدد ١٧١٦٠ على ١٣ ثم بقسمة الناتج على ١٢ ثم بقسمة الناتج على ١١ وهكذا حتى نصل إلى الواحد الصحيح.

$$١٧١٦٠ \div ١٣ = ١٣٢٠$$
$$١٣٢٠ \div ١٢ = ١١٠$$
$$١١٠ \div ١١ = ١٠$$
$$١٠ \div ١٠ = ١$$

فنجد أن $١٧١٦٠ = ١٣ \times ١٢ \times ١١ \times ١٠ = {}^{١٣}ل_{٤}$

$\therefore {}^{١٣}ل_{ر} = {}^{١٣}ل_{٤}$ $\quad \therefore ر = ٤$

$\therefore {}^{٢ر+١}ل_{٣} = {}^{٢(٤)+١}ل_{٣} = {}^{٩}ل_{٣} = ٩ \times ٨ \times ٧ = ٥٠٤$

مثال ١٢

إذا كان : $^{٢ن+١}ل_{٤} : {}^{٢ن-١}ل_{٣} = ٧٢ : ٥$ **فأوجد قيمة :** $^{٢ن}ل_{ن}$

الحل

$\because {}^{٢ن+١}ل_{٤} = \frac{|\underline{٢ن+١}}{|\underline{٢ن+١-٤}} = \frac{|\underline{٢ن+١}}{|\underline{٢ن-٣}}$

، $\because {}^{٢ن-١}ل_{٣} = \frac{|\underline{٢ن-١}}{|\underline{٢ن-١-٣}} = \frac{|\underline{٢ن-١}}{|\underline{٢ن-٤}}$

$\because {}^{٢ن+١}ل_{٤} : {}^{٢ن-١}ل_{٣} = ٧٢ : ٥$ $\quad \therefore \frac{|\underline{٢ن+١}}{|\underline{٢ن-٣}} \div \frac{|\underline{٢ن-١}}{|\underline{٢ن-٤}} = \frac{٧٢}{٥}$

$\therefore \frac{|\underline{٢ن+١}}{|\underline{٢ن-٣}} \times \frac{|\underline{٢ن-٤}}{|\underline{٢ن-١}} = \frac{٧٢}{٥}$ $\quad \therefore \frac{(٢ن+١)\,٢ن\,|\underline{٢ن-١}}{(٢ن-٣)\,|\underline{٢ن-٤}} \times \frac{|\underline{٢ن-٤}}{|\underline{٢ن-١}} = \frac{٧٢}{٥}$

$\therefore \frac{٤ن^{٢}+٢ن}{٢ن-٣} = \frac{٧٢}{٥}$ $\quad \therefore ٢٠ن^{٢} + ١٠ن = ١٤٤ن - ٢١٦$

$\therefore ٢٠ن^{٢} - ١٣٤ن + ٢١٦ = ٠$ $\quad \therefore ١٠ن^{٢} - ٦٧ن + ١٠٨ = ٠$

$\therefore (ن-٤)(١٠ن-٢٧) = ٠$ $\quad \therefore ن = ٤$ أو $ن = ٢,٧$ (مرفوض)

$\therefore {}^{٢ن}ل_{ن} = {}^{٨}ل_{٤} = ٨ \times ٧ \times ٦ \times ٥ = ١٦٨٠$

مثال ١٣

إذا كان : $^{٨}ل_{ر} = ٥ \times {}^{٨}ل_{ر-١}$ **فأوجد قيمة :** $\frac{|\underline{ر}}{|\underline{ر+١}} + \frac{|\underline{ر-١}}{|\underline{ر}} + \frac{|\underline{ر-٣}}{|\underline{ر-٢}}$

الحل

$\because {}^{٨}ل_{ر} = ٥ \times {}^{٨}ل_{ر-١}$ $\quad \therefore \frac{|\underline{٨}}{|\underline{٨-ر}} = ٥ \times \frac{|\underline{٨}}{|\underline{٨-(ر-١)}}$

$\therefore \frac{|\underline{٨}}{|\underline{٨-ر}} = \frac{٥\,|\underline{٨}}{|\underline{٩-ر}}$ $\quad \therefore \frac{|\underline{٨}}{|\underline{٨-ر}} \times \frac{|\underline{٩-ر}}{|\underline{٨}} = ٥$

$\therefore \frac{(٩-ر)\,\underline{|٨-ر}}{\underline{|٨-ر}} = ٥$ $\therefore ٩ - ر = ٥$ $\therefore ر = ٤$

$\therefore \frac{\underline{|ر}}{\underline{|ر+١}} + \frac{\underline{|ر-١}}{\underline{|ر}} + \frac{\underline{|ر-٣}}{\underline{|ر-٢}} = \frac{\underline{|٤}}{\underline{|٥}} + \frac{\underline{|٣}}{\underline{|٤}} + \frac{\underline{|١}}{\underline{|٢}} = \frac{\underline{|٤}}{٥\,\underline{|٤}} + \frac{\underline{|٣}}{٤\,\underline{|٣}} + \frac{١}{٢} = \frac{١}{٥} + \frac{١}{٤} + \frac{١}{٢} = \frac{١٩}{٢٠}$

مثال ١٤

إذا كان : ${}^{م+ن}ل_{٣} = ٢١٠$ ، ${}^{م-ن}ل_{٢} = ٦$ **فأوجد قيمتي : م ، ن**

الحل

$\because {}^{م+ن}ل_{٣} = ٢١٠$ $\therefore {}^{م+ن}ل_{٣} = ٧ \times ٦ \times ٥ = {}^{٧}ل_{٣}$ $\therefore م + ن = ٧$ (١)

، $\because {}^{م-ن}ل_{٢} = ٦$ $\therefore {}^{م-ن}ل_{٢} = ٣ \times ٢ = {}^{٣}ل_{٢}$ $\therefore م - ن = ٣$ (٢)

بجمع (١) ، (٢) : $\therefore ٢م = ١٠$ $\therefore م = ٥$

وبالتعويض فى (١) : $\therefore ن = ٢$

مثال ١٥

أثبت أن : ${}^{ن}ل_{ر} + ر \times {}^{ن}ل_{ر-١} = {}^{ن+١}ل_{ر}$

الحل

$\because {}^{ن}ل_{ر} + ر \times {}^{ن}ل_{ر-١} = \frac{\underline{|ن}}{\underline{|ن-ر}} + ر \times \frac{\underline{|ن}}{\underline{|ن-ر+١}} = \left(\frac{١}{\underline{|ن-ر}} + \frac{ر}{\underline{|ن-ر+١}}\right)\underline{|ن}$

$= \left(\frac{١}{\underline{|ن-ر}} + \frac{ر}{(ن-ر+١)\,\underline{|ن-ر}}\right)\underline{|ن} = \left(\frac{ن-ر+١+ر}{(ن-ر+١)\,\underline{|ن-ر}}\right)\underline{|ن}$

$= \frac{(ن+١)\,\underline{|ن}}{\underline{|ن-ر+١}} = \frac{\underline{|ن+١}}{\underline{|ن-ر+١}}$ (١)

، $\because {}^{ن+١}ل_{ر} = \frac{\underline{|ن+١}}{\underline{|ن+١-ر}} = \frac{\underline{|ن+١}}{\underline{|ن-ر+١}}$ (٢)

من (١) ، (٢) ينتج أن : ${}^{ن}ل_{ر} + ر\,{}^{ن}ل_{ر-١} = {}^{ن+١}ل_{ر}$

مثال ١٦

أوجد أقل قيمة للعدد ن تحقق المتباينة : ${}^{ن}ل_{٧} > {}^{ن}ل_{٦}$

الحل

$\because {}^{ن}ل_{٧} > {}^{ن}ل_{٦}$ $\therefore \frac{\underline{|ن}}{\underline{|ن-٧}} > \frac{\underline{|ن}}{\underline{|ن-٦}}$ (١)

$\therefore \underline{|ن-٦} > \underline{|ن-٧}$ $\therefore (ن-٦)\,\underline{|ن-٧} > \underline{|ن-٧}$

$\therefore ن - ٦ > ١$

∴ $\text{ن} > ٧$ ∴ $\text{ن} \in \{٨ ، ٩ ، ١٠ ، ...\}$

∴ أقل قيمة للعدد ن تحقق المتباينة هى $\text{ن} = ٨$

مثال ١٧

من مجموعة الأرقام {١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ ، ٧} أوجد :

١ كم عددًا مكونًا من ٤ أرقام مختلفة يمكن تكوينه.

٢ كم عددًا مكونًا من ٧ أرقام مختلفة يمكن تكوينه.

٣ كم عددًا رقم آحاده ٤ ويتكون من خمسة أرقام مختلفة يمكن تكوينه.

٤ كم عددًا فرديًا مكون من ٧ أرقام مختلفة يمكن تكوينه.

٥ كم عددًا أكبر من ٤٠٠ ويتكون من ٣ أرقام مختلفة يمكن تكوينه.

الحل

بفرض أن : $\text{س} = \{١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ ، ٧\}$ ∴ $\text{ن}(\text{س}) = ٧$

١ عدد الأعداد = $^{٧}\text{ل}_{٤} = ٧ \times ٦ \times ٥ \times ٤ = ٨٤٠$ عددًا.

٢ عدد الأعداد = $^{٧}\text{ل}_{٧} = \underline{|٧} = ٧ \times ٦ \times ٥ \times ٤ \times ٣ \times ٢ \times ١ = ٥٠٤٠$ عددًا.

٣ ∵ رقم الآحاد = ٤

∴ عدد طرق اختيار رقم الآحاد = ١ طريقة

ويتبقى ٦ عناصر (أرقام) نختار منهم ٤ أرقام لتكوين باقى العدد

∴ عدد الأعداد = $١ \times {}^{٦}\text{ل}_{٤} = ١ \times ٦ \times ٥ \times ٤ \times ٣ = ٣٦٠$ عددًا.

٤ لكى يكون العدد فرديًا يجب أن يكون رقم آحاده عددًا فرديًا أى من الأرقام ١ ، ٣ ، ٥ ، ٧

∴ عدد طرق اختيار رقم الآحاد = $^{٤}\text{ل}_{١} = ٤$ طرق

ويتبقى لنا من عناصر س ٦ أرقام نختار منهم ٦ أرقام لتكوين باقى العدد

∴ عدد الأعداد = $٤ \times {}^{٦}\text{ل}_{٦} = ٤ \times ٦ \times ٥ \times ٤ \times ٣ \times ٢ \times ١ = ٢٨٨٠$ عددًا.

٥ لكى يكون العدد أكبر من ٤٠٠ يجب أن يكون الرقم المختار فى خانة المئات أكبر من أو يساوى ٤ أى من الأرقام ٤ ، ٥ ، ٦ ، ٧

∴ عدد طرق اختيار رقم المئات = $^{٤}\text{ل}_{١} = ٤$ طرق

ويتبقى لنا من عناصر س ٦ أرقام نختار منهم رقمين بخانتى الآحاد والعشرات

∴ عدد الأعداد = $٤ \times {}^{٦}\text{ل}_{٢} = ٤ \times ٦ \times ٥ = ١٢٠$ عددًا.



من أسئلة الكتاب المدرسى • فهم • تطبيق • مستويات عليا

أولًا أسئلة الاختيار من متعدد

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

① $\underline{|٠} + \underline{|١} + \underline{|٢} + \underline{|٣}$ = ...

(أ) ٦ (ب) ٨ (جـ) ٩ (د) ١٠

② $^{٩}ل_{٠} + {}^{٧}ل_{١} + {}^{٣}ل_{٢}$ = ...

(أ) ١٤ (ب) ٢٥ (جـ) ٩٦ (د) ١٨٩

③ إذا كان : $\frac{١}{٢}\,\underline{|ن} = ١$ فإن : $\underline{|ن - ٢}$ = ...

(أ) ٤ (ب) ٢ (جـ) ١ (د) صفر

④ $\frac{\underline{|ن}}{ن}$ = ...

(أ) ١ (ب) $\underline{|ن}$ (جـ) $\underline{|ن - ١}$ (د) $\frac{ن}{ن - ١}$

⑤ $^{ن}ل_{٢}$ يمكن أن تساوى ....

(أ) ١٥ (ب) ١٦ (جـ) ١٧ (د) ٢٠

⑥ إذا كان : $^{٥}ل_{ر} = ٦٠$ فإن : ر = ...

(أ) ٤ (ب) ٣ (جـ) ٢ (د) ٥

⑦ إذا كان : $^{ن}ل_{٢} = ١٢٠$ فإن : ن = ...

(أ) ٦ (ب) ٥ (جـ) ٤ (د) ٣

⑧ مجموعة الحل فى ح للمعادلة : $\underline{|س} = ١$ هى ....

(أ) {١} (ب) {٠} (جـ) {٠ ، ١} (د) {١ ، −١}

⑨ إذا كان : ١٠ $\underline{|٢ن - ٢}$ = ٢٤٠ فإن : ن = ...

(أ) ٤ (ب) ٢ (جـ) ٣ (د) ٥

⑩ إذا كان : $\frac{١}{\underline{|س}} = \frac{٢}{\underline{|س + ١}}$ فإن : س = ...

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) ٢ (د) ٣

⑪ $\frac{^{٧}ل_{ر}}{^{٧}ل_{ر - ١}}$ = ...

(أ) ر (ب) ر − ١ (جـ) ٧ − ر (د) ٨ − ر

(١٢) إذا كان : ^{9}ل$_{ر-1}$ = ٥٠٤ فإن : |ر + ١ = ...

(أ) ٦ (ب) ٢٤ (جـ) ١٢٠ (د) ٧٢٠

(١٣) إذا كان : |$\frac{1}{2}$ ن = ١٢٠ فإن : ^{ن}ل$_{2}$ = ...

(أ) ٣٠ (ب) ٦٠ (جـ) ١٢٠ (د) ٧٢٠

(١٤) إذا كان : $\frac{1}{|9} + \frac{1}{|10} = \frac{س}{|11}$ فإن : س = ...

(أ) ١ (ب) ١١ (جـ) ١٢١ (د) ١٣٢

(١٥) ن |ن + |ن = |.............

(أ) ن (ب) ن + ١ (جـ) ن + ٢ (د) ن − ١

(١٦) عدد الأزواج المرتبة (أ ، ب) التي يمكن تكوينها من عناصر المجموعة {١ ، ٢ ، ٣} حيث أ ≠ ب هو ....

(أ) ٢ (ب) ٣ (جـ) ٦ (د) ٩

(١٧) عدد طرق ترتيب ٥ أشخاص في دائرة يساوي ....

(أ) ١ (ب) ٥ (جـ) ٢٤ (د) ١٢٠

(١٨) عدد طرق جلوس ٤ طلاب على أربعة مقاعد في صف يساوي ....

(أ) ١ (ب) ٤ + ٤ (جـ) ٤ × ٤ (د) ٤ × ٣ × ٢ × ١

(١٩) عدد طرق اختيار وجبة ومشروب من قائمة بها ٥ وجبات و ٤ مشروبات هي ....

(أ) ٩ (ب) ٢٠ (جـ) ٥ (د) ١

(٢٠) يحتوي رف أحد المكتبات على ٤ كتب مختلفة للكيمياء و ٣ كتب مختلفة للتاريخ وكتابين مختلفين للشعر فبكم طريقة يمكن اختيار كتاب من كل مادة ؟

(أ) ٤ + ٣ + ٢ (ب) ٤ × ٣ × ٢ (جـ) ١ + ١ + ١ (د) ١ × ١ × ١

(٢١) إذا أراد رجل شراء سيارة من بين الموديلات {أوبل – كيا – هوندا} وأراد أن يختار من بين الألوان {أبيض ، أسود ، فضي ، أحمر} بكم طريقة يمكن اختيار السيارة ؟

(أ) ٧ (ب) ١٢ (جـ) ١٤ (د) ٢٤

(٢٢) عدد الأعداد التي كل منها مكون من ثلاثة أرقام مختلفة من الأرقام ١ ، ٣ ، ٥ ، ٦ هو ....

(أ) ٩ (ب) ١٢ (جـ) ٢٤ (د) ٦٤

(٢٣) لجنة مؤلفة من ١٢ عضوًا ، بكم طريقة يمكن اختيار رئيس ونائب لهذه اللجنة ؟

(أ) ٢ (ب) ٢٣ (جـ) ٦٦ (د) ١٣٢

(٢٤) عدد طرق ترتيب حروف كلمة مصنع يساوي ....

(أ) ٤ (ب) ٩ (جـ) ١٠ (د) ٢٤

(٢٥) عدد الأعداد المكونة من رقمين مختلفين مأخوذة من مجموعة الأرقام {٥ ، ٣ ، ٠ ، ٤} يساوى ....

(أ) ٢ × ٣ (ب) ٢ × ٤ (جـ) ٣ × ٣ (د) ٤ × ٣

(٢٦) عدد الأعداد الفردية المكونة من ثلاثة أرقام مختلفة مأخوذة من الأرقام {٢ ، ٣ ، ٤ ، ٦} يساوى ....

(أ) ٣ × ٦ × ٨ (ب) ٣ × ٣ × ٤ (جـ) ٢ × ٣ × ٤ (د) ٢ × ٣ × ١

(٢٧) 📖 عدد طرق تكوين عدد أولى مكون من ٣ أرقام مختلفة من مجموعة الأرقام ٣ ، ٤ ، ٥ هو ....

(أ) ٦ (ب) ٣ (جـ) ١ (د) صفر

(٢٨) عدد طرق تكوين العدد ١٤٥٣ من الأعداد ١ ، ٣ ، ٤ ، ٥ هو ....

(أ) ٢٤ (ب) ١٦ (جـ) ١ (د) صفر

(٢٩) عدد طرق تكوين عدد مكون من ٣ أرقام من بين ٦ أرقام غير صفرية هو ....

(أ) ٤ × ٥ × ٦ (ب) ٤ + ٥ + ٦ (جـ) ٦ × ٦ × ٦ (د) ١ × ٢ × ٣

(٣٠) كم عدد زوجى مكون من أربعة أرقام مختلفة يمكن تكوينه من مجموعة الأرقام {١ ، ٣ ، ٤ ، ٥} ؟

(أ) ٥٤٣١ (ب) ٦٠ (جـ) ١٢ (د) ٦

(٣١) كم عدد مكون من ٣ أرقام مختلفة يمكن تكوينه من مجموعة الأرقام {٢ ، ٤ ، ٥ ، ٧} ويكون أصغر من ٥٠٠ ؟

(أ) ٦ (ب) ٨ (جـ) ١٢ (د) ٢٤

(٣٢) عدد طرق الإجابة عن ١٠ أسئلة من نوع الصواب والخطأ يساوى .... طريقة.

(أ) $|\underline{١٠}$ (ب) ١٠ (جـ) $٢^{١٠}$ (د) $١٠^{٢}$

(٣٣) عدد كل الأعداد المكونة من ٥ أرقام باستخدام ٠ ، ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ يساوى ....

(أ) ٢٥٠٠ (ب) ٩٦ (جـ) ١٢٠ (د) ٣١

(٣٤) عدد طرق تكوين عدد مكون من أربعة أرقام مختلفة من الأرقام {٢ ، ٣ ، ٤ ، ٧} بحيث يكون رقم العشرات زوجيًا هو ....

(أ) ١٥ (ب) ٢٤ (جـ) ١٢ (د) ٨

(٣٥) $\frac{|\underline{ن - ٢}}{|\underline{ن - ٣}}$ = ...

(أ) ن - ٢ (ب) ن - ٣ (جـ) ن (د) ن - ١

(٣٦) إذا كان : $^{ن}ل_{ن}$ = ٥٠٤٠ فإن : ن = ...

(أ) ١٠ (ب) ٥ (جـ) ٧ (د) ٣

(٣٧) إذا كان : |ن + ١ = ٣٠ |ن − ١ فإن : ن = ...

(أ) ٥ (ب) ٦ (جـ) ٢٩ (د) ٣٠

(٣٨) إذا كان : |ن − ١ = ١٢٠ ، |ن − ر = ٦ فإن : $^{ن}ل_{ر}$ = ...

(أ) ٧٢٠ (ب) ٦ × ٥ × ٤ (جـ) ٣ × ٤ × ٥ (د) ٦ × ٥

(٣٩) إذا كان : $\frac{|ن - ٣}{|٣} = \frac{|٥}{ن - ٢}$ فإن : $^{ن}ل_{٢}$ = ...

(أ) ٨ (ب) ٢٨ (جـ) ٥٦ (د) ٣٣٦

(٤٠) إذا كان : ن |٢ن − ١ = ٦٠ فإن : ن = ...

(أ) ٢ (ب) ٢,٥ (جـ) ٤ (د) ٥

(٤١) إذا كان : ٨ × ٧ × ٦ = $^{س}ل_{ص}$ فإن : س + ص يمكن أن يساوى ....

(أ) ٣٥ (ب) ١٨ (جـ) ١٣ (د) ١١

(٤٢) إذا كان : $\frac{|٢ن \; |ن - ١}{|٢ن - ١ \; |ن + ١} = \frac{١}{٣}$ فإن : ن = ...

(أ) ٣ (ب) ٥ (جـ) ٧ (د) ٩

(٤٣) مجموعة حل المعادلة : |ن − ١ = ن في ص هى ....

(أ) {٠} (ب) {١} (جـ) {٠ ، ١} (د) {١ ، ٢}

(٤٤) $\frac{٢ \times ٤ \times ٦ \times \cdots \times (٢ن - ٢) \times (٢ن)}{٢^{ن}}$ = ...

(أ) |٢ن (ب) |ن (جـ) ن |ن (د) ٢ |ن

(٤٥) إذا كانت : س = {س : س ∈ ط ، ١ ≤ س ≤ ٥}

وكانت : ص = {(أ ، ب) : أ ، ب ∈ س ، أ ≠ ب} فإن عدد عناصر ص ....

(أ) ٧ (ب) ١٠ (جـ) ٢٠ (د) ٢٥

(٤٦) ($ن^{٢}$ + ٣ن + ٢) |ن = |..............

(أ) $ن^{٢}$ (ب) ن + ١ (جـ) ن + ٢ (د) ن (ن + ٢)

(٤٧) إذا كان : $ن^{٢}$ + ٩ن + ٢٠ = $\frac{|ن + ٥}{س}$ فإن : س = ...

(أ) ن + ٣ (ب) |ن + ٣ (جـ) |ن + ٤ (د) $^{ن + ٥}ل_{٢}$

(٤٨) مجموعة حل المعادلة : $\frac{|س}{١٠} = {}^{س - ١}ل_{س - ٣}$ هى ....

(أ) {٥} (ب) {٦} (جـ) {٧} (د) {٨}

(٤٩) (ن + ١) (ن + ٢) (ن + ٣) × ⋯ × (٢ن) = ...

(أ) |٢ن − ١ (ب) $\frac{|٢ن}{|ن}$ (جـ) |٢ن + ١ (د) $\frac{|٢ن}{|ن + ١}$

(٥٠) إذا كان : |ن < ١٠٠ ، |ن + ١ > ١٠٠ فإن : ن = ...

(أ) ٤ (ب) ٥ (جـ) ٦ (د) ٧

(٥١) إذا كان : |ن عددًا أوليًا فإن : ن = ...

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) ٢ (د) ٣

(٥٢) ن(ن^{٢} − ١) (ن^{٢} − ٤) = ...

(أ) $^{ن-٤}ل_{٣}$ (ب) $^{ن+٢}ل_{٣}$ (جـ) $^{ن+٢}ل_{٥}$ (د) $^{ن-٢}ل_{٥}$

(٥٣) (|ن) (|ن) .... |ن^{٢}

(أ) < (ب) ≥ (جـ) ≤ (د) =

(٥٤) إذا كان : $^{ن}ل_{٥}$ = $^{ن}ل_{٤}$ فإن : ن = ...

(أ) ٢٠ (ب) ٩ (جـ) ٤ (د) ٥

(٥٥) إذا كان : ٢ $^{ن}ل_{٣}$ = $^{ن+١}ل_{٣}$ فإن : ن = ...

(أ) ٤ (ب) ٥ (جـ) ٦ (د) ٧

(٥٦) إذا كان : |٧ = $^{٧}ل_{س}$ فإن : س = ...

(أ) ٦ أ، ٧ (ب) ٧ فقط. (جـ) ١ أ، صفر (د) ٥٠٤٠

(٥٧) إذا كان : |٥ |٩ = ١٢ |ن فإن : ن = ...

(أ) ١٠ (ب) ١١ (جـ) ١٢ (د) ١٣

(٥٨) العامل المشترك الأكبر للأعداد : |ن ، |ن + ١ ، |ن + ٢ هو ....

(أ) |ن (ب) |ن + ٢ (جـ) ن (د) ن + ٢

(٥٩) المضاعف المشترك الأصغر للأعداد : |ن ، |ن + ١ ، |ن + ٢ هو ....

(أ) |ن (ب) |ن + ٢ (جـ) ن (د) ن + ٢

(٦٠) إذا كان : أ ، ب عددين متتاليين حيث أ > ب فإن : أب = ...

(أ) $^{أ}ل_{٢}$ (ب) $^{ب}ل_{٢}$ (جـ) $^{٢}ل_{أ}$ (د) $^{٢}ل_{ب}$

(٦١) إذا كان : |١٣ = ٢^{أ} × ب حيث ب لا تقبل القسمة على ٢ فإن : أ = ...

(أ) ٨ (ب) ٩ (جـ) ١٠ (د) ١١

(٦٢) إذا كانت : ٠ ≤ θ < ٣٦٠° فإن مجموعة حل المعادلة |جاθ = ١ هي ....

(أ) {صفر ، ١٨٠°} (ب) {٩٠° ، ٢٧٠°}

(جـ) {صفر ، ٩٠° ، ٢٧٠°} (د) {٩٠° ، ١٨٠°}

ثانيًا الأسئلة المقالية

١ أوجد قيمة ن التى تحقق كلًا مما يأتى :

(١) $\underline{|ن} = ٧٢٠$

(٢) $^{١٥}ل_{ن} = ٢٧٣٠$

(٣) $^{ن}ل_{٣} = ٥٠٤$

(٤) $^{(ن-١)}ل_{٤} = ١٢٠$

(٥) $^{ن}ل_{٠} + {}^{ن}ل_{١} + {}^{ن}ل_{٢} = ٥٠$

(٦) $\underline{|ن - ٤} = ١٢٠$

(٧) $ن \, \underline{|٢ن - ١} = ١٢$

(٨) $\frac{\underline{|ن + ١}}{\underline{|ن}} = ٥$

---

٢ أوجد مجموعة حل كل من المعادلات الآتية :

(١) $\underline{|ن - ٥} = ١$ «{٥ ، ٦}»

(٢) $\frac{\underline{|ن + ١}}{\underline{|ن - ١}} = ٤٢$ «{٦}»

(٣) $١٢ \times \underline{|ن} = \underline{|ن + ٢}$ «{٢}»

(٤) $\underline{|ن} = ٣٠ \, \underline{|ن - ٢}$ «{٦}»

---

٣ أجب عن الأسئلة الآتية :

(١) إذا كان : $^{ن}ل_{٤} = ١٤ \times {}^{ن-٢}ل_{٢}$ فأوجد قيمة : ن «٨ أ ٧»

(٢) إذا كان : $^{٥}ل_{ر} = ٢ \times {}^{٦}ل_{ر-١}$ فأوجد قيمة : ر «٣»

(٣) إذا كان : $^{ن-١}ل_{٢} : {}^{ن+١}ل_{٢} = ٥ : ١٢$ فأوجد قيمة : $\underline{|ن - ٣}$ «١٢٠»

(٤) إذا كان : $^{٢ن+١}ل_{ن-١} : {}^{٢ن-١}ل_{ن} = ٣ : ٥$ فما قيمة : ن «٤»

(٥) إذا كان : $^{ن}ل_{ر} = ٦٠٤٨٠٠$ ، $\underline{|ر} = ٥٠٤٠$ فأوجد قيمة : ن ، ر
ثم أوجد قيمة : $^{ن+ر}ل_{ن-ر}$ «١٠ ، ٧ ، ٤٠٨٠»

(٦) إذا كان العامل الأوسط فى مفكوك $^{ن}ل_{١١}$ يساوى ١٥ فأوجد قيمة : ن «٢٠»

---

٤ أثبت أن :

(١) $\frac{\underline{|ن + ١}}{\underline{|ن - ١}} - \frac{\underline{|ن}}{\underline{|ن - ٢}} = ٢ن$

(٢) $\frac{\underline{|ن + ٣}}{\underline{|ن}} = (ن + ٣) \, {}^{ن+٢}ل_{٢}$

(٣) $\frac{١}{\underline{|ن}} - \frac{١}{\underline{|ن + ١}} + \frac{١}{\underline{|ن + ٢}} = \frac{ن + ١}{(ن + ٢) \, \underline{|ن}}$

(٤) $\frac{\underline{|٢}}{\underline{|٦}} + \frac{\underline{|٣}}{\underline{|٧}} + \frac{\underline{|٤}}{\underline{|٨}} = \frac{٢٣}{\underline{|٧}}$

(٥) $^{ن+١}ل_{ر+١} = (ن + ١) \times {}^{ن}ل_{ر}$

(٦) $\frac{^{ن}ل_{ر}}{\underline{|ر}} = \frac{ن}{ر} \times \frac{^{ن-١}ل_{ر-١}}{\underline{|ر - ١}}$

(٧) $^{ن}ل_{ر} : {}^{ن-١}ل_{ر-١} = ن$ ومن ذلك استنتج قيمة : $^{٩٧}ل_{٤٠} : {}^{٩٦}ل_{٣٩}$ «٩٧»

---

٥ أوجد قيمة ن إذا كان :

(١) $\frac{١}{\underline{|ن}} + \frac{٢}{\underline{|ن + ١}} = \frac{٥٦}{\underline{|ن + ٢}}$ «٥»

(٢) $\frac{\underline{|ن + ١}}{\underline{|ن + ٢}} + \frac{\underline{|ن}}{\underline{|ن + ١}} = \frac{١٣}{٤٢}$ «٥»

٦ أوجد :

(١) عدد الطرق المختلفة لجلوس ٥ طلاب على ٧ مقاعد فى صف واحد. «٢٥٢٠»

(٢) عدد طرق ترتيب ٩ أشخاص حول مائدة على شكل دائرة. «٤٠٣٢٠»

(٣) عدد طرق اختيار رئيس ونائب رئيس وسكرتير من لجنة مكونة من عشرة أشخاص. «٧٢٠»

(٤) بكم طريقة يمكن لحسام أن يتناول وجبة ومشروبًا من ثلاث وجبات (كفتة - فراخ - سمك) ومشروبين (عصير - مياه غازية) (مثّل ذلك بمخطط الشجرة البيانية). «٦»

(٥) كم يبلغ عدد الترتيبات التى يمكن أن يتشكل كل منها من خمسة حروف مختلفة من الأبجدية العربية. «١١٧٩٣٦٠٠»

(٦) بكم طريقة يمكن تكوين عددًا مكونًا من ثلاثة أرقام بحيث يكون رقم الآحاد من العناصر {٣ ، ٧} ورقم العشرات من العناصر {٢ ، ٤ ، ٩} ورقم المئات من العناصر {١ ، ٥} «١٢»

(٧) كم عددًا مكونًا من رقمين مختلفين يمكن تكوينه من الأرقام ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ «١٢»

(٨) كم عدد الأعداد المكونة من ثلاثة أرقام مأخوذة من العناصر {٢ ، ٣ ، ٥} «٢٧»

(٩) كم عددًا مكونًا من رقمين يمكن تكوينه من الأرقام ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ «١٦»

(١٠) بكم طريقة يمكن تكوين عدد مكون من ٣ أرقام مختلفة من الأرقام {٠ ، ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤} «٤٨»

(١١) كم عددًا زوجيًا مكونًا من ٣ أرقام مختلفة يمكن تكوينه من مجموعة الأرقام {٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٧} «٢٤»

(١٢) بكم طريقة يمكن تكوين عدد مكون من أربعة أرقام مختلفة من الأرقام {٢ ، ٣ ، ٤ ، ٧} بحيث يكون رقم العشرات زوجيًا. «١٢»

---

٧ بكم طريقة يمكن تكوين عدد من الأرقام ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ ، ٧ ، ٨ ، ٩ ؟

(١) إذا كان كل عدد يتألف من ٣ أرقام مختلفة. «٢١٠»

(٢) إذا كان كل عدد يتألف من الأرقام جميعًا دون تكرار لأى رقم منها. «٥٠٤٠»

(٣) إذا كان كل عدد يتألف من ٥ أرقام مختلفة ويقبل القسمة على ٢ «١٠٨٠»

(٤) إذا كان كل عدد يتألف من ٤ أرقام مختلفة ورقم آحاده ٧ «١٢٠»

(٥) إذا كان كل عدد يتألف من ٤ أرقام مختلفة ويكون أصغر من ٦٠٠٠ «٣٦٠»

---

٨ إذا كانت : س = {٢ ، ٣ ، ٥ ، ٧ ، ٩}

(١) كم عددًا مكونًا من رقمين مختلفين يمكن تكوينه من هذه الأرقام ؟ «٢٠»

(٢) كم عددًا مكونًا من رقمين يمكن تكوينه من هذه الأرقام ؟ «٢٥»

③ كم عددًا مكونًا من ثلاثة أرقام مختلفة يمكن تكوينه من هذه الأرقام ؟ «٦٠»

④ كم عددًا مكونًا من ثلاثة أرقام مختلفة وأصغر من ٥٠٠ يمكن تكوينه من هذه الأرقام ؟ «٢٤»

⑤ كم عددًا مكونًا من أربعة أرقام مختلفة ورقم آحاده ٢ يمكن تكوينه من هذه الأرقام ؟ «٢٤»

---

٩ من مجموعة الحروف {أ ، ب ، ح ، ء ، هـ ، و} أوجد :

① عدد طرق اختيار حرف واحد. «٦»

② عدد طرق اختيار حرفين مختلفين مع مراعاة الترتيب. «٣٠»

---

١٠ إذا كانت : س = {س : س عدد طبيعي ، $١ \leq$ س ≤ ٧}

، ص = {(أ ، ب) حيث أ ، ب ∈ س ، أ ≠ ب}

فأوجد عدد عناصر كل من : س ، ص «٧ ، ٤٢»

---

١١ إذا كان : $^{س+ص}ل_٢ = ٥٠٤$ ، $^{س-ص}ل_٤ = ١٢٠$ **فأوجد قيمة :** $^{س}ل_{ص}$ «٤٢»

---

١٢ حل كلاً من المعادلات الآتية :

① $^{س+٢}ل_٢ = ٤٢$ س «٥»

② $^{٧}ل_{س}$ − س × $^{٧}ل_{س-١} = ٠$ «٤»

③ $\underline{|س-٣}$ × $^{س}ل_٣ = ٢٠$ $\underline{|س-٢}$ «٥»

④ $\underline{|س+٢} = ١٨٢$ × $^{س}ل_{١١}$ $\underline{|س-١١}$ «١٢»

---

١٣ أوجد مجموعة حل المعادلة : $^{س+٥}ل_٥ = ٣٠ × ^{س+٢}ل_٢$ إذا كانت : س ∈ ط «{١}»

---

١٤ إذا كان : $^{ن}ل_{١٠} < ^{ن}ل_{١٤}$ **فأوجد أقل قيمة للعدد : ن تحقق هذه المتباينة.** «١٦»

---

١٥ إذا كان : $^{أ+ب}ل_٤ = ٨٤٠$ ، $\underline{|أ-ب} = ٦$ **فأوجد قيمة كل من : أ ، ب ،** $\underline{|٢أ-٥ب}$ «٥ ، ٢ ، ١»

---

١٦ إذا كان : $^{ن}ل_{ر} = ٢٥٢٠$ ، $\underline{|ر} = ١٢٠$ **فأوجد قيمة :** $\underline{|٣ر-٢ن}$ «١»

---

١٧ أثبت أن : ① $\underline{|٨٠} = ٢^{٤٠}$ $\underline{|٤٠}$ (١ × ٣ × ٥ × ... × ٧٩)

② $\frac{\underline{|١٠٠}}{\underline{|٥٠}} = ٢^{٥٠}$ (١ × ٣ × ٥ × ... × ٩٩)

③ $\underline{|٢ن} = ٢^{ن}$ $\underline{|ن}$ (١ × ٣ × ٥ × ... × (٢ن − ١))

---

١٨ أثبت أن : $\frac{\underline{|ن}}{\underline{|ر}\ \underline{|ن-ر}} + \frac{\underline{|ن}}{\underline{|ر-١}\ \underline{|ن-ر+١}} = \frac{\underline{|ن+١}}{\underline{|ر}\ \underline{|ن-ر+١}}$

ثالثًا مسائل تقيس مهارات التفكير

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

① إذا كان : ${}^{ن}ل_{٢}$ ، ${}^{ن}ل_{٣}$ ، ${}^{ن+١}ل_{٣}$ في تتابع حسابي فإن : ن + |ن − ٣ = ...

(أ) ٤ (ب) ٥ (جـ) ١٢ (د) ٣١

② عدد حلول المعادلة : س = |س في ص يساوي ....

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) ٢ (د) عدد لا نهائي.

③ إذا كان : |ن يقبل القسمة على كل من ٧ ، ١٣ فإن : ....

(أ) ن ≥ ٧ (ب) ن = ١٠ (جـ) ٧ ≤ ن ≤ ١٣ (د) ن ≥ ١٣

④ إذا كان رقم الآحاد في |ن لا يساوي الصفر فإن : ....

(أ) ن > ٤ (ب) ن < ٥ (جـ) ن > ٩ (د) ن عدد فردي.

⑤ إذا كان : |ر = ن ، |ن = ر فإن : ر + ن = ...

(أ) ٢ (ب) صفر أ، ١ (جـ) ٢ أ، ٣ (د) ٢ أ، ٤

⑥ إذا كانت أطوال أضلاع مثلث هي $\frac{١}{٢}$ |ن ، |ن − ٢ ، |٢ − ن من السنتيمترات

فإن القيمة العددية لمساحة المثلث = ... سم^{٢}

(أ) $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ (ب) $\frac{\sqrt{٣}}{٤}$ (جـ) $\frac{\sqrt{٣}}{٨}$ (د) $\frac{\sqrt{٣}}{١٦}$

⑦ عند قسمة (|١ + |٢ + |٣ + |٤ + ... + |١٠٠) على ٧ يكون الباقي ....

(أ) ٠ (ب) ٣ (جـ) ٥ (د) ٦

⑧ إذا كان : |ن ، ٣ |ن ، |ن + ١ في تتابع هندسي فإن : ....

(أ) |ن ، ٤ |ن ، |ن + ١ في تتابع هندسي.

(ب) |ن ، ٤ |ن ، |ن + ١ في تتابع حسابي.

(جـ) |ن ، ٥ |ن ، |ن + ١ في تتابع هندسي.

(د) |ن ، ٥ |ن ، |ن + ١ في تتابع حسابي.

⑨ رقم الآحاد في العدد : |٠ + |١ + |٢ + |٣ + ... + |٢٠٢٢ هو ....

(أ) صفر (ب) ٤ (جـ) ٦ (د) ٩

⑩ إذا كان أ عدد طبيعي بحيث س = |أ + |أ + ١ + |أ + ٢ فإن العدد الصحيح ب الذي يحقق أن

$\frac{س}{ب}$ = |أ هو ....

(أ) عدد زوجي دائمًا. (ب) عدد فردي دائمًا.

(جـ) عدد أولي. (د) عدد مربع كامل.

تطبيقات حياتية

١ يقدم أحد محلات الآيس كريم ثلاثة أحجام وخمس نكهات

(صغير ، متوسط ، كبير) (فراولة ، مانجو ، ليمون ، حليب ، شيكولاتة)

كم عدد الاختيارات المتاحة لشراء واحد من هذه الأحجام

بإحدى هذه النكهات ؟ «١٥»



---

٢ إذا طلب منك عمل رقم سرى لإحدى الخزن مكون من ٤ أرقام ليس من بينهم الصفر

فأوجد عدد الطرق التى يمكن بها تكوين هذا الرقم السرى. «٦٥٦١»

---

٣ رقم تليفون يتكون من ٨ منازل

....	....	....	....	....	....	ح	٩

ح يجب أن تكون أحد الأرقام ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٨ بينما باقى المنازل تتألف من أى رقم دون قيد.

كم عدد أرقام التليفونات المختلفة المتاحة ؟ «٤٠٠٠٠٠٠»

---

٤ إذا علمت أن مجموعة أرقام شبكات المحمول فى إحدى الدول تتكون من إحدى عشر رقم ، فإذا كان الرقم (٠٢٥) ثابت من اليسار.

أوجد أكبر عدد من الخطوط يمكن أن تتحملها شبكات هذا المحمول. «١٠٠٠٠٠٠٠٠»

---

٥ تبدأ لوحات ترخيص السيارات فى إحدى المحافظات بثلاثة من الحروف الأبجدية يتبعها ثلاثة أرقام غير الصفر. كم عدد اللوحات التى يمكن الحصول عليها ؟ بفرض أنه لا يوجد تكرار لأى من الحروف أو الأرقام فى أى من لوحات التراخيص ؟ «٩٩٠٦٦٢٤»



الدرس

2

التوافيق

شخص لديه خمس شقق مرقمة من ١ إلى ٥ أراد أن يعرض شقتين منهم للبيع فبكم طريقة يمكن اختيار الشقتين ؟

للإجابة عن هذا السؤال نلاحظ ما يلى :

- اختيار الشقتين ١ ، ٤ مثلًا هو نفسه اختيار الشقتين ٤ ، ١ أى أنه ليس هناك أهمية للترتيب ولذلك نختار صيغة المجموعات {٤ ، ١} للتعبير عن هذا الاختيار وليس الأزواج المرتبة.
- استخدام التباديل يتم فى حالة أن يكون هناك أهمية للترتيب فى الاختيار ولذا فالتباديل لا تصلح فى الحالة السابقة.

لذلك توجد هناك صيغة رياضية تعبر عن الحالة السابقة تسمى التوافيق.

تعريف التوفيق

هو كل مجموعة يمكن تكوينها من مجموعة من الأشياء بأخذ بعضها أو كلها بصرف النظر عن ترتيبها.

وفى المثال السابق فإن طرق اختيار الشقتين (التوفيقات الممكنة) هى : {١ ، ٢} ، {١ ، ٣} ، {١ ، ٤} ، {١ ، ٥} ، {٢ ، ٣} ، {٢ ، ٤} ، {٢ ، ٥} ، {٣ ، ٤} ، {٣ ، ٥} ، {٤ ، ٥}

- يرمز لعدد التوفيقات السابقة بالرمز $^{٥}ق_{٢}$ «وتقرأ ٥ قاف ٢» أو بالرمز $\binom{٥}{٢}$ وتقرأ ٥ فوق ٢

وتستخدم للتعبير عن عدد جميع المجموعات الجزئية المكونة من عنصرين والتى يمكن تكوينها من مجموعة تحتوى خمسة عناصر.

بصفة عامة

$^{ن}ق_{ر}$ هو عدد التوافيق المكون كل منها من ر من الأشياء المختارة معًا من بين ن من العناصر حيث :

$٠ \leq ر \leq ن$

مثال توضيحى

إذا كانت : س = {٣ ، ٥ ، ٧ ، ٩} حيث عدد عناصر س = ٤ فيكون :

١ جميع المجموعات الجزئية من س هى :

* المجموعة الخالية : «∅» وعددها = ١ ∴ $^{4}ق_{0}$ = ١
* المجموعات الأحادية العنصر : {٣} ، {٥} ، {٧} ، {٩} وعددها = ٤ ∴ $^{4}ق_{1}$ = ٤
* المجموعات الثنائية العناصر : {٣ ، ٥} ، {٣ ، ٧} ، {٣ ، ٩} ، {٥ ، ٧} ، {٥ ، ٩} ، {٧ ، ٩} وعددها = ٦ ∴ $^{4}ق_{2}$ = ٦
* المجموعات الثلاثية العناصر : {٣ ، ٥ ، ٧} ، {٣ ، ٥ ، ٩} ، {٣ ، ٧ ، ٩} ، {٥ ، ٧ ، ٩} وعددها = ٤ ∴ $^{4}ق_{3}$ = ٤
* المجموعات الرباعية العناصر : {٣ ، ٥ ، ٧ ، ٩} وعددها = ١ ∴ $^{4}ق_{4}$ = ١

∴ عدد جميع المجموعات الجزئية = ١ + ٤ + ٦ + ٤ + ١ = ١٦ = ٢^{4}

∴ $^{4}ق_{0} + {}^{4}ق_{1} + {}^{4}ق_{2} + {}^{4}ق_{3} + {}^{4}ق_{4} = ٢^{4}$

وبصفة عامة $^{ن}ق_{0} + {}^{ن}ق_{1} + {}^{ن}ق_{2} + \cdots + {}^{ن}ق_{ن} = ٢^{ن}$

لاحظ أنه :

إذا كانت : س تحتوى على ن عنصر فإن عدد جميع المجموعات الجزئية منها = $٢^{ن}$

٢ جميع الأعداد ذات الرقمين التى يمكن تكوينها من عناصر س هى

٩٧	٩٥	٧٥	٩٣	٧٣	٥٣
٧٩	٥٩	٥٧	٣٩	٣٧	٣٥

، عددهم = $^{4}ل_{2}$ = ١٢

لاحظ أنه :

فى التوافيق نعتبر الاختيار {٣ ، ٥} هو نفس الاختيار {٥ ، ٣} لأننا لا نراعى الترتيب داخل المجموعة أما فى التباديل نعتبر التبديل ٥٣ يختلف عن ٣٥ إذ أن كلًا منهما يعطى عددًا مخالفًا للآخر.

أما جميع المجموعات الجزئية الثنائية العنصر التى يمكن تكوينها من عناصر س هى

{٣ ، ٥} ، {٣ ، ٧} ، {٣ ، ٩} ، {٥ ، ٧} ، {٥ ، ٩} ، {٧ ، ٩}

عددهم = $^{4}ق_{2}$ = ٦ ∴ عدد المجموعات الجزئية الثنائية × ٢ = عدد الأعداد ذات الرقمين.

∴ $^{4}ق_{2} \times \underline{|٢} = {}^{4}ل_{2}$ ∴ $^{4}ق_{2} = \frac{^{4}ل_{2}}{\underline{|٢}}$ وبالمثل يمكن إثبات أن $^{4}ق_{3} = \frac{^{4}ل_{3}}{\underline{|٣}}$

وبصفة عامة $^{ن}ق_{ر} = \frac{^{ن}ل_{ر}}{\underline{|ر}}$

قوانين التوافيق

* إذا كان : $ن$ ، $ر$ $\in$ ط ، $ر \leq ن$ فإن :

[١] $^{ن}ق_{ر} = \frac{^{ن}ل_{ر}}{\underline{|ر}} = \frac{\underline{|ن}}{\underline{|ر}\ \underline{|ن - ر}}$

[٢] $^{ن}ق_{ر} = {^{ن}ق_{ن-ر}}$ «قانون التبسيط»

[٣] $^{ن}ق_{ن} = {^{ن}ق_{٠}} = ١$ ، $^{ن}ق_{١} = ن$

[٤] إذا كان : $^{ن}ق_{س} = {^{ن}ق_{ص}}$ فإن : $س = ص$ أ، $س + ص = ن$

ملاحظات

[١] $^{ن}ل_{ر}$ ، $^{ن}ق_{ر}$ $\in$ $ص^{+}$

[٢] التبديل يكون «بدون تكرار» و «يراعى الترتيب» أما التوفيق يكون «بدون تكرار» و «لا يراعى الترتيب».

[٣] لكتابة رمز التوافيق ($^{n}c_{r}$) على الحاسبة نضغط على المفاتيح [SHIFT] [÷] من اليسار لليمين.

[٤] يستخدم قانون التبسيط لتبسيط التوافقات العددية إذا كانت : $ر > \frac{١}{٢}$ $ن$

[٥] $\because$ $ر$ $\in$ ط ، $ر \leq ن$ لذلك لا معنى للحديث عن $^{١٦}ق_{٢.}$ ، $^{٦}ق_{-٢}$ ، $^{٦}ق_{٥.}$ ..

مثال (١)

باستخدام الحاسبة أوجد قيمة : $^{٧}ق_{١} + {^{٥}ق_{٢}} - {^{٣٠}ق_{٠}}$.

الحـــل

بالضغط على المفاتيح التالية بالتتابع من اليسار إلى اليمين.

ابدأ ← [7] [SHIFT] [÷] [1] [+] [5] [SHIFT] [÷] [2] [−] [30] [SHIFT] [÷] [0] [=]

يظهر على الشاشة 16 $\therefore$ $^{٧}ق_{١} + {^{٥}ق_{٢}} - {^{٣٠}ق_{٠}} = ١٦$

مثال (٢)

إذا كان : $^{ن}ق_{٩} = {^{ن}ق_{١١}}$ **أوجد قيمة :** $^{ن}ق_{١٨}$

الحـــل

$\because$ $^{ن}ق_{٩} = {^{ن}ق_{١١}}$ $\therefore$ $ن = ٩ + ١١ = ٢٠$

$\therefore$ $^{ن}ق_{١٨} = {^{٢٠}ق_{١٨}} = {^{٢٠}ق_{٢}} = \frac{^{٢٠}ل_{٢}}{\underline{|٢}} = \frac{٢٠ \times ١٩}{٢ \times ١} = ١٩٠$

مثال ٣

إذا كان : $^{18}ق_{س+9} = {}^{18}ق_{2س+1}$ **أوجد قيمة : س**

الحـــل

$\because {}^{18}ق_{س+9} = {}^{18}ق_{2س+1}$

$\therefore$ س + ٩ = ٢ س + ١ ومنها ٢ س = ٨ $\quad\therefore$ س = ٤

أ، س + ٩ + ٢ س + ١ = ١٨ ومنها ٤ س = ٨ $\quad\therefore$ س = ٢

مثال ٤

إذا كان : $^{16}ق_{س+5} = {}^{16}ق_{2س-10}$ **أوجد قيمة : س**

الحـــل

$\because {}^{16}ق_{س+5} = {}^{16}ق_{2س-10}$ $\quad\therefore$ س + ٥ = ٢ س − ١٠

ومنها س = ١٥ (مرفوض) [لأنه يجب أن يكون س + ٥ ≤ ١٦]

أ، س + ٥ + ٢ س − ١٠ = ١٦ ومنها ٣ س = ٢١ $\quad\therefore$ س = ٧

مثال ٥

إذا كان : $^{ن}ق_{ن-2} = 45$ **فما قيمة : ن**

الحـــل

$\because {}^{ن}ق_{ن-2} = {}^{ن}ق_{ن-(ن-2)} = {}^{ن}ق_{2}$ $\quad\therefore {}^{ن}ق_{2} = 45$

$\therefore \frac{{}^{ن}ل_{2}}{\underline{|2}} = 45$ $\quad\therefore {}^{ن}ل_{2} = 45 \times \underline{|2} = 90 = 10 \times 9 = {}^{10}ل_{2}$

$\therefore$ ن = ١٠

حل آخر : $\because {}^{ن}ق_{2} = 45$ $\quad\therefore \frac{{}^{ن}ل_{2}}{\underline{|2}} = 45$ $\quad\therefore \frac{ن(ن-1)}{2 \times 1} = 45$

$\therefore$ ن(ن − ١) = ٩٠ = ١٠ × ٩ $\quad\therefore$ ن = ١٠

مثال ٦

إذا كان : $^{ن}ق_{3} = 35$ **أوجد قيمة : ن**

الحـــل

$\because {}^{ن}ق_{3} = 35$ $\quad\therefore \frac{ن(ن-1)(ن-2)}{3 \times 2 \times 1} = 35$

$\therefore$ ن(ن − ١) (ن − ٢) = ٣٥ × ٦ = ٧ × ٦ × ٥ $\quad\therefore$ ن = ٧

مثال ٧

إذا كان : $^{ن}ل_{ر} = ٧٢٠$ ، $^{ن}ق_{ر} = ١٢٠$ أوجد قيمة كل من : ن ، ر

ثم أوجد قيمة كل من : $^{ن-٢}ق_{ر٢}$ ، $^{ن-٢}ق_{ر٤}$

الحل

$\because \; ^{ن}ق_{ر} = \frac{^{ن}ل_{ر}}{\lfloor ر}$ $\quad \therefore \; ١٢٠ = \frac{٧٢٠}{\lfloor ر}$

$\therefore \; \lfloor ر = ٦ = ٣ \times ٢ \times ١ = \lfloor ٣$ $\quad \therefore \; ر = ٣$

$\therefore \; ^{ن}ل_{٣} = ٧٢٠$ $\quad \therefore \; ن(ن - ١)(ن - ٢) = ١٠ \times ٩ \times ٨$

$\therefore \; ن = ١٠$ $\quad \therefore \; ^{ن-٢}ق_{ر٢} = ^{١٠-٢}ق_{٦} = ^{٨}ق_{٦} = ^{٨}ق_{٢} = \frac{٨ \times ٧}{\lfloor ٢} = ٢٨$

، $^{ن-٢}ق_{ر٤} = ^{١٠-٢}ق_{١٢} = ^{٨}ق_{١٢}$ غير معرف [لأنه لابد أن يكون ن ≥ ر]

مثال ٨

إذا كان : $^{ن}ق_{٥} > ^{ن}ق_{٤}$ أثبت أن : ن يجب أن تكون أكبر من ٩

الحل

$\because \; ^{ن}ق_{٥} > ^{ن}ق_{٤}$ $\quad \therefore \; \frac{\lfloor ن}{\lfloor ٥ \; \lfloor ن - ٥} > \frac{\lfloor ن}{\lfloor ٤ \; \lfloor ن - ٤}$

$\therefore \; \frac{\lfloor ن}{٥ \; \lfloor ٤ \; \lfloor ن - ٥} > \frac{\lfloor ن}{\lfloor ٤ \; (ن - ٤) \; \lfloor ن - ٥}$ $\quad \therefore \; \frac{١}{٥} > \frac{١}{ن - ٤}$

$\therefore \; ن - ٤ > ٥$ $\quad \therefore \; ن > ٩$

مثال ٩

بكم طريقة يمكن اختيار لجنة من ٥ أشخاص من بين ١٣ شخصًا ؟

الحل

عدد الطرق = $^{١٣}ق_{٥} = ١٢٨٧$ طريقة.

> **لاحظ أنه :**
> لا يهمنا ترتيب الأشخاص فى اللجنة التى نختارها لذلك فإن هذه اللجان هى توفيقات.

مثال ١٠

لدينا ١٢ طالبًا ، ٨ طالبات بكم طريقة يمكن تكوين مجموعة :

١ مكونة من ٣ طلاب وطالبتين.

٢ مكونة من ٣ طلاب أو طالبتين.

الحـــل

عدد طرق اختيار ٣ طلاب من بين ١٢ طالبًا = $^{١٢}ق_{٣}$ = ٢٢٠ طريقة.

، عدد طرق اختيار طالبتين من بين ٨ طالبات = $^{٨}ق_{٢}$ = ٢٨ طريقة.

١ عدد طرق اختيار ٣ طلاب (و) طالبتين

= ٢٢٠ × ٢٨ = ٦١٦٠ طريقة.

٢ عدد طرق اختيار ٣ طلاب (أو) طالبتين

= ٢٢٠ + ٢٨ = ٢٤٨ طريقة.

لاحظ أنه :

* إذا كان الربط بين اختيارين بحرف «و» فإننا نضرب ناتجى الاختيارين.
* إذا كان الربط بين اختيارين بحرف «أو» فإننا نجمع ناتجى الاختيارين.

مثال ١١

١٠ أساتذة يراد ترشيح ٣ منهم للسفر لحضور مؤتمر علمى فى أمريكا و٣ آخرين منهم لحضور مؤتمر آخر يعقد فى نفس الوقت فى إنجلترا ، بكم طريقة يمكن اختيار البعثتين ؟

الحـــل

البعثة المسافرة إلى أمريكا نختارها من الأساتذة العشرة بطرق عددها = $^{١٠}ق_{٣}$ = ١٢٠ طريقة.

البعثة المسافرة إلى إنجلترا نختارها من الأساتذة السبعة المتبقين بطرق عددها = $^{٧}ق_{٣}$ = ٣٥ طريقة.

وحسب مبدأ العد يكون : عدد طرق اختيار البعثتين = ١٢٠ × ٣٥ = ٤٢٠٠ طريقة.

مثال ١٢

بكم طريقة يمكن انتخاب ٣ لجان كل منها تتكون من شخصين من بين ٨ أشخاص بحيث لا يشترك الشخص فى أكثر من لجنة واحدة ؟

الحـــل

عدد طرق انتخاب اللجنة الأولى = $^{٨}ق_{٢}$ = ٢٨ طريقة.

نلاحظ أنه باختيارنا شخصين للجنة الأولى فيتبقى ٦ أشخاص ننتخب منهم ٢ للجنة الثانية فيكون : عدد طرق انتخاب اللجنة الثانية = $^{٦}ق_{٢}$ = ١٥ طريقة وبعد ذلك يتبقى ٤ أشخاص ننتخب من بينهم ٢ للجنة الثالثة فيكون :

عدد طرق انتخاب اللجنة الثالثة = $^{٤}ق_{٢}$ = ٦ طرق.

∴ عدد الطرق التى يتم بها انتخاب اللجان الثلاث = ٢٨ × ١٥ × ٦ = ٢٥٢٠ طريقة.

مثال ١٣

بكم طريقة يمكن لمدرس أن يختار طالبًا أو أكثر من بين خمسة طلاب ؟

الحـــل

يتم اختيار إما ١ أو ٢ أو ٣ أو ٤ أو ٥ من الطلاب وبذلك يكون

عدد الطرق = $^{٥}ق_{١}$ + $^{٥}ق_{٢}$ + $^{٥}ق_{٣}$ + $^{٥}ق_{٤}$ + $^{٥}ق_{٥}$ = ٥ + ١٠ + ١٠ + ٥ + ١ = ٣١

مثال ١٤

إذا كانت : س = {١ ، ٢ ، ٣ ، ٤} ، ص = {(أ ، ب ، حـ) : أ ، ب ، حـ ∈ س ، أ ≠ ب ≠ حـ}

، ع = {{أ ، ب ، حـ} : أ ، ب ، حـ ∈ س} أوجد عدد عناصر كل من : ص ، ع

◄ **الحـــل**

[١] يتم اختيار ثلاثيات مرتبة (٣ عناصر)

من المجموعة س (٤ عناصر)

∴ عدد عناصر (ص) = $^{٤}ل_{٣}$ = ٢٤

لاحظ أننا : نستخدم التباديل لأن ص تتكون من ثلاثيات مرتبة.

[٢] يتم اختيار مجموعات يتكون كل منها من (٣ عناصر)

مأخوذة من المجموعة س (٤ عناصر)

∴ عدد عناصر (ع) = $^{٤}ق_{٣}$ = ٤

لاحظ أننا : نستخدم التوافيق لأن ع تتكون من مجموعات.

مثال ١٥

إذا كانت النقط أ ، ب ، حـ ، ء ، هـ تقع على دائرة **فأوجد :**

[١] عدد القطع المستقيمة التى يمكن رسمها بين هذه النقط.

[٢] عدد المثلثات التى يمكن رسمها ورؤوسها من هذه النقط.

[٣] عدد المضلعات التى يمكن رسمها ورؤوسها من هذه النقط.

◄ **الحـــل**

∵ عدد النقط = ٥

[١] عدد القطع المستقيمة = $^{٥}ق_{٢}$ = ١٠ [٢] عدد المثلثات = $^{٥}ق_{٣}$ = ١٠

[٣] عدد المضلعات = $^{٥}ق_{٣}$ + $^{٥}ق_{٤}$ + $^{٥}ق_{٥}$ = ١٠ + ٥ + ١ = ١٦

ملاحظة

إذا كان عدد أضلاع شكل هندسى = ن ضلع فإن عدد جميع القطع المستقيمة الممثلة فى الشكل = $^{ن}ق_{٢}$

، ∵ قطر الشكل الهندسى هو القطعة المستقيمة التى تصل بين رأسين غير متتاليين

∴ عدد أقطار الشكل الهندسى = عدد جميع القطع المستقيمة − عدد أضلاع الشكل = $^{ن}ق_{٢}$ − ن

فمثلًا : عدد أقطار الشكل الثلاثى = $^{٣}ق_{٢}$ − ٣ = صفر ، عدد أقطار الشكل الرباعى = $^{٤}ق_{٢}$ − ٤ = ٢

، عدد أقطار الشكل الخماسى = $^{٥}ق_{٢}$ − ٥ = ٥ ، عدد أقطار الشكل السداسى = $^{٦}ق_{٢}$ − ٦ = ٩

مثال (١٦)

أوجد عدد متوازيات الأضلاع التى يمكن تكوينها من ٥ مستقيمات متوازية تتقاطع مع ٤ مستقيمات متوازية ؟

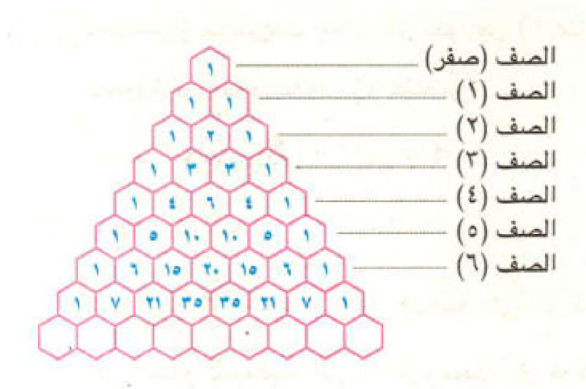
الحـــل

لتكوين متوازى أضلاع نختار زوج من المستقيمات المتوازية من المجموعة الأولى مع زوج من المستقيمات المتوازية من المجموعة الثانية

∴ عدد متوازيات الأضلاع = $^{٥}ق_{٢} \times {}^{٤}ق_{٢} = ٦٠$

مثلث باسكال

نشاط :



١ يبدأ المثلث بالعدد (١) فى القمة.

٢ الصف (١) يمثل ($ن = ١$)

من العناصر مأخوذ منها $ر = ٠$ أ، ١

فيكون $^{١}ق_{٠} = ١$ ، $^{١}ق_{١} = ١$

، الصف (٢) يمثل ($ن = ٢$) من العناصر

مأخوذ منها $ر = ٠$ أ، ١ أ، ٢

فيكون $^{٢}ق_{٠} = ١$ ، $^{٢}ق_{١} = ٢$ ، $^{٢}ق_{٢} = ١$

وهكذا ، الصف (٤) يمثل ($ن = ٤$) من العناصر مأخوذ منها $ر = ٠$ أ، ١ أ، ٢ أ، ٣ أ، ٤

فيكون $^{٤}ق_{٠} = ١$ ، $^{٤}ق_{١} = ٤$ ، $^{٤}ق_{٢} = ٦$ ، $^{٤}ق_{٣} = ٤$ ، $^{٤}ق_{٤} = ١$

٣ العدد الأول والعدد الأخير فى كل صف هو (١) لأن $^{ن}ق_{٠} = ١$ ، $^{ن}ق_{ن} = ١$

٤ أى عدد آخر من مثلث باسكال يمكن الحصول عليه بجمع العددين الموضوعين فوقه مباشرة.

٥ يوجد تماثل بين الأعداد الموجودة على جانبى ضلعى المثلث حيث

* يوجد تماثل حول العدد الذى يتوسط الصف (إذا كانت : $ن$ زوجية)
* يوجد تماثل حول العددين اللذين يتوسطان الصف (إذا كانت : $ن$ فردية)

وهذا يطابق العلاقة : $^{ن}ق_{ر} = {}^{ن}ق_{ن-ر}$

٦ مجموع أعداد كل صف = $٢^{ن}$ حيث إن

* $^{٢}ق_{٠} + {}^{٢}ق_{١} + {}^{٢}ق_{٢} = ٢^{٢}$
* $^{٥}ق_{٠} + {}^{٥}ق_{١} + {}^{٥}ق_{٢} + {}^{٥}ق_{٣} + {}^{٥}ق_{٤} + {}^{٥}ق_{٥} = ٢^{٥}$



تمارين 8 على التوافيق

من أسئلة الكتاب المدرسى • فهم • تطبيق • مستويات عليا

أولاً أسئلة الاختيار من متعدد

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) $^{٩}ق_{١} + {}^{١٠٠}ق_{٠} + {}^{٥}ق_{٥} =$ ....

(أ) ١ (ب) ٩ (جـ) ١١ (د) ١١٤

(٢) إذا كان : $\underline{|٣ن - ٧} = ١٢٠$ فإن : $^{ن}ق_{ن-١} =$ ....

(أ) ٣ (ب) ٤ (جـ) ٥ (د) ٦

(٣) إذا كان : $\underline{|س - ٣} = ١$ فإن : $^{س+٢}ق_{س-١} =$ ....

(أ) ٣ أ، ٤ (ب) ٩ أ، ٢٠ (جـ) ١٠ أ، ٢٠ (د) ٩ أ، ١٠

(٤) إذا كان : $^{ن}ق_{ن-٢} = ٣٦$ فإن : $ن =$ ....

(أ) ٦ (ب) ٩ (جـ) ١٢ (د) ٢٤

(٥) إذا كان : $^{ن}ق_{٢} = ١٢٠$ فإن : $^{ن}ق_{ن-٨} =$ ....

(أ) ٩٠ (ب) ٦٠ (جـ) ٤٥ (د) ٣٠

(٦) إذا كان : $^{٢ن-١}ق_{٢} = ٨٤$ فإن : $\underline{|ن - ٥} =$ ....

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) ٦ (د) ٢٤

(٧) إذا كان : $^{٨}ل_{ر+١} = ٣٣٦$ فإن : $^{٢ر}ق_{٤} =$ ....

(أ) ١٦ (ب) ٤ (جـ) ٢ (د) ١

(٨) إذا كان : $^{ن+١}ل_{٢} = ٢٤ \times {}^{ن-١}ق_{٢}$ فإن قيم ن هى ....

(أ) ٣ فقط. (ب) ٥ فقط. (جـ) ٨ فقط. (د) ٣ أو ٨

(٩) إذا كان : $^{م+ن}ل_{٢} = ٣٨٠$ ، $^{ن-١}ق_{ن-٢} = ٤$ فإن : $\frac{م}{ن} =$ ....

(أ) ٣ (ب) $\frac{١}{٣}$ (جـ) ٤ (د) $\frac{١}{٤}$

(١٠) إذا كان : $^{ن}ل_{ن-٢} = ٢٠$ ، $^{م}ق_{ن} = {}^{م}ق_{٢ن+١}$ فإن : $م \times ن =$ ....

(أ) ٢٠ (ب) ٤٠ (جـ) ٦٠ (د) ٨٠

(١١) إذا كان : $^{٦}ق_{س} = {}^{٤}ق_{س}$ فإن : $س =$ ....

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) ٢ (د) ٣

(١٢) إذا كان : $^{٤٠}ق_{٤} = \frac{\lfloor ٤٠}{\lfloor ٤ \lfloor س}$ فإن : س = ...

(أ) ٤ (ب) ٤٤ (ج) ٣٦ (د) ٤٠

(١٣) إذا كان : $^{ن}ل_{ر} = \lfloor ر \times {}^{ن}ق_{س}$ فإن : س يمكن أن تساوي ....

(أ) ن (ب) ن − ر (ج) ن + ر (د) ر − ن

(١٤) إذا كان : $^{٤}ل_{ن} = ٢٤ \; {}^{٤}ق_{ن}$ فإن : ن = ...

(أ) ١ (ب) ٣ (ج) ٤ (د) ٦

(١٥) إذا كان : $^{١٥}ق_{ر} = {}^{١٥}ق_{٦}$ فإن : ر = ...

(أ) ٦ فقط. (ب) ٩ فقط. (ج) ٨ فقط. (د) ٦ أ ٩

(١٦) إذا كان : $\lfloor س = {}^{٥}ق_{٢} \times {}^{٩}ل_{٢}$ فإن : س = ...

(أ) ٦ (ب) ٩ (ج) ١٠ (د) ١٢٠

(١٧) إذا كان : $^{٦}ق_{ر} > ١$ ، $^{ر}ق_{٤} > ١$ فإن : $\lfloor ر$ = ...

(أ) ٦ (ب) ٢٤ (ج) ١٢٠ (د) ٧٢٠

(١٨) إذا كان : $^{ن}ل_{ر} = {}^{ن}ق_{ر}$ فإن : ر = ...

(أ) صفر (ب) ١ (ج) صفر أ ، ١ (د) ١ أ ، ٢

(١٩) إذا كان : $^{ن}ل_{١} + {}^{ن}ق_{٢} = ٣٦$ فإن : ن = ...

(أ) ٩ (ب) −٩ أ ، ٨ (ج) ٨ (د) ٩ أ ، −٨

(٢٠) إذا كان : $^{١٢}ق_{ر^{٢}} = {}^{١٢}ق_{٢ر}$ فإن : ر $\in$ ....

(أ) {٠ ، ٢} فقط. (ب) {٠ ، −٢} فقط. (ج) {٢ ، −٢} فقط. (د) {٠ ، ٢ ، −٢}

(٢١) إذا كان : $^{ن}ل_{٢} = ٤٢$ ، $\lfloor ن - ر = ١٢٠$ فإن : $^{ن}ق_{ر+٣}$ = ...

(أ) ٢ (ب) ٧ (ج) ٢١ (د) ٤٢

(٢٢) إذا كان : $\frac{^{ن}ل_{٢}}{^{ن-١}ل_{٢}} = {}^{ن}ق_{٢}$ فإن : ن = ...

(أ) ٣ (ب) ٤ (ج) ٥ (د) ٤ أ ٣

(٢٣) إذا كان : $^{ن+١}ق_{ن-٢} = ٥٦$ فإن : ن = ...

(أ) ٥ (ب) ٦ (ج) ٧ (د) ٨

(٢٤) إذا كان : $^{ن}ق_{٢} + {}^{ن}ق_{ن-٢} = ٢ \; {}^{ن}ق_{٤}$ فإن : ن = ...

(أ) ٨ (ب) ٧ (ج) ٢ (د) ١١

(٢٥) $^{ن}ل_{ر} \div {}^{ن}ق_{ر}$ = ...

(أ) $\lfloor ن - ١$ (ب) $\lfloor ر$ (ج) $\lfloor ن$ (د) ١

(٢٦) إذا كان : $^{١٣}ق_{ر+٢} : {}^{١٣}ق_{ر+١} = ٩ : ٥$ فإن : ر = ...

(أ) ٢ (ب) ٣ (ج) ٤ (د) ٥



(٢٧) إذا كان : ${}^{ن-م}ل_٣ = ٢١٠$ ، ${}^{ن+م}ق_٤ = ٧١٥$ فإن : م × ن = ...

(أ) ١٥ (ب) ٣٠ (ج) ٣٥ (د) ٥٠

(٢٨) إذا كان : ${}^{ن}ل_ر = ١٢٠ \times {}^{ن}ق_{ن-ر}$ فإن : ر = ...

(أ) ٢ (ب) ٣ (ج) ٤ (د) ٥

(٢٩) إذا كان : ${}^{ن}ق_{١٠} = {}^{ن}ق_{١٤}$ فإن : ${}^{٢٥}ق_ن$ = ...

(أ) ٢٤ (ب) ٢٥ (ج) ١ (د) ٤٩

(٣٠) إذا كان : ${}^{٢٧}ق_{٢ر+١} = {}^{٢٧}ق_{٥ر-٨}$ فإن : ${}^{٥}ق_ر$ = ...

(أ) ١٠ (ب) ١٢ (ج) ١٣ (د) ١٥

(٣١) إذا كان : ${}^{ن}ق_٩ < {}^{ن}ق_{١٠}$ فإن : ن ١٩

(أ) = (ب) $<$ (ج) $>$ (د) $\geq$

(٣٢) إذا كان : ${}^{٢ن+١}ق_{٢ن-١} - ٢ \times {}^{ن+٢}ق_ن = ٤٦$ فإن : ن = ...

(أ) ٥ (ب) ٦ (ج) ٧ (د) ٨

(٣٣) أصغر قيمة للعدد (ن) تجعل ${}^{ن}ل_{ر-٢} = ٢٤ \times {}^{ن}ق_{ر-٢}$ هى ....

(أ) ٤ (ب) ٥ (ج) ٦ (د) ٨

(٣٤) إذا كان : ${}^{٤}ق_٠ + {}^{٤}ق_١ + {}^{٤}ق_٢ + {}^{٤}ق_٣ + {}^{٤}ق_٤ = ٢^{ن}$ فإن : ن = ...

(أ) ١ (ب) ٢ (ج) ٣ (د) ٤

(٣٥) ${}^{١}ق_٠ + {}^{٢}ق_١ + {}^{٣}ق_٢ + ... + {}^{ن}ق_{ن-١}$ = ...

(أ) $\frac{ن^٢}{٢}$ (ب) $\frac{ن^٢ + ن}{٢}$ (ج) $\frac{ن^٢ - ن}{٣}$ (د) $\frac{ن^٢ + ٢ن}{٢}$

(٣٦) إذا كان : ${}^{ن}ق_٤ \geq {}^{ن}ق_٥$ فإن : ن ∈ ....

(أ) {٤ ، ٥} (ب) {٤ ، ٩}

(ج) {٥ ، ٦ ، ٧ ، ٨ ، ٩} (د) {٤ ، ٥ ، ٦ ، ٧ ، ٨ ، ٩}

(٣٧) إذا كان : ${}^{ن}ق_ر = {}^{ن}ق_{٢ر}$ حيث : ن ، ر ∈ $ص^+$ فإن : ن مضاعف للعدد ....

(أ) ٢ (ب) ٣ (ج) ٤ (د) ٥

(٣٨) إذا كان : ${}^{س+ص}ل_٤ = ٣٦٠$ ، $\underline{|٢س + ص} = ٥٠٤٠$ فإن : ${}^{ص}ق_{٢س}$ = ...

(أ) ٦ (ب) ٨ (ج) ١٠ (د) ١٢

(٣٩) إذا كان ${}^{ن}ق_ر : {}^{ن}ق_{ر-١} = ٧ : ٤$ ، ${}^{ن}ل_ر : {}^{ن-١}ل_ر = ٥ : ٣$ فإن : ن + ر = ...

(أ) ٧ (ب) ٨ (ج) ١١ (د) ١٤

(٤٠) إذا كان : ${}^{ن^٢+ن}ق_٣ = {}^{ن^٢+ن}ق_٩$ فإن : ن يمكن أن تساوى ....

(أ) ١٢ (ب) ٦ (ج) ٣ (د) ٤

(٤١) إذا كان : ${}^{ن}ق_٢$ ، ${}^{ن}ل_٢$ ، $\underline{|ن}$ فى تتابع هندسى فإن : ن = ...

(أ) ٥ (ب) ٦ (ج) ٨ (د) ١٢

(٤٢) $^٧ق_٠ + ^٧ق_١ + ^٧ق_٢ + ^٧ق_٣ + ^٧ق_٤ + ^٧ق_٥ + ^٧ق_٦ + ^٧ق_٧ = ٢^٧ +$ ....

(أ) ١ (ب) -١ (جـ) -٧ (د) ٧

(٤٣) عدد التبديلات التي يمكن تكوينها من (ن) عنصر يساوى ....

(أ) ن|ن (ب) $^{ن+١}ل_ن$ (جـ) $^نق_ن$ (د) $^نق_ن$ |ن

(٤٤) إذا كان عدد طرق اختيار ٣ عناصر معًا من ن عنصر يساوى ١٠ فإن : ن = ...

(أ) ٣٠ (ب) ١٠ (جـ) ٦ (د) ٥

(٤٥) إذا التقى ٤ أصدقاء فصافح كل منهم الآخر. كم مصافحة تمت بين الأصدقاء ؟

(أ) ١٦ (ب) ٨ (جـ) ٦ (د) ٤

(٤٦) اشترك ٧ أشخاص فى مسابقة الشطرنج بحيث تجرى مباراة واحدة بين كل شخصين فإن عدد مباريات المسابقة = ... مباراة.

(أ) ٤٢ (ب) ٢٨ (جـ) ٢١ (د) ١٨

(٤٧) عدد أقطار الشكل الثمانى = ...

(أ) ٨ (ب) ٢٠ (جـ) ٣٢ (د) ١٨

(٤٨) مضلع له ٤٤ قطر فإن عدد أضلاعه = ...

(أ) ٧ (ب) ٨ (جـ) ١١ (د) ١٢

(٤٩) عدد طرق اختيار ٤ عناصر معًا من ١٠ عناصر دون مراعاة الترتيب هو ....

(أ) $(١٠)^٤$ (ب) $^{١٠}ل_٤$ (جـ) $^{١٠}ق_٤$ (د) |٤

(٥٠) عدد الطرق التى يمكن بها اختيار سبعة طلاب من بين ١٠ طلاب للذهاب إلى رحلة تاريخية = ... طريقة.

(أ) ٨٠ (ب) ١٢٠ (جـ) ١٤٤ (د) ٧٠

(٥١) عدد طرق اختيار كرة حمراء وأخرى بيضاء من بين ٦ كرات حمراء مرقمة من ١ إلى ٦ و ٨ كرات بيضاء مرقمة من ١ إلى ٨ = ...

(أ) ٢ (ب) ١٤ (جـ) ٢٤ (د) ٤٨

(٥٢) إذا كان عدد طرق اختيار ٣ عناصر معًا من مجموعة ما يساوى عدد طرق اختيار ٥ عناصر معًا من نفس المجموعة فإن عدد عناصر هذه المجموعة يساوى ....

(أ) $^٥ق_٣$ (ب) $^٥ل_٣$ (جـ) ٨ (د) ١٥

(٥٣) فصل به عدد الأولاد ضعف عدد البنات فإذا كان عدد طرق اختيار ولد وبنت هو ٧٢ فإن عدد الأولاد يساوى ....

(أ) ٤ (ب) ٦ (جـ) ١٢ (د) ١٨

(٥٤) بكم طريقة يمكن انتخاب لجنة مكونة من رجلين وسيدة من بين ٧ رجال و٥ سيدات ....

(أ) ٢١٠ (ب) ١٠٥ (جـ) ٢٦ (د) ٧٥

(٥٥) من بين أربعة معلمين يراد اختيار معلم لتدريب طلبة الأولمبياد فى مادة الرياضيات ، ثم معلم آخر لإعداد الاختبار. فإن عدد طرق الاختيار = ...

(أ) ١٦ (ب) ٨ (جـ) ١٢ (د) ١٥

(٥٦) فى مسابقة لكرة القدم يتقابل فيها كل فريقين مرة واحدة وكان عدد المباريات خلال المسابقة ١٥٣ مباراة فإن عدد الفرق المتنافسة يساوى ....

(أ) ٩ (ب) ١٣ (جـ) ١٨ (د) ١٩

(٥٧) عدد الطرق التى يمكن لشخص أن يختار بها نوع فاكهة أو أكثر من بين خمسة أنواع هو .... طريقة.

(أ) ٣٢ (ب) ٣١ (جـ) ٣٢٥ (د) ٦٣

(٥٨) ٥ نقط فى مستوى لا توجد أى ثلاثة منها على مستقيم واحد فإن عدد المثلثات التى يمكن تكوينها من هذه النقط = ...

(أ) ٥ + ٣ (ب) ٥ × ٣ (جـ) $^{٥}ل_{٣}$ (د) $^{٥}ق_{٣}$

(٥٩) إذا كانت النقط أ ، ب ، جـ ، ء ، هـ ، و تقع على دائرة فإن عدد القطع المستقيمة التى يمكن رسمها من هذه النقط = ...

(أ) $^{٦}ل_{٢}$ (ب) $^{٥}ل_{٢}$ (جـ) $^{٦}ق_{٢}$ (د) $^{٥}ق_{٢}$

(٦٠) عدد الأشكال الرباعية المستوية التى يمكن الحصول عليها بتوصيل رؤوس الشكل السداسى يساوى ....

(أ) ١٥ (ب) ٢٠ (جـ) ٢٤ (د) ٣٠

(٦١) يراد تقسيم ٨ ألعاب مختلفة بين ثلاثة أطفال بحيث يأخذ الطفل الأول ٣ ألعاب والثانى لعبتين والثالث يأخذ الباقى فبكم طريقة يمكن إجراء التقسيم ؟

(أ) $^{٨}ق_{٣} + {}^{٨}ق_{٢} + {}^{٨}ق_{٨}$ (ب) $^{٨}ق_{٣} \times {}^{٨}ق_{٢}$

(جـ) $^{٨}ق_{٣} \times {}^{٥}ق_{٢} \times {}^{٥}ق_{٣}$ (د) $^{٨}ق_{٣} \times {}^{٥}ق_{٢} \times {}^{٣}ق_{٣}$

(٦٢) امتحان مكون من ٦ أسئلة وعلى الطالب إجابة ثلاثة منها صحيحة على الأقل لينجح فإن عدد الطرق التى يمكن للطالب أن ينجح بها = ...

(أ) ٢٠ (ب) ١٨٠٠ (جـ) ١٥ (د) ٤٢

(٦٣) امتحان مكون من ٦ أسئلة ٢ منهم إجبارى و ٤ اختيارى وكان على الطالب الإجابة على ٣ أسئلة أو أكثر من الامتحان لكى ينجح فإن عدد الطرق التى يمكن بها أن ينجح الطالب = ...

(أ) ٤٢ (ب) ٩٦ (جـ) ١٥ (د) ٤٨

ثانيًا الأسئلة المقالية

(١) اكتب بدلالة التباديل كلًا من :

(١) $^{٨}ق_{٣}$ (٢) $^{١٩}ق_{٢}$ (٣) $^{٥}ق$ (٤) $^{س}ق_{س - ص}$

2 اكتب مستخدمًا الصورة ${}^{ن}ق_{ر}$ كلًا مما يأتي :

① $\frac{{}^{8}ل_{2}}{\underline{|2}}$ ② $\frac{{}^{9}ل_{3}}{\underline{|3}}$ ③ $\frac{{}^{10}ل_{4}}{\underline{|4}}$ ④ $\frac{{}^{8}ل_{0}}{\underline{|0}}$

---

3 إذا كان : ${}^{م}ق_{م-4} = 35$ فأوجد قيمة : م وإذا كان : ${}^{ن}ق_{م} = {}^{ن}ق_{م+1}$ فأوجد قيمة : ن «7 ، 15»

---

4 إذا كان : ${}^{ن}ق_{3} = 35$ ، ${}^{س}ق_{ن} = {}^{س}ق_{ن+3}$ فما قيمة : س «17»

---

5 إذا كان : ${}^{28}ق_{ر} = {}^{28}ق_{2ر-47}$ أوجد قيمة : ر «25»

---

6 إذا كان : ${}^{25}ق_{2ر+1} = {}^{25}ق_{3ر-1}$ فما قيمة : ر «2 أ، 5»

---

7 إذا كان : ${}^{36}ق_{3ر-5} = {}^{36}ق_{ر-3}$ أوجد قيمة : ${}^{11}ق_{ر}$ «1»

---

8 إذا كان : ${}^{ن+1}ق_{4} = \frac{5}{2}\ {}^{ن}ق_{3}$ فأوجد قيمة : ن «9»

---

9 إذا كان : ${}^{ن}ق_{3} = \frac{1}{3}\ 30ن$ فأوجد قيمة : ن «15»

---

10 إذا كان ${}^{ن}ق_{4} : {}^{ن-2}ق_{3} = 7 : 2$ فما قيمة : ن «7 أ، 8»

---

11 إذا كان ${}^{ن}ق_{5} : {}^{ن}ق_{4} = 8 : 5$ فما قيمة : ن «12»

---

12 أوجد مجموعة حل كل من المعادلات الآتية :

① ${}^{ن}ق_{3} = 84$ «{9}»

② ${}^{12}ق_{ر} = {}^{12}ق_{2ر+3}$ «{3}»

③ ${}^{ن}ق_{2ن-21} = {}^{ن}ق_{3}$ «{12 ، 18}»

④ ${}^{ن+1}ق_{3} = 4\ {}^{ن-1}ق_{2}$ «{8 ، 3}»

---

13 أوجد قيمة كل مما يأتي :

① ${}^{5}ق_{0} + {}^{5}ق_{1} + {}^{5}ق_{2} + {}^{5}ق_{3} + {}^{5}ق_{4} + {}^{5}ق_{5}$ «32»

② ${}^{5}ق_{0} - {}^{5}ق_{1} + {}^{5}ق_{2} - {}^{5}ق_{3} + {}^{5}ق_{4} - {}^{5}ق_{5}$ «صفر»

---

14 إذا كان : ${}^{2ن+م}ق_{2} = 190$ ، ${}^{ن-2م}ل_{3} = 60$ أوجد قيمة كل من : ن ، م «9 ، 2»

---

15 إذا كان : ${}^{ن}ل_{ر-1} = 6720$ ، ${}^{ن}ق_{ر-1} = 56$ فما قيمة كل من : ن ، ر «8 ، 6»

---

16 أثبت أن : ${}^{ن}ق_{ر} \div {}^{ن-1}ق_{ر-1} = \frac{ن}{ر}$ ومنها استنتج قيمة : ${}^{100}ق_{50} \div {}^{99}ق_{49}$ «2»

---

17 أثبت أن : ${}^{ن}ق_{ر} \div {}^{ن}ق_{ر-1} = \frac{ن-ر+1}{ر}$ ومنها استنتج قيمة : ${}^{10}ق_{6} \div {}^{10}ق_{5}$ «$\frac{5}{6}$»

---

18 أثبت أن : ${}^{ن}ق_{ر} + {}^{ن}ق_{ر-1} = {}^{ن+1}ق_{ر}$ ومنها استنتج قيمة : ${}^{10}ق_{3} + {}^{10}ق_{4}$ «330»

١٩ أثبت أن : ${}^{٢ن}ق_{ن} = ٢^{ن} \times \frac{١ \times ٣ \times ٥ \times \cdots \times (٢ن - ١)}{\underline{|ن}}$

---

٢٠ إذا كان ${}^{٢ن+١}ل_{ن-١} : {}^{٢ن}ق_{ن+١} = \frac{٣}{٢}\ \underline{|ن - ١}$ فما قيمة : ن؟ «٤»

---

٢١ أوجد فى $ص^{+}$ قيمتى س ، ص من المعادلتين :

${}^{س}ق_{ص} = ٢ \times {}^{س}ق_{ص+١}$ ، ${}^{س}ق_{ص} = {}^{س}ق_{ص-١}$ «س = ٥ ، ص = ٣»

---

٢٢ أثبت أن : $\frac{{}^{ن}ق_{١} \times {}^{٢ن}ق_{٢}}{{}^{٢ن}ق_{٢}} = \frac{{}^{٢ن}ل_{٢}}{{}^{٢ن-١}ل_{٢}}$

---

٢٣ أثبت أن : $\underline{|٢٥}$ يقبل القسمة على $\underline{|١٣}\ \underline{|١٢}$

---

٢٤ أجب عن الأسئلة الآتية :

(١) إذا تم اختيار ثلاثة طلاب من بين عدد (ن) من الطلاب لحضور ندوة بحيث كان عدد طرق الاختيار يساوى ١٠ أوجد عدد الطلاب. «٥»

(٢) يوجد فى أحد الصفوف ١٠ طلاب ، ٨ طالبات ، بكم طريقة يمكن تشكيل لجنة أنشطة خماسية تتألف من ثلاثة طلاب وطالبتين من هذا الصف. «٣٣٦٠»

(٣) بكم طريقة يمكن انتخاب لجنة مكونة من ٤ رجال أو ٣ سيدات من بين ٦ رجال و٥ سيدات. «٢٥»

(٤) مدرسة بها ١٠ طلاب يمارسون كرة السلة ، بكم طريقة يمكن اختيار فريق مكون من ٥ أعضاء وقائد للفريق من هؤلاء اللاعبين. «١٢٦٠»

---

٢٥ أوجد عدد الطرق التى يمكن بها انتخاب لجنتين كل منهما تتكون من ٣ أشخاص من بين ١٢ شخصًا بحيث لا يدخل شخص فى كلتا اللجنتين. «١٨٤٨٠»

---

٢٦ إذا كانت : س = $\{س : س \in ط ، ٥ \leq س \leq ٩\}$ ، ص = $\{(أ ، ب) : أ ، ب \in س ، أ \neq ب\}$ ، ع = $\{\{أ ، ب ، ح\} : أ ، ب ، ح \in س\}$ أوجد عدد عناصر كل من ص ، ع «٢٠ ، ١٠»

---

٢٧ بكم طريقة يمكن لمدرس أن يختار طالبًا أو أكثر من بين ستة طلبة ؟ «٦٣»

---

٢٨ بكم طريقة يمكن للجنة مكونة من خمسة أعضاء أن تتخذ قرارًا بالأغلبية ؟ «١٦»

---

٢٩ فصل دراسى به ٧ أولاد ، ٦ بنات واختير فريق مكون من ٥ أشخاص من هذا الفصل

احسب عدد الفرق المختلفة التى يمكن اختيارها إذا كان أعضاء الفريق :

(١) من أى جنس.

(٢) من الأولاد فقط.

(٣) من البنات فقط.

(٤) من نفس الجنس.

(٥) من ثلاثة أولاد وبنتين.

«١٢٨٧ ، ٢١ ، ٦ ، ٢٧ ، ٥٢٥»

٣٠ يدرس الطالب فى إحدى السنوات الدراسية بالجامعة ثمان مواد مختلفة ولا يحق له الانتقال إلى السنة التالية إلا إذا نجح فى ٦ منها على الأقل ، بكم طريقة يمكن للطالب الانتقال إلى السنة التالية ؟ «٣٧»

---

٣١ **صندوق به ٦ كرات بيضاء ، ٤ كرات حمراء. احسب عدد طرق سحب ٣ كرات معًا إذا كانت :**

(١) الكرات الثلاثة من أى لون.

(٢) الكرات الثلاثة تحتوى على كرتين بيضاويتين بالضبط.

(٣) الكرات الثلاثة تحتوى على كرتين بيضاويتين على الأقل.

(٤) الكرات الثلاثة تحتوى على كرتين بيضاويتين على الأكثر. «١٢٠ ، ٦٠ ، ٨٠ ، ١٠٠»

---

٣٢ تم ترشيح ٩ أشخاص لاختيار ٣ سفراء لإحدى الدول العربية فبكم طريقة يتم هذا الاختيار ؟ وإذا اشترط وجود شخص معين فى أى اختيار فبكم طريقة يتم الاختيار ؟ وإذا استبعد شخص معين فبكم طريقة يتم الاختيار ؟ «٨٤ ، ٢٨ ، ٥٦»

ثالثًا مسائل تقيس مهارات التفكير

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) $^{٦}ق_{ر}$ تكون أكبر ما يمكن عندما $ر =$ ....

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) ٣ (د) ٦

(٢) إذا كان : $^{ن}ل_{س} + {}^{س}ل_{ن} = ١٤٤٠$ فإن : $^{ن+٤}ق_{س-٥} =$ ....

(أ) ٦ (ب) ٩ (جـ) ١٠ (د) ١٢

(٣) إذا كان : $^{٤}ق_{ر+٢} = {}^{٤}ق_{٢-ر}$ فإن : $ر \in$ ....

(أ) $\{٠\}$ (ب) $\{-١ ، ٤\}$

(جـ) $\{٠ ، ٣\}$ (د) $\{-٢ ، -١ ، ٠ ، ١ ، ٢\}$

(٤) $\sum_{ر=٠}^{ن} {}^{ن}ق_{ر} =$ ....

(أ) $٢^{ر}$ (ب) $ن^{٢}$ (جـ) $٢^{ن}$ (د) $١ - ر^{٢}$

(٥) إذا كانت النقط أ ، ب ، حـ ، ء ، هـ ، و تقع على دائرة فإن عدد المضلعات التى يمكن رسمها من هذه النقط يساوى ....

(أ) ٢٠ (ب) ١٥ (جـ) ٣٠ (د) ٤٢

(٦) إذا كان : $م = {}^{ن}ق_{٢}$ فإن : $^{م}ق_{٢} =$ ....

(أ) $٣ \, {}^{ن}ق_{٢}$ (ب) $٣ \, {}^{ن+١}ق_{٢}$ (جـ) $٤ \, {}^{ن}ق_{٤}$ (د) $٣ \, {}^{ن+١}ق_{٤}$

(٧) عدد متوازيات الأضلاع التى يمكن تكوينها من (م) من المستقيمات المتوازية التى تتقاطع مع (ن) من المستقيمات المتوازية يساوى ....

(أ) $^{م-١}ق_{٢} \cdot {}^{ن-١}ق_{٢}$ (ب) $^{م-١}ق_{٢} \cdot {}^{ن}ق_{٢}$

(جـ) $^{م}ق_{٢} \cdot {}^{ن-١}ق_{٢}$ (د) $^{م}ق_{٢} \cdot {}^{ن}ق_{٢}$



ثانيًا

التفاضل والتكامل وحســاب المثلثات

الوحدة 3 التفاضل والتكامل.

الوحدة 4 حســاب المثلثات.

الوحدة الثالثة

التفاضل والتكامل



يمكنك حل الامتحانات التفاعلية على الدروس من خلال مسح QR code الخاص بكل امتحان



الدرس 1

معدل التغيـــر

دالة التغير

- إذا كانت : $ص = د(س)$ وتغيرت قيم $س$ من $س_١$ إلى $س_٢$ (حيث $س_١$ ، $س_٢$ ينتميان إلى مجال الدالة د)

فإن : ص تتغير تبعًا لتغير $س$ من القيمة $د(س_١)$ إلى القيمة $د(س_٢)$

فإذا كان التغير فى $س$ هو $\Delta س$ (ويقرأ دلتا $س$) $= س_٢ - س_١$

فإن التغير فى ص هو $\boxed{\Delta ص = د(س_٢) - د(س_١)}$

- وإذا اعتبرنا أن $س_١$ ، $س_١ + هـ$ ينتميان إلى مجال الدالة د

فإن لكل تغير فى $س_١$ مقداره (هـ) أى تتغير $س$

من $س_١$ إلى $س_١ + هـ$ يحدث تغير فى ص يتعين بالدالة ت حيث :

$\boxed{ت(هـ) = د(س_١ + هـ) - د(س_١)}$ وهى دالة فى المتغير هـ وتسمى **دالة التغير** فى د عند $س = س_١$

مثال ١

إذا كانت : $د(س) = س^٢ - ٣س + ٤$ **فأوجد :**

١ دالة التغير فى د عند $س = ٣$ ثم احسب قيمة ت (٠,٢)

٢ التغير فى د (س) عندما تتغير س من ١ إلى ١,٤

الحــل

١ $د(س) = س^٢ - ٣س + ٤$

وعند $س = ٣$ تكون :

$ت(هـ) = د(٣ + هـ) - د(٣) = [(٣ + هـ)^٢ - ٣(٣ + هـ) + ٤] - [(٣)^٢ - ٣ \times ٣ + ٤]$

$= ٩ + ٦هـ + هـ^٢ - ٩ - ٣هـ + ٤ - ٤ = ٣هـ + هـ^٢$ وهذه هى دالة التغير فى د عند $س = ٣$

$\therefore ت(٠,٢) = ٣(٠,٢) + (٠,٢)^٢ = ٠,٦٤$

٢ التغير فى د (س) = د ($س_٢$) - د ($س_١$) = د (١,٤) - د (١)

$= [(١,٤)^٢ - ٣ \times ١,٤ + ٤] - [(١)^٢ - ٣ \times ١ + ٤] = -٠,٢٤$

* **حل آخر للبند (٢) :** هـ = ١,٤ - ١ = ٠,٤ ، $س_١$ = ١ ونوجد دالة التغير فى د عند س = ١

ثم نوجد ت (٠,٤)

عند س = ١ تكون ت (هـ) = د (١ + هـ) - د (١) = $[(١ + هـ)^٢ - ٣ (١ + هـ) + ٤] - [١ - ٣ + ٤]$

$= ١ + ٢$ هـ + $هـ^٢$ $- ٣ - ٣$ هـ $+ ٤ - ٢ = هـ^٢ -$ هـ

∴ ت (٠,٤) = $(٠,٤)^٢$ - ٠,٤ = ٠,١٦ - ٠,٤ = -٠,٢٤

دالة متوسط التغير

بقسمة دالة التغير السابقة ت (هـ) على التغير الحادث فى س وهو هـ حيث هـ ≠ ٠ فإننا نحصل على دالة جديدة تسمى **دالة متوسط التغير** فى د عند س = $س_١$ ونرمز لها بالرمز م (هـ)

$$م (هـ) = \frac{ت (هـ)}{هـ} = \frac{د (س_١ + هـ) - د (س_١)}{هـ}$$

ملاحظة

عندما تتغير س من $س_١$ إلى $س_٢$ فإن متوسط التغير $= \frac{\Delta ص}{\Delta س} = \frac{د (س_٢) - د (س_١)}{س_٢ - س_١}$

مثال ٢

إذا كانت : د (س) = ٢ $س^٢$ + ٥ س - ١ **فأوجد :**

١ دالة متوسط التغير فى د عند س = ٢ ثم احسب م (٠,٢)

٢ متوسط التغير فى د عندما تتغير س من ٥,٥ إلى ٤

الحل

١ د (س) = ٢ $س^٢$ + ٥ س - ١

عند س = ٢ تكون :

$م (هـ) = \frac{د (٢ + هـ) - د (٢)}{هـ}$

حيث هـ ≠ ٠ = $\frac{١}{هـ} [(٢ (٢ + هـ)^٢ + ٥ (٢ + هـ) - ١) - (٢ \times ٤ + ٥ \times ٢ - ١)]$

$= \frac{١}{هـ}$ (٨ + ٨ هـ + ٢ $هـ^٢$ + ١٠ + ٥ هـ - ١ - ١٧)

$= \frac{١}{هـ}$ (١٣ هـ + ٢ $هـ^٢$) = ١٣ + ٢ هـ وهذه دالة متوسط التغير عند س = ٢

∴ م (٠,٢) = ١٣ + ٢ × ٠,٢ = ١٣,٤

[٢] ∵ متوسط التغير فى د = $\frac{د(س_٢) - د(س_١)}{س_٢ - س_١}$

، عندما تتغير س من ٥,٥ إلى ٤ ∴ $س_١ = ٥,٥$ ، $س_٢ = ٤$

∴ متوسط التغير فى د = $\frac{د(٤) - د(٥,٥)}{٤ - ٥,٥} = \frac{(٣٢ + ٢٠ - ١) - (٦٠,٥ + ٢٧,٥ - ١)}{-١,٥} = ٢٤$

ويمكن الحل بإيجاد دالة متوسط التغير عند س = ٥,٥ ثم إيجاد م (−١,٥)

معدل التغير

إذا كان لدالة متوسط التغير السابقة م (هـ) نهاية محددة عندما هـ ← ٠ فإن هذه النهاية تسمى معدل التغير للدالة عند $س = س_١$

∴ معدل التغير للدالة عند $س_١$ = $\underset{هـ \leftarrow ٠}{نهـا}$ م (هـ) = $\underset{هـ \leftarrow ٠}{نهـا} \frac{د(س_١ + هـ) - د(س_١)}{هـ}$

مثال ٣

إذا كانت : د (س) = $س^٢ - ٣ س$ **فأوجد معدل التغير للدالة د : عند س = ٢**

الحل

عند س = ٢ تكون م (هـ) = $\frac{د(٢ + هـ) - د(٢)}{هـ}$ حيث هـ ≠ ٠

$= \frac{١}{هـ} [((٢ + هـ)^٢ - ٣(٢ + هـ)) - (٤ - ٦)]$

$= \frac{١}{هـ} (٤ + ٤ هـ + هـ^٢ - ٦ - ٣ هـ + ٢)$

$= \frac{١}{هـ} (هـ + هـ^٢) = ١ + هـ$

∴ معدل التغير للدالة د عند س = ٢ هو $\underset{هـ \leftarrow ٠}{نهـا} (١ + هـ) = ١$

مثال ٤

إذا كانت : ص = $\frac{١}{س - ٢}$ حيث س ≠ ٢ **أوجد :**

[١] دالة متوسط التغير فى ص عندما تتغير س من $س_١$ إلى $س_١ + هـ$

وأوجد هذا المتوسط عندما : $س_١ = ٣$ ، هـ = ١

[٢] معدل التغير فى ص عندما $س = س_١$ وأوجد هذا المعدل عندما س = ٧

الحل

نفرض أن : ص = د (س) = $\frac{١}{س - ٢}$ ، س ≠ ٢

١ عند س = س$_1$ تكون م (هـ) = $\frac{د(س_1 + هـ) - د(س_1)}{هـ}$ (حيث هـ ≠ ٠)

$= \frac{1}{هـ}\left[\frac{1}{س_1 + هـ - 2} - \frac{1}{س_1 - 2}\right] = \frac{1}{هـ} \times \frac{س_1 - 2 - س_1 - هـ + 2}{(س_1 + هـ - 2)(س_1 - 2)}$

$= \frac{-1}{(س_1 + هـ - 2)(س_1 - 2)}$

، عند س$_1$ = ٣ ، هـ = ١ ∴ م (هـ) = $\frac{-1}{(3 + 1 - 2)(3 - 2)} = -\frac{1}{2}$

٢ عند س = س$_1$ يكون معدل التغير

$= \lim_{هـ \to 0}$ م (هـ) $= \lim_{هـ \to 0} \frac{-1}{(س_1 + هـ - 2)(س_1 - 2)} = \frac{-1}{(س_1 - 2)(س_1 - 2)} = \frac{-1}{(س_1 - 2)^2}$

، عند س = ٧ يكون معدل التغير = $\frac{-1}{(7 - 2)^2} = -\frac{1}{25}$

مثال ٥

إذا كانت : د (س) = $\sqrt{س}$ حيث س ≥ ٠ **فأوجد معدل تغير الدالة د : عند س = س$_1$**

ثم أوجد هذا المعدل : عندما س$_1$ = ٢٥

الحل

∵ عند س = س$_1$ يكون : م (هـ) = $\frac{د(س_1 + هـ) - د(س_1)}{هـ} = \frac{\sqrt{س_1 + هـ} - \sqrt{س_1}}{هـ}$

∴ معدل التغير للدالة د = $\lim_{هـ \to 0}$ م (هـ) = $\lim_{هـ \to 0} \frac{(س_1 + هـ)^{\frac{1}{2}} - (س_1)^{\frac{1}{2}}}{هـ} = \frac{1}{2}(س_1)^{\frac{1}{2} - 1} = \frac{1}{2\sqrt{س_1}}$

وعندما س$_1$ = ٢٥ يكون معدل التغير للدالة = $\frac{1}{2\sqrt{25}}$ = ٠,١

مثال ٦

صفيحة معدنية مربعة الشكل تتمدد بالتسخين بحيث تظل محتفظة بشكلها **أوجد :**

١ متوسط التغير فى مساحتها بالنسبة لطول ضلعها عندما يتغير طول ضلعها من ١٠ سم إلى ١٠,٢ سم

٢ معدل التغير فى مساحتها بالنسبة لطول ضلعها عندما يكون طول ضلعها ٢٠ سم

الحل

بفرض أن طول ضلع الصفيحة = س سم ومساحتها = ص سم^2 ∴ ص = د (س) = س^2

١ ∵ Δ ص = د (س$_2$) - د (س$_1$) = د (١٠,٢) - د (١٠) = $(10,2)^2 - (10)^2$ = ٤,٠٤

، Δ س = ١٠,٢ - ١٠ = ٠,٢

∴ متوسط التغير فى المساحة = $\frac{Δ ص}{Δ س} = \frac{4,04}{0,2}$ = ٢٠,٢

٢ عند $س_{١} = ٢٠$ يكون $م(هـ) = \frac{د(٢٠ + هـ) - د(٢٠)}{هـ}$

، $هـ \neq ٠ = \frac{١}{هـ}\left[(٢٠ + هـ)^{٢} - (٢٠)^{٢}\right] = \frac{١}{هـ}(٤٠٠ + ٤٠هـ + هـ^{٢} - ٤٠٠) = ٤٠ + هـ$

∴ عندما طول الضلع = ٢٠ سم يكون معدل التغير فى المساحة = $\lim_{هـ \to ٠} (٤٠ + هـ) = ٤٠$

مثال ٧

صفيحة معدنية رقيقة مستطيلة الشكل طولها ثلاثة أمثال عرضها تتمدد بحيث تظل محتفظة بشكلها وبالنسبة الثابتة بين بعديها **أوجد :**

١ معدل التغير فى مساحتها بالنسبة لطولها عندما يكون طولها = ٦ سم

٢ معدل التغير فى مساحتها بالنسبة لعرضها عندما يكون عرضها = ٢ سم

الحل



للحظ أنه :

* لإيجاد معدل التغير فى المساحة بالنسبة للطول نفرض أن : الطول = س سم
* لإيجاد معدل التغير فى المساحة بالنسبة للعرض نفرض أن : العرض = س سم

١ بفرض أن طول الصفيحة = س سم

∴ عرض الصفيحة = $\frac{١}{٣}$ س سم

وبفرض أن : مساحة الصفيحة = ص $سم^{٢}$

∴ $ص = س \times \frac{١}{٣} س$

∴ $ص = \frac{١}{٣} س^{٢}$

عندما س = ٦ (طول المستطيل = ٦)

∴ $م(هـ) = \frac{د(٦ + هـ) - د(٦)}{هـ} = \frac{\frac{١}{٣}(٦ + هـ)^{٢} - \frac{١}{٣}(٦)^{٢}}{هـ}$

$= \frac{\frac{١}{٣}(٣٦ + ١٢هـ + هـ^{٢}) - \frac{١}{٣} \times ٣٦}{هـ} = \frac{١٢ + ٤هـ + \frac{١}{٣}هـ^{٢} - ١٢}{هـ} = ٤ + \frac{١}{٣}هـ$

∴ عند س = ٦ يكون معدل التغير فى المساحة بالنسبة لطول ضلع الصفيحة = $\lim_{هـ \to ٠}\left(٤ + \frac{١}{٣}هـ\right) = ٤$

٢ بفرض أن : عرض الصفيحة = س سم

∴ طول الصفيحة = ٣س سم

وبفرض أن مساحة الصفيحة = ص $سم^{٢}$

∴ $ص = س \times ٣س = ٣س^{٢}$ ، عند س = ٢ (عرض الصفيحة = ٢)

∴ $م(هـ) = \frac{د(٢ + هـ) - د(٢)}{هـ} = \frac{٣(٢ + هـ)^{٢} - ٣(٢)^{٢}}{هـ}$

$= \frac{٣(٤ + ٤هـ + هـ^{٢}) - ٣ \times ٤}{هـ} = \frac{١٢ + ١٢هـ + ٣هـ^{٢} - ١٢}{هـ} = ١٢ + ٣هـ$

∴ عند س = ٢ يكون معدل التغير فى المساحة بالنسبة لعرض الصفيحة = $\lim_{هـ \to ٠}(١٢ + ٣هـ) = ١٢$

تمارين 9 على معدل التغير

اختبر نفسك

من أسئلة الكتاب المدرسي • فهم • تطبيق • مستويات عليا

أولًا أسئلة الاختيار من متعدد

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) إذا كانت الدالة د : د (س) = ٣ س − ٢ فإن دالة التغير ت (هـ) = ... عند س = ١

(أ) ٣ (ب) هـ (جـ) ٣ هـ (د) ٦ هـ

(٢) إذا كانت : د (س) = ٤ س + ١ فإن التغير فى د عندما تتغير س من ٢ إلى ٢,١ يساوى ....

(أ) ٠,١ (ب) ٠,٤ (جـ) ٤ (د) ٤,١

(٣) إذا كانت : د (س) = س^{٢} + ٢ س + ٣ فإن : ت (هـ) = ... عند س = ٢

(أ) هـ^{٢} + ٢ هـ + ٣ (ب) هـ^{٢} + ٦ هـ + ١٤ (جـ) ٢ هـ − ١ (د) هـ^{٢} + ٦ هـ

(٤) إذا كانت : د (س) = س^{٢} − س + ١ فإن :

أولًا : دالة التغير ت عند س = ٣ هى ....

(أ) ت (٣) (ب) ت (س + ٣) (جـ) ٢ هـ − ١ (د) هـ^{٢} + ٥ هـ

ثانيًا : ت (٢ , ٠) = ...

(أ) ١,٠٤ (ب) ٠,٨٤ (جـ) ١,٠٨ (د) ١,٨٢

ثالثًا : ت (−٣ , ٠) = ...

(أ) ١,٤١ (ب) ١,٣١ (جـ) ١,٠٤ (د) −١,٤١

(٥) متوسط تغير الدالة د حيث د (س) = س^{٢} عندما تتغير س من ٣ إلى ٣,١ يساوى ....

(أ) ٠,٦١ (ب) ٦,١ (جـ) ٩ (د) ٩,٦١

(٦) إذا كانت الدالة د : د (س) = س^{٢} − س فإن متوسط التغير للدالة د عندما تزداد س بمقدار ٠,٣ هو ....

(أ) ٢ س − ١ (ب) ٢ س − ٠,٧ (جـ) −٠,٢١ (د) −٠,١

(٧) متوسط التغير للدالة د : د (س) = $\frac{١}{س}$ عندما تتغير س من (س$_{١}$) إلى (س$_{١}$ + هـ) يساوى ....

(أ) $-\frac{١}{س_{١}}$ (ب) $\frac{-هـ}{س_{١}(س_{١}+هـ)}$ (جـ) $\frac{-١}{س_{١}(س_{١}+هـ)}$ (د) $\frac{هـ}{س_{١}(س_{١}+هـ)}$

(٨) إذا كان متوسط التغير فى د يساوى ٢,٤ عندما تتغير س من ٣ إلى ٣,٢ فإن التغير فى د عندئذٍ يساوى ....

(أ) ٠,٣٢ (ب) ٠,٤٨ (جـ) ٣,٦ (د) ٧,٢

(٩) إذا كان متوسط التغير فى د يساوى ٥ عندما تتغير س من ٢ إلى ٤ ، د (٢) = ٦
فإن : د (٤) = ...

(أ) −٤ (ب) ٧ (جـ) ٨ (د) ١٦

(١٠) إذا كانت د دالة وكان التغير فى د يساوى ١٤ عندما تتغير س من ٢ إلى ٤ فإن متوسط التغير فى د عندئذ يساوى ....

(أ) ١٤ (ب) ٧ (جـ) $\frac{٧}{٢}$ (د) −٧

(١١) إذا كان منحنى الدالة د يمر بالنقطتين (١ ، ٢) ، (٢ ، ٣) ، فإن متوسط التغير للدالة د عندما تتغير س من ١ إلى ٢ هو ....

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) صفر (د) −١

(١٢) إذا كان : د (٢) = ٥ ، د (٢,٣) = ٧ فإن التغير فى د عندما تتغير س من ٢ إلى ٢,٣ يساوى ....

(أ) ٠,٣ (ب) ٢ (جـ) ٣٥ (د) ١٢

(١٣) إذا كانت د : د (س) = $س^٢$ + أ س − ٣ وكانت دالة التغير ت وكان ت $\left(\frac{١}{٢}\right) = \frac{١٩}{٤}$ عند س = ٢ فإن : أ = ...

(أ) ٣ (ب) ٤ (جـ) ٥ (د) ٦

(١٤) دائرة طول نصف قطرها نق ، فإن متوسط التغير فى مساحة الدائرة عندما تتغير نق من ($نق_١$) إلى ($نق_١$ + هـ) هو ....

(أ) ٢ π $نق_١$ (ب) π (٢ $نق_١$ + هـ) (جـ) π $نق_١^٢$ (د) π (٢ $نق_١$ + $هـ^٢$)

(١٥) دائرة طول نصف قطرها نق فإن متوسط التغير فى محيط الدائرة عندما تتغير نق من $نق_١$ إلى $نق_٢$ هو ....

(أ) ٢ π $نق_١$ (ب) ٢ π ($نق_٢$ − $نق_١$) (جـ) π $نق_١$ (د) ٢ π

(١٦) معدل تغير الدالة د : د (س) = $س^٢$ + ٥ س − ٢ عند س = −١ يساوى ....

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) ٣ (د) ٤

(١٧) معدل تغير الدالة د : د (س) = $\frac{١}{س}$ عند س = $\sqrt{٥}$ يساوى ....

(أ) ٥ (ب) $\frac{١}{٥}$ (جـ) −٥ (د) −$\frac{١}{٥}$

(١٨) معدل تغير الدالة د : د (س) = $\sqrt{س}$ حيث س ≤ ٠ عند س = ١٦ تساوى ....

(أ) $\frac{١}{٢}$ (ب) $\frac{١}{٤}$ (جـ) $\frac{١}{٨}$ (د) $\frac{١}{١٦}$

(١٩) إذا كانت د : د (س) = $س^٤$ فإن معدل تغير الدالة عند س = ٣ يساوى ....

(أ) ٨١ (ب) ٢٧ (جـ) ١٠٨ (د) ٣٢٤

(٢٠) إذا كانت د : د (س) = جتا س فإن معدل تغير الدالة عند س = $\frac{π}{٢}$ هى ....

(أ) ± ١ (ب) −١ (جـ) ١ (د) صفر

(٢١) إذا كانت د : د $(س) = \frac{٣}{س - ٢}$

أولًا : دالة متوسط التغير للدالة د = ...

(أ) $\frac{-٣ هـ}{(س_١ - ٢)(س_١ + هـ - ٢)}$ (ب) $\frac{-٣}{(س_١ - ٢)(س_١ + هـ - ٢)}$

(جـ) $\frac{-٣}{٢(٣ + هـ)}$ (د) $\frac{٣}{هـ - ٢}$

ثانيًا : معدل التغير فى د عند س = ٥ هى ....

(أ) -٣ (ب) $-\frac{١}{٣}$ (جـ) ٥ (د) $-\frac{١}{٥}$

(٢٢) إذا كانت د : د (س) = أ حيث أ ثابت ، فإن متوسط التغير للدالة د هو ....

(أ) أ (ب) -أ (جـ) صفر (د) ١

(٢٣) إذا كان : د (س) = أ س + ب فإن متوسط التغير للدالة د عندما تتغير س من $س_١$ إلى $س_٢$ هو ....

(أ) -أ (ب) أ (جـ) أ + ب (د) ١

(٢٤) إذا كان متوسط التغير فى الدالة د حيث د (س) = ٤ $س^٢$ + أ عندما تتغير س من ب إلى ٢ يساوى -٤ فإن : ب = ...

(أ) -٢ (ب) -٣ (جـ) -٤ (د) ٢٠

(٢٥) متوسط التغير فى حجم مكعب بالنسبة لطول حرفه عندما يتغير طول حرفه من ٥ سم إلى ٧ سم يساوى ....

(أ) ١٢٥ (ب) ٣٤٣ (جـ) ٢١٨ (د) ١٠٩

(٢٦) صفيحة على شكل مربع يتمدد بانتظام محتفظة بشكلها فإن معدل التغير فى مساحتها بالنسبة لطول ضلعها عندما يكون طول ضلعها ٥ سم يساوى ....

(أ) ١٠ (ب) ٥ (جـ) ٢٥ (د) ١٠٠

(٢٧) يتمدد بالون كروى محتفظًا بشكله بسبب ضغط الغاز داخله فإن متوسط التغير فى مساحته السطحية بالنسبة لطول نصف قطره عندما يتغير طول نصف قطره من ٧ سم إلى ٩ سم يساوى ....

(أ) ١٦ π (ب) ٣٢ π (جـ) ٦٤ π (د) ١٢٨ π

(٢٨) يعطى حجم مزرعة للبكتيريا عند أى لحظة زمنية ن (مقيسة بالدقائق) بالعلاقة د (ن) = ٢ $ن^٣$ + ١٠٠ ملليجرام فإن معدل النمو اللحظى للدالة د عندما ن = ٥ هو ....

(أ) ٢٥٠ (ب) ١٢٥ (جـ) ١٠٥ (د) ١٥٠

(٢٩) صفيحة على شكل مثلث طول قاعدتها يساوى ضعف ارتفاعها المناظر ، تتمدد بالحرارة محافظة على شكلها ، فإن متوسط التغير فى مساحتها بالنسبة لارتفاعها إذا تغير ارتفاعها من ٨ سم إلى ٨,٤ سم يساوى ....

(أ) ١٥,٨ (ب) ١٦,٤ (جـ) ١٤,٢ (د) ١٨,٦

(٣٠) صفيحة معدنية رقيقة مستطيلة الشكل طولها ثلاثة أمثال عرضها تتمدد بحيث تظل محتفظة بشكلها وبالنسبة الثابتة بين بعديها ، فإن معدل التغير فى مساحتها بالنسبة لطولها عندما يكون طولها = ٦ سم يساوى ....

(أ) ٤ (ب) ٦ (جـ) ٨ (د) ١٢

(٣١) فى الشكل المقابل :



متوسط التغير للدالة د عندما تتغير س من −١ إلى ٢ يساوى ....

(أ) صفر (ب) −١



(جـ) ٢ (د) ٣

(٣٢) فى أى من الدوال الآتية يكون متوسط التغير للدالة عندما تتغير س من (س$_{١}$) إلى (س$_{١}$ + هـ) مقدار ثابت ؟

(أ) د (س) = ٤ س^{٢} + ١٠ (ب) د (س) = ٢ س − ٣

(جـ) د (س) = $\frac{١}{٢}$ س^{٢} + ٧ س (د) د (س) = $\frac{١}{س}$

(٣٣) أي الدوال الآتية يكون فيها التغير فى د ، إذا تغيرت س من أ إلى أ + هـ مساويًا للتغير فى د إذا تغيرت س من أ − هـ إلى أ ؟

(أ) د (س) = س^{٢} (ب) د (س) = ٣ س + ٢

(جـ) د (س) = س^{٣} (د) د (س) = جا س

(٣٤) إذا كانت : د (س) = { س^{٢} ، س < ٤ ؛ ٣ − س ، س ≥ ٤ } فإن معدل التغير فى د عندما س = ٧ هو ....

(أ) ٣ (ب) −١ (جـ) −٢ (د) $\frac{-١}{٣}$

(٣٥) إذا كانت د دالة زوجية فإن متوسط تغير الدالة د عندما تتغير س من −٣ إلى ٣ يساوى ....

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) −١ (د) ٢ د (٠)

(٣٦) إذا كانت د دالة فردية وكان متوسط تغير الدالة عندما تتغير س من −٣ إلى ٣ يساوى ١٩ ، متوسط تغير الدالة عندما تتغير س من −١ إلى ١ يساوى ٧ فإن متوسط تغير الدالة عندما تتغير س من ١ إلى ٣ يساوى ....

(أ) ٦ (ب) ١٢ (جـ) ٢٥ (د) ٢٦

(٣٧) إذا كان متوسط تغير الدالة عندما تتغير س من ٢ إلى ٣ يساوى م$_{١}$ ، وكان متوسط تغير الدالة عندما تتغير س من ٣ إلى ٤ يساوى م$_{٢}$ فإن متوسط تغير الدالة عندما تتغير س من ٢ إلى ٤ يساوى ....

(أ) م$_{١}$ + م$_{٢}$ (ب) م$_{١}$ م$_{٢}$ (جـ) $\frac{١}{٢}$ (م$_{١}$ + م$_{٢}$) (د) ٢ (م$_{١}$ + م$_{٢}$)

(٣٨) في الشكل المقابل :

إذا كان متوسط التغير للدالة د عندما تتغير س من ١ إلى ٢ هو $ك_١$

وكان متوسط التغير للدالة د عندما تتغير س من ٢ إلى ٤ هو $ك_٢$

فإن : ....

(أ) $ك_١ = ٢ ك_٢$

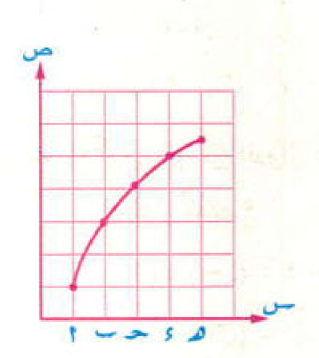
(ب) $ك_١ = \frac{١}{٢} ك_٢$

(جـ) $ك_١ = ك_٢$

(د) $ك_١ = ٤ ك_٢$

(٣٩) يوضح الشكل المقابل منحنى الدالة د حيث : ص = د (س)

في أى مما يأتي يكون متوسط التغير في د هو الأكبر ؟



(أ) عندما تتغير س من أ إلى ب

(ب) عندما تتغير س من ب إلى حـ

(جـ) عندما تتغير س من حـ إلى ء

(د) عندما تتغير س من أ إلى هـ

ثانيًا الأسئلة المقالية

١ إذا كانت : د (س) = $س^٢$ − ٣ س + ٤ أوجد :

(١) دالة التغير في د عند س = ٣ ثم احسب قيمة ت (٠,٥)

(٢) مقدار التغير في د (س) عندما تتغير س من ٢ إلى ٢,٤

«١,٧٥ ، ٠,٥٦»

---

٢ إذا كانت الدالة د : د (س) = $س^٢$ + ٢ س − ١ أوجد التغير في د (س) عندما :

(١) تتغير س من ٢ إلى ٢,٢

(٢) تتغير س من ٢ إلى ١,٨

(٣) تتغير س من ١ إلى ١ + هـ

(٤) س = ٢ ، هـ = $\frac{١}{٢}$

(٥) س = ٣ ، Δ س = ٠,٢

«١,٢٤ ، −١,١٦ ، $هـ^٢$ + ٤ هـ ، ٣,٢٥ ، ١,٦٤»

---

٣ إذا كانت : د (س) = $س^٢$ + ٣ س − ١ فأوجد :

(١) دالة متوسط التغير عند س = ٢ ، ثم أوجد م (٠,٢)

(٢) متوسط التغير عندما تتغير س من ٤,٥ إلى ٣

«٧,٢ ، ١٠,٥»

---

٤ أوجد دالة متوسط التغير للدالة د : د (س) = ٢ $س^٢$ − ٣ س + ٤ عندما تتغير س من $س_١$ إلى $س_١$ + هـ

ثم أوجد :

(١) متوسط التغير للدالة عند س = ٣ ثم احسب م (٠,٢)

(٢) متوسط التغير للدالة عندما تتغير س من ٣,٥ إلى ٤

(٣) معدل التغير للدالة عند س = ٢

«٩,٤ ، ١٢ ، ٥»

٥ إذا كانت الدالة د : د (س) = $\frac{س + ٢}{س - ٢}$ أوجد :

(١) دالة متوسط التغير للدالة عندما تتغير س من $س_١$ إلى $س_١$ + هـ

(٢) متوسط التغير للدالة عندما تتغير س من ٣ إلى $٣\frac{١}{٣}$

(٣) معدل التغير للدالة عند س = ٤ «$\frac{-٤}{(س_١ - ٢)(س_١ + هـ - ٢)}$ ، -٣ ، -١»

---

٦ أوجد دالة متوسط التغير للدالة د : د (س) = $\sqrt{س + ٤}$ عندما تتغير س من $س_١$ إلى $س_١$ + هـ

ثم أوجد هذا المتوسط عندما $س_١$ = ٥ ، هـ = ١,٢٤ ثم أوجد معدل التغير للدالة عند س = ٥ «$\frac{٥}{٣١}$ ، $\frac{١}{٦}$»

---

٧ أوجد دالة متوسط التغير للدالة د حيث : د (س) = $\sqrt{س - ٥}$ عند س = $س_١$ ثم استنتج معدل التغير في د عندما س = ٩

هل يمكن حساب معدل التغير في د عندما س = ٥ ؟ فسر إجابتك. «$\frac{١}{٤}$»

---

٨ إذا كانت الدالة د : د (س) = طا س فأوجد معدل التغير للدالة عند س = π «١»

---

٩ إذا كانت : د (س) = $س^٥$ فأوجد معدل تغير الدالة د عندما س = ٢ «٨٠»

---

١٠ إذا كانت : د (س) = أ $س^٢$ + ب س + ٤ فأوجد عند س = ٣ دالة التغير ت (هـ)

وإذا كانت : د (٣) = ٤ ، ت $\left(\frac{١}{٢}\right)$ = $١\frac{٣}{٤}$ فما قيمة كل من : أ ، ب ؟ «١ ، -٣»

---

١١ إذا كانت الدالة د : د (س) = ١ + أ س + ب $س^٢$ وكان التغير لهذه الدالة عندما تتغير س من ٣ إلى ٢ يساوي ٧ وكان معدل التغير للدالة عند س = ٣ يساوى -٩ فأوجد قيمتى : أ ، ب «٣ ، -٢»

---

١٢ يوضح الشكل المقابل المنحنى

ر = د (ن) حيث ر جملة مبيعات أحد منافذ بيع أجهزة الحاسب الآلى مقدرًا بملايين الجنيهات ، ن الزمن مقدرًا بالشهور.

أوجد من الرسم متوسط التغير فى جملة المبيعات عندما يتغير الزمن من :

(١) ن = ٤ إلى ن = ٨ (٢) ن = ٨ إلى ن = ١٠

(٣) ن = ٤ إلى ن = ١٢

«٠,٨٥ ، -١,٢ ، صفر»

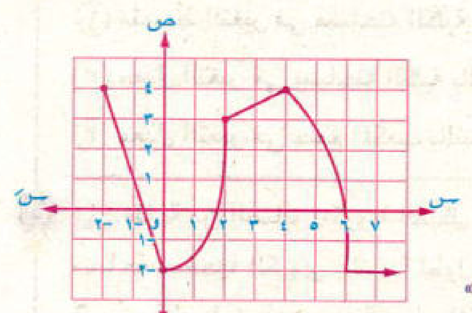
---

١٣ تفكير ناقد :

يوضح الشكل المقابل منحنى

الدالة د حيث : ص = د (س)

حدد الفترات التى يكون فيها متوسط التغير فى د ثابتًا ، وفسر إجابتك.



«]-٢ ، ٠[،]٢ ، ٤[،]٦ ، ∞[»

١٤ صفيحة على شكل مربع يتمدد بانتظام محتفظة بشكلها ، احسب متوسط التغير فى مساحة سطحها بالنسبة لطول ضلعها عندما يتغير طول ضلعها من ٣ سم إلى ٣,٤ سم ، ثم احسب معدل التغير فى مساحة سطحها بالنسبة لطول ضلعها عندما يكون طول ضلعها ٥ سم «٦,٤ ، ١٠»

---

١٥ صفيحة على شكل مربع تنكمش بالتبريد محتفظة بشكلها المربع ، احسب معدل التغير فى مساحة الصفيحة بالنسبة إلى طول ضلعها عندما يكون طول الضلع ٨ سم «١٦»

---

١٦ لوح رقيق معدنى مستطيل الشكل طوله يزيد عن عرضه بمقدار ٣ سم يتمدد بحيث يحتفظ بشكله الهندسى **أوجد :**

(١) التغير فى مساحة اللوح عندما يتغير عرضه من ٤ سم إلى ٤,٢ سم

(٢) التغير فى محيط اللوح عندما يتغير عرضه من ٣,٥ سم إلى ٣,٧ سم «٢,٢٤ ، ٠,٨»

---

١٧ صفيحة معدنية مستطيلة الشكل طولها ضعف عرضها تتمدد بالحرارة بحيث تحتفظ بالنسبة بين طولها وعرضها أوجد :

(١) متوسط التغير فى مساحتها بالنسبة لطولها عندما يتغير طولها من ١٥ سم إلى ١٦,٥ سم

(٢) معدل التغير فى كل من مساحتها ومحيطها بالنسبة لطولها عندما يكون طولها ١٥ سم «١٥,٧٥ ، ١٥ ، ٣»

---

١٨ صفيحة دائرية الشكل تتمدد بانتظام بحيث تحتفظ بشكلها. أوجد معدل التغير فى مساحة الصفيحة بالنسبة إلى طول نصف قطرها عندما يكون طول نصف القطر ١٤ سم $\left(\pi = \frac{٢٢}{٧}\right)$ «٨٨»

---

١٩ سقط حجر فى بركة ماء فتكونت موجة دائرية تزداد بانتظام بحيث تظل محتفظة بشكلها الدائرى أوجد :

(١) متوسط التغير فى مساحة الموجة بالنسبة لطول نصف قطرها عندما يتغير طول نصف قطرها من ٦ سم إلى ٦,٣ سم

(٢) معدل التغير فى مساحتها بالنسبة لطول نصف قطرها عندما يكون طول نصف قطرها ٥ سم

«١٢,٣ π ، ١٠ π»

---

٢٠ مكعب من المعدن يتمدد بانتظام بحيث يظل محتفظًا بشكله أوجد :

(١) متوسط التغير فى مساحته الكلية بالنسبة لطول حرفه عندما يتغير طول حرفه من ٢ سم إلى ٢,١ سم

(٢) معدل التغير فى مساحته الكلية بالنسبة لطول حرفه عندما يكون طول حرفه ٣ سم

(٣) معدل التغير فى حجم المكعب بالنسبة لطول حرفه عندما يكون طول حرفه ٤ سم «٢٤,٦ ، ٣٦ ، ٤٨»

---

٢١ فقاعة من الصابون كروية الشكل تتمدد محافظة على شكلها الكروى، احسب متوسط التغير فى مساحة سطحها الكروى بالنسبة لطول نصف قطرها عندما يتغير طول نصف قطرها من ٠,٥ سم إلى ٠,٦ سم ، علمًا بأن مساحة سطح الكرة يساوى ٤ π نق^{٢} حيث نق طول نصف قطر الكرة. «٤,٤ π»

٢٢ إذا كانت الكمية ص (مقيسة بالكيلوجرام) التى تنتجها شجرة برتقال متوسطة الإنتاج، يتوقف على عدد الكيلوجرامات ـس من المبيد الحشرى المستخدم لرش الشجرة طبقًا للعلاقة ص = $١٠٠ - \frac{٤٢}{س + ١}$ احسب متوسط التغير فى ص بالنسبة لـ ـس عندما تتغير ـس من ١ إلى ٢ «٧»

---

٢٣ إذا كانت المسافة ف التى يقطعها جسم متحرك فى خط مستقيم خلال فترة زمنية ن (بالثانية) تعطى بالعلاقة : ف = $ن^٢ + ٣ن + ٢$ حيث ف مقيسة بالمتر أوجد :

(١) متوسط التغير فى المسافة بالنسبة للزمن عندما تتغير ن من ٢ ثانية إلى ٤ ثانية.

(٢) معدل التغير فى المسافة بالنسبة للزمن (السرعة) عندما ن = ٥ ثانية. «٩ ، ١٣»

---

٢٤ إذا كان نمو أحد المجتمعات يتبع العلاقة د (ن) = $٦ن^٢ + ٥٠٠٠٠$ حيث ن مقيسة بالأيام **فأوجد :**

(١) متوسط تغير النمو بالنسبة للزمن عندما تتغير ن من $ن_١$ إلى $ن_١$ + هـ

(٢) متوسط تغير النمو بالنسبة للزمن خلال فترة زمنية طولها ٦ أيام اعتبارًا من بداية اليوم الثالث.

(٣) متوسط تغير النمو بالنسبة للزمن خلال اليوم السابع.

(٤) معدل تغير النمو اللحظى بالنسبة للزمن عندما ن = ٤ «٦ هـ + ١٢ $ن_١$ ، ٦٠ ، ٧٨ ، ٤٨»

---

٢٥ صفيحة رقيقة على شكل مثلث متساوى الأضلاع تتمدد بانتظام بحيث تظل محتفظة بشكلها **أوجد :**

(١) متوسط التغير فى مساحة الصفيحة بالنسبة لطول ضلعها عندما يتغير طول ضلعها من ٣٫٥ سم إلى ٤٫٥ سم

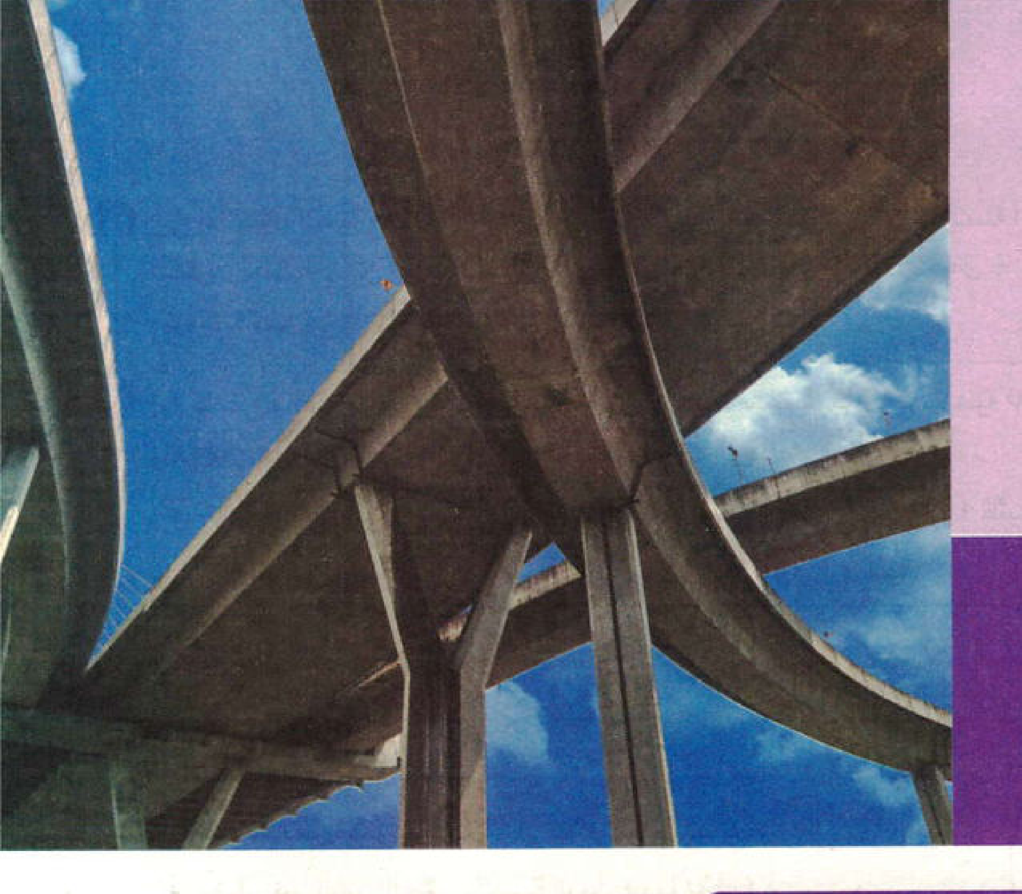
(٢) معدل التغير فى مساحة الصفيحة بالنسبة لطول ضلعها عندما يكون ارتفاعها $٣\sqrt{٣}$ سم «$٢\sqrt{٣}$ ، $٣\sqrt{٣}$»

---

٢٦ إذا كانت الدالة د : د (ـس) = $\begin{cases} ٢س^٢ - ٣ ، & س \leq ٢ \\ ٢س + ١ ، & س > ٢ \end{cases}$ **فأوجد :**

(١) متوسط تغير الدالة عندما تتغير ـس من ١ إلى ٢

(٢) متوسط تغير الدالة عندما تتغير ـس من ٤ إلى ٤٫٥ «٦ ، ٢»



الدرس

2

الاشتقاق

التفسير الهندسى لمتوسط ومعدل التغير

نفرض أن الشكل المقابل يمثل منحنى الدالة ص = د (س)

وأن النقطتين أ $(س_1 ، د(س_1))$

، ب $(س_1 + هـ ، د(س_1 + هـ))$

تقعان على منحنى الدالة فيكون :

[1] أ حـ = هـ ، ب حـ = د $(س_1 + هـ)$ − د $(س_1)$

∴ متوسط التغير = $\frac{د(س_1 + هـ) - د(س_1)}{هـ}$ = $\frac{ب حـ}{أ حـ}$ = ظا ى = ميل القاطع $\overleftrightarrow{أ ب}$

[2] إذا ثبتنا النقطة أ وتصورنا أن النقطة ب تتحرك على منحنى الدالة مقتربة من النقطة أ

فإن حـ تقترب أيضًا من أ أى أ حـ = هـ ← الصفر وفى الوضع النهائى يقترب القاطع $\overleftrightarrow{أ ب}$ من الانطباق على المماس $\overleftrightarrow{أ ء}$ الذى يمس المنحنى عند أ $(س_1 ، د(س_1))$ وتؤول الزاوية ى إلى الزاوية ل

أى أن

ميل المماس لمنحنى الدالة (ص = د (س)) عند النقطة $(س_1 ، د(س_1))$

= ظا ل = $\underset{هـ \to 0}{نهـا} \frac{د(س_1 + هـ) - د(س_1)}{هـ}$ إن وجدت = معدل تغير الدالة عند $(س = س_1)$

المشتقة الأولى للدالة

المقدار $\underset{هـ \to 0}{نهـا} \frac{د(س + هـ) - د(س)}{هـ}$ له قيمة وحيدة عند كل قيمة للمتغير س ∈ مجال الدالة لذلك فهو دالة فى س يطلق عليها «الدالة المشتقة» أو «المشتقة الأولى للدالة» أو «المعامل التفاضلى الأول للدالة».

تعريـــف

إذا كانت د :] أ ، ب[⟵ ح ، س ∈] أ ، ب[فإن الدالة المشتقة دَ :

$$دَ(س) = \lim_{هـ \to 0} \frac{د(س + هـ) - د(س)}{هـ}$$ بشرط أن تكون النهاية موجودة.

وإذا كانت ص = د (س) فيرمز للمشتقة الأولى لهذه الدالة بأحد الرموز :

$\frac{ءص}{ءس}$ أو صَ أو دَ (س) أو $\frac{ء}{ءس}$ [د (س)]

ملاحظـتان

1. الرمز $\frac{ءص}{ءس}$ هو تعبير رياضى لا يفسر على أنه خارج قسمة مقدارين ء ص ، ء س بل هو رمز معناه مشتقة الدالة ص بالنسبة للمتغير س ويقرأ «دال ص دال س»
2. ميل المماس لمنحنى الدالة ص = د (س) عند النقطة $(س_1 ، د(س_1))$ هو $دَ(س_1)$

مثال ①

باستخدام تعريف المشتقة أوجد مشتقة الدالة د :

د (س) = $س^2$ + ٢ س − ٥ ثم أوجد ميل المماس عند النقطة (٣ ، ١٠)

الحـــل

∵ د (س) = $س^2$ + ٢ س − ٥

∴ د (س + هـ) = $(س + هـ)^2$ + ٢ (س + هـ) − ٥ = $س^2$ + ٢ س هـ + $هـ^2$ + ٢ س + ٢ هـ − ٥

∴ د (س + هـ) − د (س) = ٢ س هـ + $هـ^2$ + ٢ هـ = هـ (٢ س + هـ + ٢)

، ∵ $دَ(س) = \lim_{هـ \to 0} \frac{د(س + هـ) - د(س)}{هـ}$

∴ $دَ(س) = \lim_{هـ \to 0} \frac{هـ(٢س + هـ + ٢)}{هـ} = \lim_{هـ \to 0} (٢س + هـ + ٢) = ٢س + ٢$

، ∵ د (٣) = $(٣)^2$ + ٢ (٣) − ٥ = ١٠

∴ النقطة (٣ ، ١٠) تقع على المنحنى.

∴ ميل المماس عند (س = ٣) = دَ (٣) = ٢ × ٣ + ٢ = ٨

مثال ٢

أوجد ميل المماس لمنحنى الدالة د : د (س) = $س^٣$ − ٣ عند النقطة أ (٢ ، ٥) ثم أوجد قياس الزاوية الموجبة التى يصنعها المماس مع الاتجاه الموجب لمحور السينات عند النقطة أ لأقرب دقيقة.

الحل

∵ د (٢) = $(٢)^٣$ − ٣ = ٥ ∴ النقطة (٢ ، ٥) تقع على المنحنى

∴ ميل المماس عند (س = ٢) = $\lim_{هـ \to ٠} \frac{د(٢ + هـ) - د(٢)}{هـ}$

$= \lim_{هـ \to ٠} \frac{(٢ + هـ)^٣ - ٣ - (٢)^٣ + ٣}{هـ}$

$= \lim_{هـ \to ٠} \frac{(٢ + هـ)^٣ - (٢)^٣}{هـ}$

$= ٣ (٢)^٢ = ١٢$

∴ طا (ل) = ١٢ ∴ ق (∠ ل) = $طا^{-١}$ (١٢) ≈ ٨٥° ١٤َ

لاحظ أن :

ميل المماس = طا ل حيث ل هى قياس الزاوية الموجبة التى يصنعها المماس مع الاتجاه الموجب لمحور السينات.

قابلية الدالة للاشتقاق عند نقطة

يقال إن الدالة د قابلة للاشتقاق عند س = أ (حيث أ ∈ مجال د)

إذا وفقط إذا كانت دَ (أ) لها وجود حيث دَ (أ) = $\lim_{هـ \to ٠} \frac{د(أ + هـ) - د(أ)}{هـ}$

* إذا وجدت مشتقة للدالة د عند كل نقطة تنتمى إلى الفترة]حـ ، ء[نقول إن الدالة د قابلة للاشتقاق فى هذه الفترة.

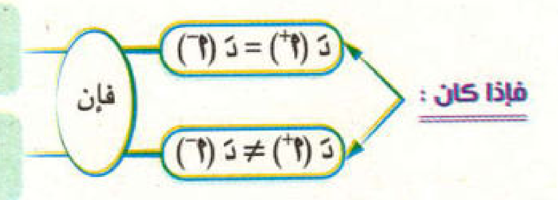
* أى دالة كثيرة حدود تكون قابلة للاشتقاق على ح

المشتقة اليمنى والمشتقة اليسرى

إذا كانت س = أ تنتمى لمجال الدالة د وكانت الدالة تغير قاعدتها على يمين ويسار أ فعند البحث عن قابلية الاشتقاق عند س = أ لابد من بحث المشتقة اليمنى والمشتقة اليسرى للدالة عند س = أ والمقارنة بينهما حيث

المشتقة اليمنى للدالة = دَ $(أ^+)$ = $\lim_{هـ \to ٠^+} \frac{د(أ + هـ) - د(أ)}{هـ}$

والمشتقة اليسرى للدالة = دَ $(أ^-)$ = $\lim_{هـ \to ٠^-} \frac{د(أ + هـ) - د(أ)}{هـ}$



الدالة د قابلة للاشتقاق عند س = أ ويكون دَ (أ) = دَ $(أ^+)$ = دَ $(أ^-)$

الدالة د غير قابلة للاشتقاق عند س = أ

العلاقة بين الاشتقاق والاتصال

نظرية «بدون برهان»

إذا كانت الدالة ص = د (س) قابلة للاشتقاق عند النقطة س = أ فإنها تكون متصلة عند هذه النقطة.

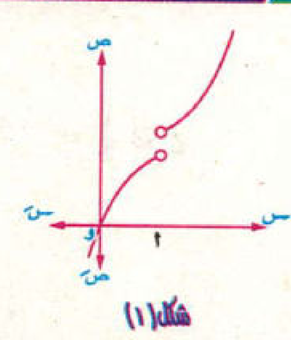
ملاحظات

١ البحث فى اتصال دالة أو قابلية اشتقاقها عند نقطة يتطلب أن تكون الدالة معرفة عند هذه النقطة أى تكون هذه النقطة ضمن مجال تعريف الدالة.

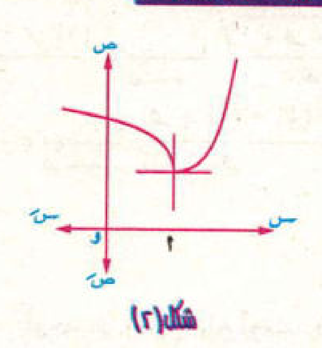
٢ إذا كانت الدالة متصلة عند نقطة فليس من الضرورى أن تكون قابلة للاشتقاق عند هذه النقطة أما إذا كانت الدالة قابلة للاشتقاق عند نقطة فمن الضرورى أن تكون متصلة عند هذه النقطة.

٣ إذا كانت الدالة د غير متصلة عند نقطة ما فإنها تكون غير قابلة للاشتقاق عند هذه النقطة.

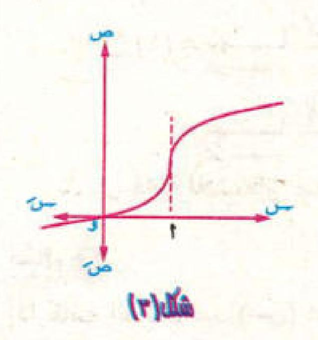
ملاحظات هامة على بعض منحنيات الدوال



شكل (١)



شكل (٢)



شكل (٣)

المنحنيات السابقة تمثل دوال غير قابلة للاشتقاق عند س = أ أى عندها دَ (أ) غير موجودة وذلك لأحد الأسباب التالية :

* المنحنى غير متصل عند س = أ أى المنحنى به قفزة أو ثغرة كما بالشكل (١)
* المنحنى به (ركن حاد مدبب عند س = أ) وذلك لأن المشتقتين اليسرى واليمنى موجودتان ولكنهما غير متساويتين كما بالشكل (٢)
* المنحنى له مماس رأسى عند س = أ كما بالشكل (٣)

ملاحظة هامة

عند بحث اشتقاق دالة عند نقطة فى مجالها ، لا يلزم بحث اتصالها عند هذه النقطة أولًا بل يمكن بحث قابلية اشتقاقها عند هذه النقطة مباشرة.

ولكن يفضل بحث الاتصال أولًا فإذا كانت متصلة عند هذه النقطة نبحث الاشتقاق وإذا كانت غير متصلة فالدالة غير قابلة للاشتقاق.

مثال ٣

ابحث قابلية الاشتقاق عند س = ١ لكل من الدالتين المعرفتين بالقاعدتين الآتيتين :

١ د (س) = $\frac{س - ٢}{س + ٣}$ ٢ ر (س) = $\sqrt{س + ٣}$

الحل

١ ∵ مجال د = ح − {−٣} ∴ د معرفة عند س = ١ ، د (١) = $\frac{١ - ٢}{١ + ٣} = \frac{-١}{٤}$

∴ د̕ (١) = $\lim_{هـ \to ٠} \frac{د(١ + هـ) - د(١)}{هـ} = \lim_{هـ \to ٠} \frac{١}{هـ} \left[\frac{١ + هـ - ٢}{١ + هـ + ٣} + \frac{١}{٤}\right]$

$= \lim_{هـ \to ٠} \frac{١}{هـ}\left[\frac{هـ - ١}{هـ + ٤} + \frac{١}{٤}\right] = \lim_{هـ \to ٠} \left(\frac{١}{هـ} \times \frac{٤(هـ - ١) + (هـ + ٤)}{٤(هـ + ٤)}\right)$

$= \lim_{هـ \to ٠} \left(\frac{٤هـ - ٤ + هـ + ٤}{٤هـ(هـ + ٤)}\right) = \lim_{هـ \to ٠} \frac{٥هـ}{٤هـ(هـ + ٤)} = \lim_{هـ \to ٠} \frac{٥}{٤(هـ + ٤)} = \frac{٥}{١٦} \in ح$

∴ د قابلة للاشتقاق عند س = ١

٢ ∵ مجال ر = [−٣ ، ∞[∴ ر معرفة عند س = ١ ، ر (١) = $\sqrt{١ + ٣} = ٢$

∴ ر̕ (١) = $\lim_{هـ \to ٠} \frac{ر(١ + هـ) - ر(١)}{هـ} = \lim_{هـ \to ٠} \frac{\sqrt{١ + هـ + ٣} - ٢}{هـ}$

$= \lim_{هـ \to ٠} \frac{\sqrt{هـ + ٤} - ٢}{هـ} = \lim_{هـ \to ٠} \frac{(هـ + ٤)^{\frac{١}{٢}} - (٤)^{\frac{١}{٢}}}{هـ} = \frac{١}{٢}(٤)^{\frac{١}{٢} - ١} = \frac{١}{٤} \in ح$

∴ ر قابلة للاشتقاق عند س = ١

مثال ٤

إذا كانت الدالة د : د (س) = $\sqrt{س} + ٥$ **أوجد :** د̕ (س) **ثم أوجد :** د̕ (١) ، د̕ (٩)

الحل

∵ د (س) = $\sqrt{س} + ٥$ ∴ د (س + هـ) = $\sqrt{س + هـ} + ٥$

∴ د (س + هـ) − د (س) = $\sqrt{س + هـ} + ٥ - (\sqrt{س} + ٥) = \sqrt{س + هـ} - \sqrt{س}$

∴ $\lim_{هـ \to ٠} \frac{د(س + هـ) - د(س)}{هـ} = \lim_{هـ \to ٠} \frac{\sqrt{س + هـ} - \sqrt{س}}{هـ} \times \frac{(\sqrt{س + هـ} + \sqrt{س})}{(\sqrt{س + هـ} + \sqrt{س})}$

$= \lim_{هـ \to ٠} \frac{س + هـ - س}{هـ(\sqrt{س + هـ} + \sqrt{س})} = \lim_{هـ \to ٠} \frac{هـ}{هـ(\sqrt{س + هـ} + \sqrt{س})}$

$= \lim_{هـ \to ٠} \frac{١}{\sqrt{س + هـ} + \sqrt{س}}$

$= \frac{١}{\sqrt{س} + \sqrt{س}} = \frac{١}{٢\sqrt{س}}$

∴ د̕ (س) = $\frac{١}{٢\sqrt{س}}$

∴ د̕ (١) = $\frac{١}{٢\sqrt{١}} = \frac{١}{٢}$ ، د̕ (٩) = $\frac{١}{٢\sqrt{٩}} = \frac{١}{٦}$

لاحظ أن :

مجال د هو [٠ ، ∞[
، مجال د̕ هو]٠ ، ∞[
وبالتالى تكون د (٠) = ٥ (معرفة)
بينما د̕ (٠) غير معرفة.

مثال ٥

ابحث اتصال وقابلية الاشتقاق للدالة د : $د(س) = \begin{cases} ٢س - ٥ & ، س \geq ٢ \\ ٢س + ٥ & ، س < ٢ \end{cases}$ عند س = ٢

الحل

$\because$ د $(٢^+) = ٢ \times ٢ - ٥ = -١$ ، د $(٢^-) = ٢ \times ٢ + ٥ = ٩$

$\therefore$ د $(٢^+) \neq$ د (٢^-) $\therefore$ الدالة د غير متصلة عند س = ٢

وبالتالى تكون د غير قابلة للاشتقاق عند س = ٢

مثال ٦

ابحث اتصال وقابلية الاشتقاق للدالة د : $د(س) = \begin{cases} س^٢ + ٢س & ، س \leq ١ \\ ٤س - ١ & ، س > ١ \end{cases}$ عند س = ١

الحل

* بحث الاتصال عند س = ١

$\because$ د $(١) = (١)^٢ + ٢ \times ١ = ٣$

، د $(١^-) = \lim_{س \to ١^-} (س^٢ + ٢س) = ٣$ ، د $(١^+) = \lim_{س \to ١^+} (٤س - ١) = ٣$

$\therefore$ د $(١^-) =$ د $(١^+) =$ د $(١) = ٣$ $\therefore$ د متصلة عند س = ١

* بحث قابلية الاشتقاق عند س = ١

$$د'(١^-) = \lim_{هـ \to ٠^-} \frac{د(١ + هـ) - د(١)}{هـ} = \lim_{هـ \to ٠^-} \frac{(١ + هـ)^٢ + ٢(١ + هـ) - ٣}{هـ}$$

$$= \lim_{هـ \to ٠^-} \frac{١ + ٢هـ + هـ^٢ + ٢ + ٢هـ - ٣}{هـ} = \lim_{هـ \to ٠^-} \frac{٤هـ + هـ^٢}{هـ}$$

$$= \lim_{هـ \to ٠^-} (٤ + هـ) = ٤$$

$$د'(١^+) = \lim_{هـ \to ٠^+} \frac{د(١ + هـ) - د(١)}{هـ} = \lim_{هـ \to ٠^+} \frac{٤(١ + هـ) - ١ - ٣}{هـ}$$

$$= \lim_{هـ \to ٠^+} \frac{٤ + ٤هـ - ١ - ٣}{هـ} = \lim_{هـ \to ٠^+} \frac{٤هـ}{هـ} = \lim_{هـ \to ٠^+} ٤ = ٤$$

$\therefore$ د' $(١^-) =$ د' $(١^+) = ٤$

$\therefore$ د قابلة للاشتقاق عند س = ١ ويكون د' $(١) = ٤$

مثال ٧

ابحث اتصال وقابلية الاشتقاق للدالة د : د (س) = |س − ٣| عند س = ٣

الحـــل

$$\because \text{د}(\text{س}) = \begin{cases} \text{س} - ٣ & ، \text{س} > ٣ \\ ٠ & ، \text{س} = ٣ \\ ٣ - \text{س} & ، \text{س} < ٣ \end{cases}$$

* **بحث الاتصال عند س = ٣**

$\because$ د (٣) = ٠ ، د (٣^-) = $\lim\limits_{\text{س} \to ٣^-}$ (٣ − س) = ٠ ، د (٣^+) = $\lim\limits_{\text{س} \to ٣^+}$ (س − ٣) = ٠

$\therefore$ د (٣^-) = د (٣^+) = د (٣) = صفر $\therefore$ د متصلة عند س = ٣

* **بحث قابلية الاشتقاق عند س = ٣**

دَ (٣^-) = $\lim\limits_{\text{هـ} \to ٠^-} \dfrac{\text{د}(٣ + \text{هـ}) - \text{د}(٣)}{\text{هـ}} = \lim\limits_{\text{هـ} \to ٠^-} \dfrac{٣ - (٣ + \text{هـ}) - ٠}{\text{هـ}} = \lim\limits_{\text{هـ} \to ٠^-} \dfrac{-\text{هـ}}{\text{هـ}} = -١$

، دَ (٣^+) = $\lim\limits_{\text{هـ} \to ٠^+} \dfrac{\text{د}(٣ + \text{هـ}) - \text{د}(٣)}{\text{هـ}} = \lim\limits_{\text{هـ} \to ٠^+} \dfrac{(٣ + \text{هـ}) - ٣ - ٠}{\text{هـ}} = \lim\limits_{\text{هـ} \to ٠^+} \dfrac{\text{هـ}}{\text{هـ}} = ١$

$\therefore$ دَ (٣^-) $\neq$ دَ (٣^+) $\therefore$ د غير قابلة للاشتقاق عند س = ٣

مثال ٨

إذا كانت الدالة د حيث : $\text{د}(\text{س}) = \begin{cases} \text{س} + ٥ & \text{عندما س} < ٢ \\ ٢\text{س}^٢ + \text{أ} & \text{عندما س} \geq ٢ \end{cases}$ متصلة عند س = ٢

فأوجد قيمة : الثابت أ ، ثم ابحث قابلية اشتقاق الدالة د عند س = ٢

الحـــل

$\because$ د متصلة عند س = ٢ ، $\because$ د (٢^-) = ٢ + ٥ = ٧ ، د (٢^+) = ٨ + أ

$\therefore$ ٨ + أ = ٧ $\therefore$ أ = −١

، $\because$ دَ (٢^-) = $\lim\limits_{\text{هـ} \to ٠^-} \dfrac{\text{د}(٢ + \text{هـ}) - \text{د}(٢)}{\text{هـ}} = \lim\limits_{\text{هـ} \to ٠^-} \dfrac{٢ + \text{هـ} + ٥ - ٧}{\text{هـ}} = ١$

، دَ (٢^+) = $\lim\limits_{\text{هـ} \to ٠^+} \dfrac{\text{د}(٢ + \text{هـ}) - \text{د}(٢)}{\text{هـ}} = \lim\limits_{\text{هـ} \to ٠^+} \dfrac{٢(٢ + \text{هـ})^٢ - ١ - ٧}{\text{هـ}}$

$= \lim\limits_{\text{هـ} \to ٠^+} \dfrac{٨ + ٨\text{هـ} + ٢\text{هـ}^٢ - ٨}{\text{هـ}} = \lim\limits_{\text{هـ} \to ٠^+} (٨ + ٢\text{هـ}) = ٨$

$\therefore$ دَ (٢^-) $\neq$ دَ (٢^+)

$\therefore$ د غير قابلة للاشتقاق عند س = ٢

مثال ٩

ابحث قابلية الاشتقاق للدالة د : د (س) = $\begin{cases} \text{حا س} & \text{، س} \le \frac{\pi}{2} \\ \text{١ + حتا س} & \text{، س} > \frac{\pi}{2} \end{cases}$ عند س = $\frac{\pi}{2}$

الحل

∵ د $\left(\frac{\pi}{2}\right)$ = حا $\frac{\pi}{2}$ = ١

، ∵ دَ $\left(\frac{\pi}{2}^-\right)$ = نهـــا$_{هـ \leftarrow ٠^-}$ $\frac{\text{د}\left(\frac{\pi}{2} + \text{هـ}\right) - \text{د}\left(\frac{\pi}{2}\right)}{\text{هـ}}$ = نهـــا$_{هـ \leftarrow ٠^-}$ $\frac{\text{حا}\left(\frac{\pi}{2} + \text{هـ}\right) - ١}{\text{هـ}}$

= نهـــا$_{هـ \leftarrow ٠^-}$ $\frac{\text{حتا هـ} - ١}{\text{هـ}}$ = صفر

، دَ $\left(\frac{\pi}{2}^+\right)$ = نهـــا$_{هـ \leftarrow ٠^+}$ $\frac{\text{د}\left(\frac{\pi}{2} + \text{هـ}\right) - \text{د}\left(\frac{\pi}{2}\right)}{\text{هـ}}$ = نهـــا$_{هـ \leftarrow ٠^+}$ $\frac{١ + \text{حتا}\left(\frac{\pi}{2} + \text{هـ}\right) - ١}{\text{هـ}}$

= نهـــا$_{هـ \leftarrow ٠^+}$ $\frac{-\text{حا هـ}}{\text{هـ}}$ = −١

∴ دَ $\left(\frac{\pi}{2}^-\right) \ne$ دَ $\left(\frac{\pi}{2}^+\right)$ ∴ د غير قابلة للاشتقاق عند س = $\frac{\pi}{2}$

مثال ١٠

إذا كانت د (س) = أ س^{٢} + ب حيث أ ، ب ثابتان وكان ميل المماس لمنحنى الدالة عند النقطة (١ ، −١) الواقعة عليه يساوى ٨ **أوجد قيم : أ ، ب**

الحل

∵ ميل المماس للمنحنى عند النقطة (١ ، −١) = دَ (١) ∴ دَ (١) = ٨

، ∵ دَ (١) = نهـــا$_{هـ \leftarrow ٠}$ $\frac{\text{د}(١ + \text{هـ}) - \text{د}(١)}{\text{هـ}}$ = نهـــا$_{هـ \leftarrow ٠}$ $\frac{\text{أ}(١ + \text{هـ})^{٢} + \text{ب} - (\text{أ} + \text{ب})}{\text{هـ}}$

= نهـــا$_{هـ \leftarrow ٠}$ $\frac{\text{أ} + ٢\text{أ هـ} + \text{أ هـ}^{٢} + \text{ب} - \text{أ} - \text{ب}}{\text{هـ}}$ = نهـــا$_{هـ \leftarrow ٠}$ $\frac{٢\text{أ هـ} + \text{أ هـ}^{٢}}{\text{هـ}}$

= نهـــا$_{هـ \leftarrow ٠}$ ٢ أ + أ هـ = ٢ أ

∴ ٢ أ = ٨ ∴ أ = ٤

، ∵ النقطة (١ ، −١) ∈ منحنى الدالة. ∴ د (١) = −١

∴ أ + ب = −١ ∴ ٤ + ب = −١ ∴ ب = −٥

تمارين 10 على الاشتقاق

اختبر نفسك

من أسئلة الكتاب المدرسي • فهم • تطبيق • مستويات عليا

أولًا أسئلة الاختيار من متعدد

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

① إذا كانت : $\underset{س \leftarrow ٢^-}{نهـــا}$ د (س) = ٢ ك + ٣ ، $\underset{س \leftarrow ٢^+}{نهـــا}$ د (س) = ك – ١ وكانت الدالة قابلة للاشتقاق عند س = ٢ فإن : ك = ...

(أ) ٢ (ب) –٢ (جـ) ٤ (د) –٤

② ميل المماس لمنحنى الدالة د عند النقطة ($س_1$ ، $ص_1$) الواقعة عليه يساوى ....

(أ) د ($س_1$ + هـ) – د ($س_1$)

(ب) $\frac{د (س_1 + هـ) - د (س_1)}{هـ}$

(جـ) $\underset{هـ \leftarrow ٠}{نهـــا} \frac{د (س_1 + هـ) - د (س_1)}{هـ}$

(د) $\underset{س_1 \leftarrow ٠}{نهـــا} \frac{د (س_1) - د (هـ)}{س_1 - هـ}$

③ جميع العبارات التالية خطأ ماعدا ....

(أ) إذا كانت الدالة متصلة عند نقطة فإنها تكون قابلة للاشتقاق عند هذه النقطة.

(ب) إذا كانت الدالة غير قابلة للاشتقاق عند نقطة فإن الدالة تكون غير معرفة عند تلك النقطة.

(جـ) إذا كانت الدالة د غير متصلة عند نقطة فإن الدالة تكون غير قابلة للاشتقاق عند تلك النقطة.

(د) إذا كانت الدالة لها مشتقة يمنى ومشتقة يسرى عند نقطة فإنها تكون قابلة للاشتقاق عند هذه النقطة.

④ إذا كانت : د دالة وكانت د (١) = ٥ ، دَ (١) = ٤ فإن : $\underset{س \leftarrow ١}{نهـــا}$ د (س) = ...

(أ) ٥ (ب) ٤ (جـ) ٩ (د) غير موجودة.

⑤ الدالة د : د (س) = |س – ٥| عند س = ٥ تكون ....

(١) متصلة (٢) قابلة للاشتقاق (٣) لها نهاية

(أ) (١) فقط. (ب) (١) ، (٢) فقط

(جـ) (١) ، (٣) فقط. (د) (١) ، (٢) ، (٣) معًا.

⑥ إذا كانت : د (س) = $\begin{cases} س^2 + ٣ & ، س \geq ١ \\ س^2 - ٣ & ، س < ١ \end{cases}$ فإن : دَ (١^+) = ...

(أ) ٢ (ب) –٢ (جـ) ٤ (د) غير موجودة.

⑦ إذا كانت : د (س) = $\begin{cases} س^2 & ، س \leq ٢ \\ ٤ س & ، س > ٢ \end{cases}$ فإن : دَ (٢) = ...

(أ) ٢ (ب) ٤ (جـ) ٨ (د) غير موجودة.

(٨) إذا كانت د : د (س) = { س^٢ + أ ، س ≤ ٢ ؛ أ س + ب ، س > ٢ } قابلة للاشتقاق عند س = ٢

فإن : أ + ب = ...

(أ) ٤ (ب) -٤ (جـ) -٨ (د) ٨

(٩) إذا كانت د: د (س) = { أ س + ٥ ب ، س > ٢ ؛ ٢٦ ، س = ٢ ؛ ب س^٢ + ٣ أ - ٦ ، س < ٢ } قابلة للاشتقاق عند س = ٢

فإن : أ - ب = ...

(أ) صفر (ب) ٤ (جـ) ٦ (د) ٨

(١٠) إذا كانت : د (س) = { س^٢ + س + ١ ، س ≥ ١ ؛ ٣ س ، س < ١ } فإن الدالة د عند س = ١ تكون ....

(أ) متصلة وغير قابلة للاشتقاق. (ب) قابلة للاشتقاق.

(جـ) لها مماس رأسى. (د) لها مماس أفقى.

(١١) إذا كانت الدالة د دالة متصلة عند س = ٣ وكان نهـا (س ← ٣) (٢ س - ٦)/(د (س) - د (٣)) = ١/٦ فإن دَ (٣) = ...

(أ) -١٢ (ب) ١٠ (جـ) ١٢ (د) -١٠

(١٢) عندما تتغير س من س١ إلى س٢ فأى من الدوال الآتية يكون متوسط تغيرها أكبر ؟

(أ) د (س) = ٤ س + ١٠ (ب) د (س) = ٦ س - ٣

(جـ) د (س) = ١/٢ س + ٢ (د) د (س) = ٢ س - ١

(١٣) إذا كانت د دالة حيث د (٢ + هـ) = د (٢) + هـ فإن : دَ (٢) = ...

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) ٢ (د) غير معرفة.

(١٤) إذا كان منحنى الدالة د فى الشكل المقابل يمثله المستقيم ل فإن متوسط التغير للدالة د هو ....

(أ) طا ٣٠° (ب) حا ٣٠°

(جـ) حتا ٣٠° (د) - طا ٣٠°

ص ، ل ، ٣٠° ، سَ ، س ، و ، صَ

(١٥) فى الشكل المقابل :

متوسط التغير للدالة د يساوى ....

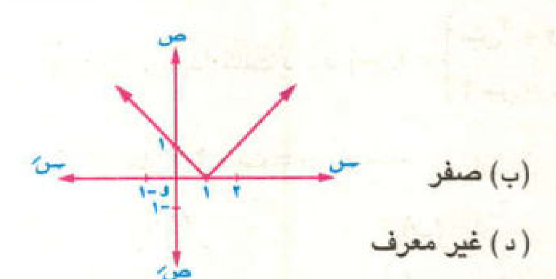
(أ) ١ (ب) -١

(جـ) س (د) - س

ص ، ص = د(س) ، سَ ، س ، و ، صَ

(١٦) الشكل المقابل يمثل منحنى الدالة د

فإن : دَ (١⁻) = ...



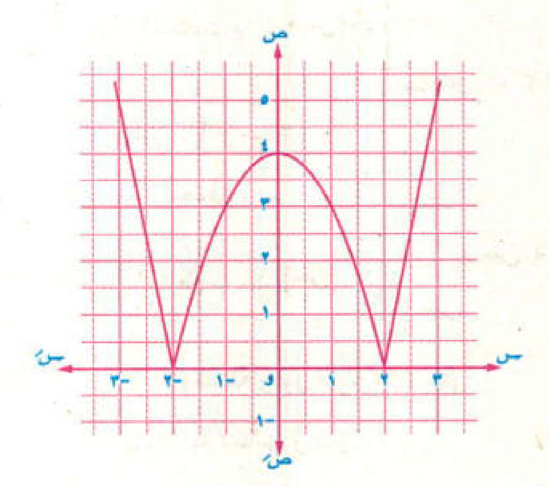
(أ) ١ (ب) صفر

(جـ) −١ (د) غير معرف

(١٧) الشكل المقابل يمثل منحنى الدالة د

فإن قيمة س التى تكون عندها الدالة

غير قابلة للاشتقاق هى ....



(أ) −٢ فقط

(ب) ٢ فقط

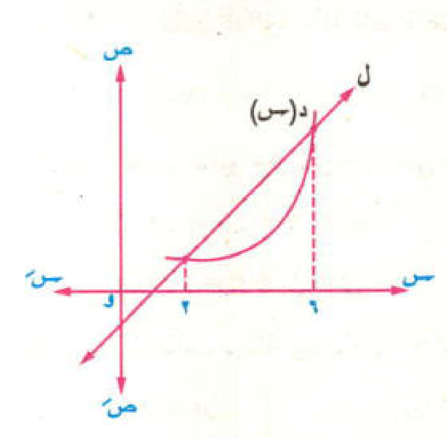
(جـ) ٤ فقط

(د) (أ) ، (ب) معًا.

(١٨) فى الشكل المقابل :

إذا كان ميل المستقيم ل يساوى ٣

فإن : د (٦) − د (٢) = ...



(أ) ٤

(ب) ٧

(جـ) ١٢

(د) ٢٤

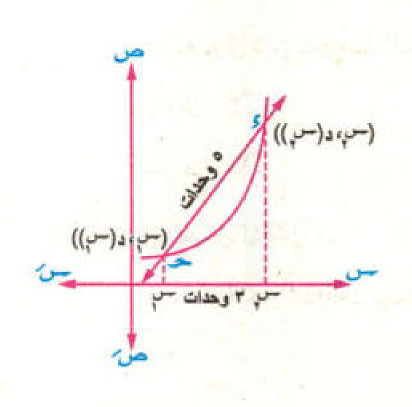
(١٩) الشكل المقابل يمثل منحنى

الدالة د : ح ← ح حيث ص = د (س)

، $\overleftrightarrow{\text{حـ ء}}$ قاطعًا للمنحنى فى حـ ، ء

فإن متوسط التغير للدالة د عندما

تتغير س من $س_١$ إلى $س_٢$ = ...

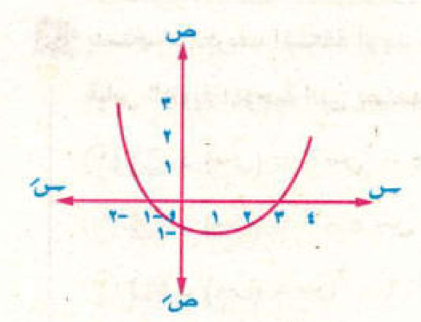


(أ) $\frac{٣}{٥}$ (ب) $\frac{٤}{٣}$

(جـ) $\frac{٣}{٤}$ (د) $\frac{٤}{٥}$



(٢٠) الشكل المقابل يمثل منحنى الدالة د



إذا قطع المستقيم ل منحنى د عند

النقطتين $((س_١ ، د (س_١))$ ، $((س_٢ ، د (س_٢))$

فإن متوسط معدل التغير للدالة د عندما

تتغير س من $س_١$ إلى $س_٢$ يساوى ....

(أ) ٢ (ب) −٢

(جـ) $\frac{١}{٢}$ (د) $-\frac{١}{٢}$

(٢١) الشكل المقابل يمثل منحنى الدالة د

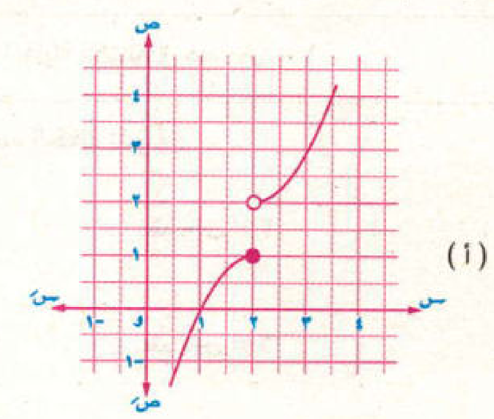
فإن الدالة ر : ر (س) = | د (س) |

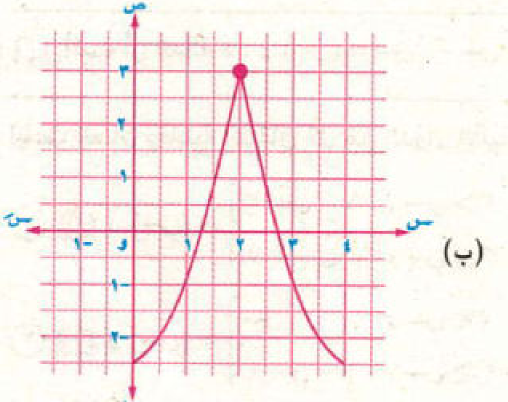
تكون غير قابلة للاشتقاق عند س ∈ ....

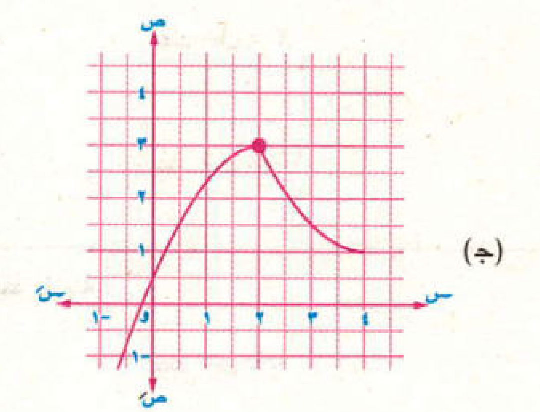
(أ) {٣} (ب) {٣ ، −١}

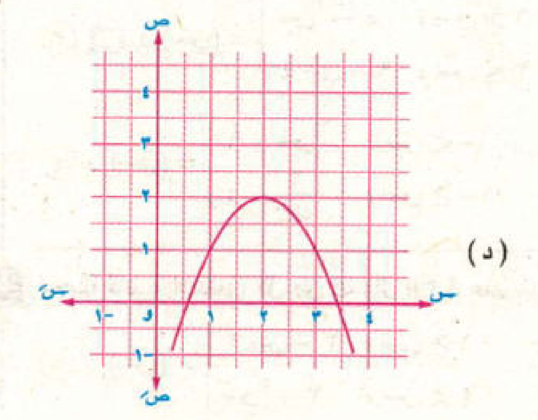
(جـ) {١} (د) ∅

(٢٢) أى الدوال الممثلة بالأشكال الآتية قابلة للاشتقاق عند س = ٢ ؟


(أ)


(ب)


(جـ)


(د)

ثانيًا / الأسئلة المقالية

١ باستخدام تعريف المشتقة أوجد دَ (س) لكل من الدوال الآتية :

① د (س) = ٨
② د (س) = ٥ س − ٧
③ د (س) = س^{٢} + ٥
④ د (س) = ٩ س + س^{٢}
⑤ د (س) = س^{٣} − ٢
⑥ د (س) = $\frac{١}{س}$
⑦ د (س) = $\frac{٧}{س}$ − ٢
⑧ د (س) = ٥ − ٤ $\sqrt{س}$
⑨ د (س) = $\sqrt{٣ س + ١}$
⑩ د (س) = $\frac{س}{س + ٥}$

٢ باستخدام تعريف المشتقة أوجد ميل المماس لكل من منحنيات الدوال الآتية عند النقطة المبينة ثم أوجد قياس الزاوية الموجبة التى يصنعها المماس مع الاتجاه الموجب لمحور السينات عند نفس النقطة لأقرب دقيقة :

① د (س) = ٣ س^{٢} − ٥ عند النقطة (٢ ، ٧) «١٢ ، ٨٥° ١٤َ»
② د (س) = ١ − ٥ س − ٣ س^{٢} عند النقطة (−١ ، ٣) «١ ، ٤٥°»
③ د (س) = س^{٣} − ٤ عند النقطة (١ ، −٣) «٣ ، ٧١° ٣٤َ»
④ د (س) = $\sqrt[٣]{س + ٣}$ عند النقطة (٥ ، ٢) «$\frac{١}{١٢}$ ، ٤° ٤٦َ»

٣ أثبت أن الدالة د : د (س) = س^{٢} − س + ١ قابلة للاشتقاق عند س = ١

٤ ابحث اتصال وقابلية اشتقاق كل من الدوال الآتية عند النقطة المبينة :

① د (س) = $\begin{cases} ٢ س − ١ & ، س < ٣ \\ ٧ − س & ، س \geq ٣ \end{cases}$ عند س = ٣

② د (س) = $\begin{cases} س^{٢} & ، س > ٢ \\ ٤ س − ١ & ، س \leq ٢ \end{cases}$ عند س = ٢

③ د (س) = $\begin{cases} س^{٢} − ٥ & ، س < ٢ \\ ٤ س − ٩ & ، س \geq ٢ \end{cases}$ عند س = ٢

④ د (س) = $\begin{cases} ١ − س^{٣} & ، س > −١ \\ ٥ + \frac{٣}{س} & ، س \leq −١ \end{cases}$ عند س = −١

٥ ابحث قابلية اشتقاق كل من الدوال الآتية عند النقط المبينة :

① د (س) = $\begin{cases} ٢ س − ٣ & ، س \leq ١ \\ س^{٢} − ٢ & ، س > ١ \end{cases}$ عند س = ١

② 📖 د (س) = $\begin{cases} 4 - س^2 & ، س \leq 1 \\ 2س + 1 & ، س > 1 \end{cases}$ عند س = ١

③ د (س) = $\begin{cases} س^2 + 4س - 3 & ، س < 1 \\ 3س^2 - 12س + 11 & ، س \geq 1 \end{cases}$ عند س = ١

---

٦ 📖 بين أن الدالة د : د (س) = $\begin{cases} س^2 & ، س \leq 2 \\ س + 2 & ، س > 2 \end{cases}$ غير قابلة للاشتقاق عند س = ٢

---

٧ **ابحث قابلية اشتقاق كل من الدوال الآتية عند النقط المبينة :**

① 📖 د (س) = $\frac{س - 1}{س + 1}$ عند س = ٢

② د (س) = س + $\frac{1}{س}$ عند س = ١

③ د (س) = $\sqrt{س - 4}$ عند س = ٤

④ د (س) = $\sqrt[3]{(س + 2)^2}$ عند س = ٦

⑤ 📖 د (س) = |س - ٢| عند س = ٢

⑥ د (س) = $\sqrt{س^2 + 6س + 9}$ عند س = -٣

⑦ د (س) = ٣ + |س + ٢| عند س = -٢

⑧ د (س) = س |س| عند س = ٠

---

٨ **ابحث قابلية اشتقاق كل من الدوال الآتية عند النقط المبينة :**

① د (س) = $\begin{cases} س|س| + 5 & ، س \geq 0 \\ \frac{س}{|س|} + 6 & ، س < 0 \end{cases}$ عند س = ٠

② د (س) = $\begin{cases} 2س + 3 & ، س \leq 0 \\ 3 + ط 2س & ، س > 0 \end{cases}$ عند س = ٠

③ د (س) = $\begin{cases} \text{جتا } 2س & ، س \leq \frac{\pi}{2} \\ - \text{جا } س & ، س > \frac{\pi}{2} \end{cases}$ عند س = $\frac{\pi}{2}$

٩ **إذا كانت كل من الدوال الآتية متصلة عند النقطة المبينة أوجد قيمة أ ثم ابحث قابلية هذه الدوال للاشتقاق عند نفس النقطة :**

① د(س) = $\begin{cases} \text{أ}\,\text{س}^2 + 1 & \text{، س} \leq 2 \\ 4\,\text{س} - 3 & \text{، س} > 2 \end{cases}$ عند س = ٢ «١»

② د(س) = $\begin{cases} 3\,\text{س} + 2 & \text{، س} < 2 \\ \text{أ}\,\text{س}^3 & \text{، س} \geq 2 \end{cases}$ عند س = ٢ «١»

---

١٠ **أوجد قيم أ ، ب إذا كانت كل من الدوال الآتية قابلة للاشتقاق عند النقطة المبينة :**

① د(س) = $\begin{cases} 4 - \text{أ}\,\text{س}^2 & \text{، س} \leq 2 \\ \text{س} + \text{ب} & \text{، س} > 2 \end{cases}$ عند س = ٢ «$-\frac{1}{4}$ ، ٣»

② د(س) = $\begin{cases} \text{س}^2 - 4 & \text{، س} \leq 2 \\ \text{أ}\,\text{س} + \text{ب} & \text{، س} > 2 \end{cases}$ عند س = ٢ «٤ ، −٨»

---

١١ إذا كان : د(س) = أ س^2 + ب حيث أ ، ب ثابتان أوجد :

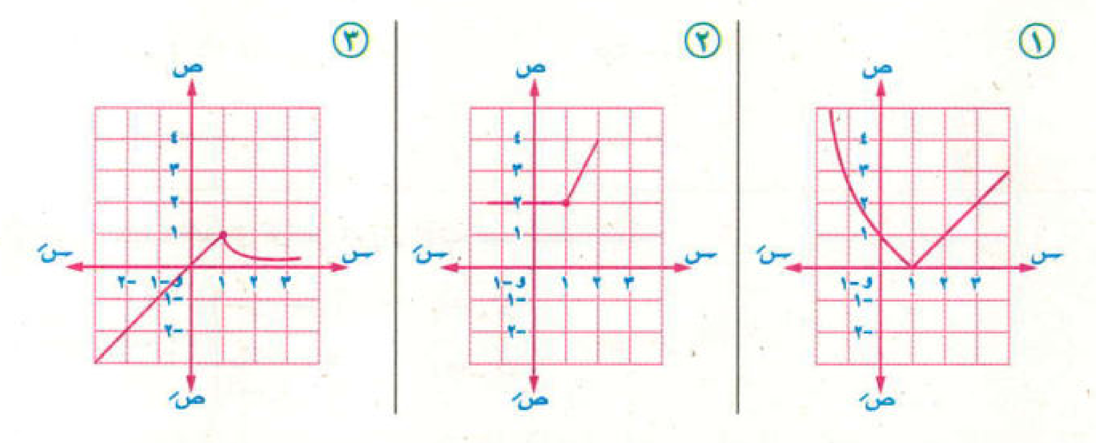
① المشتقة الأولى للدالة د عند أى نقطة (س ، ص)

② قيمتى أ ، ب إذا كان ميل المماس لمنحنى الدالة عند النقطة (٢ ، −٣) الواقعة عليه يساوى ١٢

«٣ ، −١٥»

---

١٢ **قارن بين المشتقة اليمنى والمشتقة اليسرى لكل من الدوال الآتية ، وأثبت أن كلاً منها غير قابلة للاشتقاق عند النقطة س = ١**



---

١٣ إذا كانت : د(س) = $\begin{cases} \text{س}^2 + \text{أ}\,\text{س} - 2 & \text{، س} < 2 \\ 4 & \text{، س} = 2 \\ \text{أ} + \text{ب}\,\text{س} & \text{، س} > 2 \end{cases}$ متصلة عند س = ٢

فأوجد قيم : أ ، ب ثم ابحث قابلية اشتقاق د عند س = ٢ «١ ، ١,٥»

١٤ د (س) = $\begin{cases} م س + ٣ ح & ، س < ١ \\ ح س^٢ + ٤ م & ، س \geq ١ \end{cases}$ متصلة عند س = ١ ، د (١) = ١١

أوجد قيم الثابتين : م ، ح ثم ابحث قابلية اشتقاق الدالة عند س = ١ «٢ ، ٣»

ثالثًا / مسائل تقيس مهارات التفكير

١ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

① إذا كان د (أ) = صفر ، دَ (أ) = ب حيث ب > ٠ وكان : ر (س) = | د (س) |

فإن : رَ (أ) = ...

(أ) ب (ب) − ب (جـ) صفر (د) غير معرفة.

② $\underset{هـ \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{د (هـ + ٣) - د (هـ - ٢) + د (-٢) - د (٣)}{هـ}$ = ...

(أ) دَ (٣) + دَ (−٢) (ب) دَ (٣)

(جـ) دَ (−٢) (د) دَ (٣) − دَ (−٢)

③ إذا كانت د دالة وكان دَ (١) = ٢ د (١) = ٤ فإن : $\underset{هـ \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{٢ هـ}{د (١ + هـ) - ٢}$ = ...

(أ) صفر (ب) $\frac{٣}{٤}$ (جـ) ١٢ (د) $\frac{١}{٤}$

④ إذا كانت د دالة وكان : د (٢) = ٤ ، دَ (٢) = ١ فإن : $\underset{س \to ٢}{\text{نهـا}} \frac{س د (٢) - ٢ د (س)}{س - ٢}$ = ...

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) ٢ (د) ٤

⑤ إذا كان منحنى الدالة د : د (س) = س^٢ − ١ يمر بالنقطتين : أ (٢ ، د (٢)) ، ب (٣ ، د (٣))

فإن : $\frac{\text{ميل القاطع } \overleftrightarrow{أب}}{\text{ميل المماس للمنحنى عند أ}}$ = ...

(أ) ٥ (ب) $\frac{٥}{٤}$ (جـ) $\frac{٤}{٥}$ (د) ١

---

٢ إذا كانت الدالة د : د (س) = $\begin{cases} ٢ س + ٣ & ، س < ٢ \\ أ س^٢ + ب س - ١ & ، س \geq ٢ \end{cases}$

متصلة عند س = ٢ وكان متوسط تغير د عندما تتغير س من ١ إلى ٣ يساوى ٤,٥

أوجد قيمتى : أ ، ب ثم ابحث قابلية اشتقاق هذه الدالة عند س = ٢ «١ ، ٢»



الدرس

3

قواعد الاشتقاق

إن إيجاد مشتقة الدالة من خلال التعريف قد يستغرق وقتًا وجهدًا ولتسهيل ذلك إليك بعض القواعد التى توفر لك أسلوبًا سهلاً للحصول على المشتقة.

١ مشتقة الدالة الثابتة

إذا كانت : د (س) = أ حيث أ ثابت	فإن : د̀ (س) = صفر

فمثلًا : – إذا كانت : د (س) = ٤ فإن : د̀ (س) = صفر

– إذا كانت : د (س) = ٢٥ جا $\frac{\pi}{٣}$ فإن : د̀ (س) = صفر

٢ مشتقة الدالة د : د (س) = $س^{ن}$

إذا كانت : د (س) = $س^{ن}$ حيث ن ∈ ح	فإن : د̀ (س) = ن $س^{ن-١}$

فمثلًا : – إذا كانت : د (س) = $س^{٤}$ فإن : د̀ (س) = ٤ $س^{٣}$

– إذا كانت : د (س) = $س^{-\frac{٥}{٢}}$ فإن : د̀ (س) = $-\frac{٥}{٢}$ $س^{\frac{-٧}{٢}}$

إذا كانت : د (س) = أ $س^{ن}$ حيث أ ثابت ، ن ∈ ح	فإن : د̀ (س) = أ ن $س^{ن-١}$

فمثلًا : – إذا كانت : د (س) = ٢ $س^{٥}$ فإن : د̀ (س) = ١٠ $س^{٤}$

– إذا كانت : ص = ٦ $\sqrt{س}$ = ٦ $س^{\frac{١}{٢}}$ فإن : ص̀ = ٣ $س^{-\frac{١}{٢}}$ = $\frac{٣}{\sqrt{س}}$

– إذا كانت : ص = $س^{٢}$ $\sqrt[٣]{س^{٢}}$ = $س^{٢\frac{٢}{٣}}$ فإن : ص̀ = $\frac{٨}{٣}$ $س^{١\frac{٢}{٣}}$

لاحظ أنه :

* إذا كانت : ص = س فإن : $\frac{ءص}{ءس} = ١$
* إذا كانت : ص = $\sqrt{س}$ فإن : $\frac{ءص}{ءس} = \frac{١}{٢\sqrt{س}}$
* إذا كانت : ص = $\frac{١}{س}$ فإن : $\frac{ءص}{ءس} = \frac{-١}{س^٢}$

٣ مشتقة مجموع دالتين أو الفرق بينهما

إذا كانت : د ، ر دالتين قابلتين للاشتقاق بالنسبة للمتغير س

وكانت : ص = د (س) ± ر (س) فإن : $\frac{ءص}{ءس}$ = دَ (س) ± رَ (س)

وبصفة عامة : إذا كانت $د_١$ ، $د_٢$ ، ... ، $د_ن$ دوال قابلة للاشتقاق بالنسبة للمتغير س

وكانت ص = $د_١$ (س) ± $د_٢$ (س) ± ... ± $د_ن$ (س)

فإن : $\frac{ءص}{ءس}$ = $دَ_١$ (س) ± $دَ_٢$ (س) ± ... ± $دَ_ن$ (س)

فمثلًا : – إذا كانت : د (س) = ٥ $س^٢$ + ٢ س + ٧ فإن : دَ (س) = ١٠ س + ٢

– إذا كانت : ص = $\frac{١}{٢}$ $س^٦$ – ٤ $س^{\frac{٧}{٢}}$ فإن : صَ = ٣ $س^٥$ – ١٤ $س^{\frac{٥}{٢}}$

مثال ١

أوجد المشتقة الأولى لكل مما يأتى :

١ ص = ٢ $س^٥$ + ٣ $س^٣$ – ٤ س + ٦

٢ د (س) = (س – ٣) (٢ س – ١)

٣ د (س) = ٢ س $\sqrt{س}$ + ٤ $\sqrt{س}$ – ١

٤ د (س) = $\frac{س^٣ + ٥ س^٢ + س + ٤}{س^٣}$ حيث س ≠ ٠

الحل

١ صَ = ١٠ $س^٤$ + ٩ $س^٢$ – ٤

٢ ∵ د (س) = ٢ $س^٢$ – ٧ س + ٣ ∴ دَ (س) = ٤ س – ٧

٣ ∵ د (س) = ٢ $س^{\frac{٣}{٢}}$ + ٤ $س^{\frac{١}{٢}}$ – ١ ∴ دَ (س) = ٢ × $\frac{٣}{٢}$ $س^{\frac{١}{٢}}$ + ٤ × $\frac{١}{٢}$ $س^{-\frac{١}{٢}}$ = ٣ $\sqrt{س}$ + $\frac{٢}{\sqrt{س}}$

٤ ∵ د (س) = $\frac{س^٣}{س^٣}$ + $\frac{٥ س^٢}{س^٣}$ + $\frac{س}{س^٣}$ + $\frac{٤}{س^٣}$ = ١ + ٥ $س^{-١}$ + $س^{-٢}$ + ٤ $س^{-٣}$

∴ دَ (س) = صفر – ٥ $س^{-٢}$ – ٢ $س^{-٣}$ – ١٢ $س^{-٤}$ = – $\frac{٥}{س^٢}$ – $\frac{٢}{س^٣}$ – $\frac{١٢}{س^٤}$

مثال ٢

إذا كانت : $د(س) = س^٣ + ٦ س^٢ - ٣٦ س + ٤$ **فأوجد :**

١ $دَ(١)$ ، $دَ(٠)$

٢ قيم س التى تجعل $دَ(س) = ٠$

الحـــل

∵ $دَ(س) = ٣ س^٢ + ١٢ س - ٣٦$

١ $دَ(١) = ٣ × ١ + ١٢ × ١ - ٣٦ = -٢١$ ، $دَ(٠) = -٣٦$

٢ بوضع $دَ(س) = ٠$ ∴ $٣ س^٢ + ١٢ س - ٣٦ = ٠$

∴ $س^٢ + ٤ س - ١٢ = ٠$ ∴ $(س + ٦)(س - ٢) = ٠$

∴ $س = -٦$ أ، $س = ٢$

٤ مشتقة حاصل ضرب دالتين

إذا كانت د ، ر دالتين قابلتين للاشتقاق بالنسبة للمتغير س وكانت $ص = د(س) × ر(س)$

فإن : $\frac{ءص}{ءس} = د(س) × رَ(س) + ر(س) × دَ(س)$

أى أن المشتقة الأولى لحاصل ضرب دالتين قابلتين للاشتقاق
= الأولى × مشتقة الثانية + الثانية × مشتقة الأولى

مثال ٣

أوجد المشتقة الأولى لكل مما يأتى :

١ $ص = (س^٢ + ٣)(٢ س^٣ - ٥)$

٢ $ص = (س + \frac{١}{س})(س^٣ - ٢)$

الحـــل

١ $\frac{ءص}{ءس} = (س^٢ + ٣) × ٦ س^٢ + (٢ س^٣ - ٥) × ٢ س$

$= ٦ س^٤ + ١٨ س^٢ + ٤ س^٤ - ١٠ س = ١٠ س^٤ + ١٨ س^٢ - ١٠ س$

٢ ∵ $ص = (س + س^{-١})(س^٣ - ٢)$

∴ $\frac{ءص}{ءس} = ٣ س^٢ (س + س^{-١}) + (١ - س^{-٢})(س^٣ - ٢)$

ملاحظة

يمكن الاكتفاء بهذه النتيجة وعدم فك الأقواس أما إذا كان المطلوب وضع الناتج فى أبسط صورة فيجب إكمال الحل بفك الأقواس وجمع الحدود الجبرية المتشابهة.

نتيجة

إذا كانت : د ، ر ، ى دوال قابلة للاشتقاق بالنسبة للمتغير س

وكانت : ص = د (س) × ر (س) × ى (س)

فإن : $\frac{ءص}{ءس}$ = دَ (س) × ر (س) × ى (س) + رَ (س) × د (س) × ى (س) + ىَ (س) × د (س) × ر (س)

وبقسمة الطرفين على ص = د (س) × ر (س) × ى (س) نجد أن :

$\frac{1}{ص} \times \frac{ءص}{ءس} = \frac{دَ(س)}{د(س)} + \frac{رَ(س)}{ر(س)} + \frac{ىَ(س)}{ى(س)}$

مثال ٤

أوجد المشتقة الأولى للدالة د حيث : د (س) = (٢ س^{٣} + ٣) (س^{٢} − ٥) (س^{٣} − ٤ س + ١) ثم أوجد : دَ (٠)

الحل

دَ (س) = ٦ س^{٢} (س^{٢} − ٥) (س^{٣} − ٤ س + ١) + ٢ س (٢ س^{٣} + ٣) (س^{٣} − ٤ س + ١)

+ (٣ س^{٢} − ٤) (٢ س^{٣} + ٣) (س^{٢} − ٥)

، دَ (٠) = ٠ × (−٥) × ١ + ٠ × ٣ × ١ + (−٤) × ٣ × (−٥) = ٦٠

٥ مشتقة خارج قسمة دالتين

إذا كانت : د ، ر دالتين قابلتين للاشتقاق بالنسبة للمتغير س

وكانت : ص = $\frac{د(س)}{ر(س)}$ حيث ر (س) ≠ ٠ فإن : $\frac{ءص}{ءس} = \frac{ر(س) \times دَ(س) - د(س) \times رَ(س)}{(ر(س))^{٢}}$

أى أن

المشتقة الأولى لخارج قسمة دالتين قابلتين للاشتقاق

= $\frac{\text{المقام} \times \text{مشتقة البسط} - \text{البسط} \times \text{مشتقة المقام}}{(\text{المقام})^{٢}}$

مثال ٥

أوجد المشتقة الأولى لكل مما يأتى :

١ ص = $\frac{٣ س - ٤}{٢ س + ٥}$

٢ ص = $\frac{٣ س^{٢} + ١}{س^{٢} - ٤}$

الحل

١ صَ = $\frac{٣ (٢ س + ٥) - ٢ (٣ س - ٤)}{(٢ س + ٥)^{٢}} = \frac{٢٣}{(٢ س + ٥)^{٢}}$

٢ صَ = $\frac{٦ س (س^{٢} - ٤) - ٢ س (٣ س^{٢} + ١)}{(س^{٢} - ٤)^{٢}} = \frac{- ٢٦ س}{(س^{٢} - ٤)^{٢}}$

مثال ٦

إذا كانت : $د(س) = \frac{س^٢ - س - ٢}{س^٢ + س - ٢}$ **فأوجد :** $دَ(٢)$ ، $دَ(-٢)$

الحل

$$دَ(س) = \frac{(٢س - ١)(س^٢ + س - ٢) - (٢س + ١)(س^٢ - س - ٢)}{(س^٢ + س - ٢)^٢}$$

$$= \frac{(٢س^٣ + س^٢ - ٥س + ٢) - (٢س^٣ - س^٢ - ٥س - ٢)}{(س^٢ + س - ٢)^٢} = \frac{٢س^٢ + ٤}{(س^٢ + س - ٢)^٢}$$

$\therefore$ $دَ(٢) = \frac{٢(٢)^٢ + ٤}{(٤ + ٢ - ٢)^٢} = \frac{١٢}{١٦} = \frac{٣}{٤}$ ، $دَ(-٢)$ غير موجودة حيث $-٢ \not\ni$ مجال الدالة.

مثال ٧

إذا كانت الدالة د : $د(س) = \begin{cases} ٱس + ب & ، س \geq ١ \\ س^٢ - ٣ & ، س < ١ \end{cases}$ قابلة للاشتقاق عند $س = ١$

فما قيمة كل من : ٱ ، ب

الحل

$\because$ د قابلة للاشتقاق عند $س = ١$

$\therefore$ د متصلة عند $س = ١$

$\therefore$ $د(١^+) = د(١^-)$

$\therefore$ $\lim_{س \to ١^+} (ٱس + ب) = \lim_{س \to ١^-} (س^٢ - ٣)$

$\therefore$ $ٱ + ب = -٢$ (١)

، $دَ(س) = \begin{cases} ٱ & ، س \geq ١ \\ ٢س & ، س < ١ \end{cases}$

$\therefore$ $دَ(١^+) = دَ(١^-)$ $\therefore$ $ٱ = ٢$

وبالتعويض فى (١) : $\therefore$ $ب = -٤$

ملاحظة

الدالة د قابلة للاشتقاق عند $س = ١$

$\therefore$ يمكن استخدام قواعد الاشتقاق مباشرة دون استخدام التعريف.

تمارين 11 على قواعد الاشتقاق

اختبر نفسك

من أسئلة الكتاب المدرسي • فهم • تطبيق • مستويات عليا

أولًا أسئلة الاختيار من متعدد

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) إذا كانت : د (س) = $\frac{1}{س}$ فإن : دَ (١) = ...

(أ) ١ (ب) صفر (جـ) −١ (د) ٢

(٢) $\frac{ء}{ءس}\left((س-1)(س+3)\right)$ = ...

(أ) ٢ س (ب) ٢ س + ١ (جـ) ٢ س − ٣ (د) ٢ س + ٢

(٣) إذا كانت : د (س) = $\frac{1}{2}$ س^{14} − $\frac{1}{4}$ س^{20} + $\frac{1}{6}$ س^{36} فإن : دَ (١) = ...

(أ) ٦ (ب) ٨ (جـ) ١٦ (د) ١٨

(٤) إذا كانت : د (س) = (٤ س^{2} − ١) (١ + ٤ س^{2}) فإن : دَ $\left(-\frac{1}{2}\right)$ = ...

(أ) صفر (ب) −١ (جـ) −٨ (د) −٦٤

(٥) إذا كانت : دَ (٢) = ٥ ، د (س) = س^{2} + م س + ٥ فإن : م = ...

(أ) ٥ (ب) ٢ (جـ) ١٠ (د) ١

(٦) إذا كانت : د (س) = س^{5} فإن : $\lim_{هـ \to 0} \frac{د(س+هـ) - د(س)}{هـ}$ = ...

(أ) ٥ (ب) ٥ س^{4} (جـ) س^{5} (د) غير موجودة.

(٧) إذا كانت : ص = $\frac{1}{\sqrt{س}}$ فإن : $\frac{ءص}{ءس}$ = ...

(أ) $\frac{-1}{2\sqrt{س}}$ (ب) $\frac{-1}{2س}$ (جـ) $\frac{-1}{2س\sqrt{س}}$ (د) $\frac{1}{2\sqrt{س}}$

(٨) إذا كانت : د (س) = أ^{2} حيث أ ثابت فإن : دَ (س) = ...

(أ) صفر (ب) ٢ أ (جـ) ٢ (د) أ^{2}

(٩) إذا كانت : ص = ٣ $\sqrt[4]{س}$ فإن : $\frac{ءص}{ءس}$ = ...

(أ) ١٢ س^{3} (ب) ١٢ $\sqrt[4]{س}$ (جـ) $\frac{3}{4\sqrt[4]{س^{4}}}$ (د) $\frac{3}{4\sqrt[4]{س^{3}}}$

(١٠) إذا كانت : ص = $\frac{2}{س}$ + $\frac{س}{2}$ + ٢ فإن : $\frac{ءص}{ءس}$ = ...

(أ) $\frac{2}{س^{2}}+\frac{1}{2}$ (ب) $\frac{1}{2}$ (جـ) $\frac{س^{2}-4}{2س^{2}}$ (د) $\frac{س^{2}-2}{2س^{2}}$

(١١) إذا كانت : ص = $\frac{س^٢ + ٦}{س^٢ + ٥}$ فإن : صَ عندما س = ١ تساوي ....

(أ) $-\frac{١}{٤}$ (ب) $\frac{٦}{٥}$ (جـ) $\frac{٧}{٦}$ (د) $\frac{١١}{١٢}$

(١٢) $\frac{ء}{ءس}$ (د (س) . ر (س)) = ...

(أ) دَ (س) . رَ (س) (ب) د (س) . رَ (س)

(جـ) دَ (س) . ر (س) (د) د (س) . رَ (س) + دَ (س) . ر (س)

(١٣) إذا كانت : ص = (س + ٤) (س^٢ + ٥ س + ٧) فإن : صَ = ...

(أ) ٢ س^٢ + ١٣ س + ٢٠ (ب) س^٢ + ١٨ س + ٢٠

(جـ) س^٣ + ١٨ س^٢ + ٢٧ س + ٢٨ (د) ٣ س^٢ + ١٨ س + ٢٧

(١٤) إذا كان : س ص = ٨١ فإن : $\frac{ءص}{ءس}$ = ... عند س = ٩

(أ) −٩ (ب) −١ (جـ) ١ (د) ٩

(١٥) إذا كانت : د (س) = س^{ن} + س$^{-ن}$ فإن : دَ (١) = ...

(أ) ن (ب) ن + $\frac{١}{ن}$ (جـ) ن − $\frac{١}{ن}$ (د) صفر

(١٦) إذا كانت ن ∈ ص$_+$ وكانت : د (س) = ن س^{ن} ، دَ (١) = ٩ فإن : ن = ...

(أ) ٢ (ب) ٣ (جـ) ٤ (د) ٥

(١٧) $\frac{ء}{ءس}$ (٥ π^٢) = ...

(أ) ٥ (ب) ١٠ π (جـ) صفر (د) ٥ π^٢

(١٨) إذا كانت : د (س) = س + $\frac{٩}{س}$ فإن : دَ (س) = صفر عندما س = ...

(أ) ٣ (ب) −٣ (جـ) ± ٣ (د) ± ٩

(١٩) إذا كان : د (س) = ٤ س^٢ + ر (س) وكان : دَ (٣) = ٧ فإن : رَ (٣) = ...

(أ) ٢٤ (ب) ٣١ (جـ) −١٧ (د) −٢٤

(٢٠) إذا كان : د (س) = ٥ ر (س) + ٢٠ فإن : رَ (س) = ...

(أ) دَ (س) (ب) دَ (س) − ٢٠ (جـ) ٥ دَ (س) (د) $\frac{١}{٥}$ دَ (س)

(٢١) إذا كانت : د (س) = (س + أ) (س^٢ − أ) وكانت : دَ (−١) = ٤ فإن : أ = ...

(أ) $\frac{١}{٣}$ (ب) $-\frac{١}{٣}$ (جـ) $\frac{٢}{٣}$ (د) $-\frac{٢}{٣}$

(٢٢) إذا كان : د (س) = م س^٢ + ن س + ل فإن : دَ (١) + دَ (٤) − دَ (٥) = ...

(أ) م (ب) − م (جـ) ن (د) − ن

(٢٣) إذا كانت : د $(س) = \frac{١}{٣} س^٣ - ٢ س^٢ + ٥ س - ٤$ وكانت د̸ $(س) = ٢$ فإن : س = ...

(أ) ١ أ، ٢ (ب) ١ أ، ٣ (جـ) ٢ أ، ٣ (د) ٣ أ، ٤

(٢٤) إذا كان : د $(س) = أ س^٢$ ، ر $(س) = \frac{س^٣}{ب}$ وكان د̸ $(-٣) =$ ر̸ (٢) فإن : أ ب = ...

(أ) -٦ (ب) -٢ (جـ) ٢ (د) ١٢

(٢٥) إذا كانت : د $(س) = ٢ أ س^٣$ ، د̸ $(-٣) = ١٠٨$ فإن : د̸ $(١) =$ ....

(أ) ٢ (ب) ٦ (جـ) ١٢ (د) ٢٤

(٢٦) إذا كانت : ص $= \sqrt[ن]{س^م}$ فإن : $\frac{ءص}{ءس} =$ ....

(أ) $\frac{م ص}{ن س}$ (ب) م $\sqrt[ن]{س^{م-١}}$

(جـ) $\frac{م}{ن} \sqrt[ن]{س^{م-١}}$ (د) $\frac{م}{ن} \sqrt[ن]{س^{م+ن}}$

(٢٧) إذا كانت ص $= \frac{س^٢ + ٢ س + ٤}{س^٢ - ٢ س + ٤}$ وكانت : $\frac{ءص}{ءس} =$ صفر فإن : س = ...

(أ) ± ٢ (ب) ± ٤ (جـ) ٢ أ، ٣ (د) -٢ أ، -٣

(٢٨) إذا كانت د $(س) = \frac{٢ س^٢ + أ س + ب}{س^٢ - ٥ س + ٤}$ وكان : د $(٠) = ٣$ ، د̸ $(٠) =$ صفر

فإن : أ × ب = ...

(أ) ١٨٠ (ب) -١٨٠ (جـ) ٣ (د) -٢٧

(٢٩) إذا كان : د $(س) = س^٣ - أ س + ١$ ، ر $(س) = أ س^٢ + ب س + ٣$

وكان : ٢ د̸ $(١) +$ ر̸ $(١) = ٢$ فإن : ب = ...

(أ) -٤ (ب) -٣ (جـ) ٣ (د) ٤

(٣٠) إذا كان : د $(س) = س^٢ + أ س + ب$ وكان : د̸ $(٥) = ٢$ د̸ $\left(\frac{٧}{٢}\right)$ فإن : أ = ...

(أ) -٤ (ب) -٣ (جـ) ٢ (د) ٣

(٣١) إذا كان (د ☐ ر)̸ = د̸ ☐ ر̸ فإن أى العمليات الآتية يمكن وضعها فى المربع حتى تكون الجملة صحيحة لكل الدوال د ، ر القابلة للاشتقاق ؟

(أ) (+) فقط. (ب) (+) ، (-) فقط.

(جـ) (+) ، (-) ، (×) ، (÷) (د) (×) فقط.

(٣٢) إذا كانت د : [-١ ، ١] ← ح حيث د $(س) = س^٢$ ، ر : [٠ ، ٤] ← ح حيث ر $(س) = ٤ س$

فإن : $\frac{ء}{ءس}$ (د $(س)$. ر $(س)$) = ... عند س = ٢

(أ) ١٦ (ب) ٣٢ (جـ) ٤٨ (د) غير معرفة.

(٣٣) إذا كانت : $\frac{د}{دس}$ [(أ س)^٣] = ٢٤ عندما س = ١ فإن قيمة أ تساوى ....

(أ) ٨ (ب) ٢ (جـ) ١ (د) ٢٤

(٣٤) إذا كانت : د (س) = س^٣ − ٣ س^٢ − ٥ س + ٦ فإن : نهـا$_{هـ \leftarrow ٠}$ $\frac{د (١ + ٢ هـ) − د (١)}{هـ}$ = ...

(أ) −٨ (ب) ٨ (جـ) ١٦ (د) −١٦

(٣٥) إذا كانت : د (س) = (س − ٤) (س − ٥) (س − ٦) (س − ٧) فإن : دَ (٧) = ...

(أ) −٧ (ب) −٦ (جـ) صفر (د) ٦

(٣٦) إذا كانت : د (س) = س^٢ − س + ٤ وكان : دَ (ل) = دَ (٢) + د (٢) فإن : ل = ...

(أ) ٧ (ب) ٥ (جـ) ٣ (د) ١

(٣٧) إذا كانت د : د (س) دالة زوجية وقابلة للاشتقاق لجميع قيم س ∈ ح

فإن : دَ (أ) + دَ (−أ) = ...

(أ) صفر (ب) ٢ دَ (أ) (جـ) ٢ دَ (−أ) (د) −٢ دَ (أ)

(٣٨) إذا كانت د دالة فردية قابلة للاشتقاق لكل س ∈ ح فإن : دَ (أ) + دَ (−أ) = ...

(أ) صفر (ب) ٢ دَ (أ) (جـ) ١ (د) ٢ د (−أ)

(٣٩) إذا كانت الدالة د : د (س) = أ س^٢ − ب س + ١ ، وكان دَ (٢) = ٢ ومتوسط التغير للدالة د عندما تتغير س من ١ إلى ١,٢ يساوى ٥,٦ فإن : أ + ب = ...

(أ) −١٠ (ب) −٢ (جـ) ١٢ (د) −١٢

(٤٠) إذا كان : د (س) = $\begin{vmatrix} س & −١ \\ ١ & ٢ س \end{vmatrix}$ فإن : دَ (٢) = ...

(أ) ١٠ (ب) ٨ (جـ) ٦ (د) ٢

(٤١) أى مما يأتى لا يكافىء المشتقة الأولى للدالة د (س) = $\sqrt{س}$ ؟

(أ) $\frac{١}{٢ \sqrt{س}}$ (ب) $\frac{\sqrt{س}}{٢ س}$ (جـ) $\frac{س}{٢ \sqrt{س}}$ (د) $\frac{١}{٢}$ س$^{-\frac{١}{٢}}$

(٤٢) إذا كانت : د (س) = ٣ س^٢ − ٥ س + ١ وكانت د (أ) = دَ (أ) فإن : أ = ...

(أ) ٣ أ، $\frac{٢}{٣}$ (ب) $\frac{٢}{٣}$ أ، $\frac{١}{٣}$ (جـ) ١ أ، ٣ (د) ٢ أ، ٣

(٤٣) إذا كانت : ص = (أ س + ٢)^٢ وكان $\frac{دص}{دس}$ = ٦ عندما س = ١ فإن : أ = ...

(أ) ١ أ، ٦ (ب) ١ أ، −٣ (جـ) −٣ أ، ٢ (د) ٢ أ، ٦

(٤٤) متوازى مستطيلات قاعدته مربعة طول ضلعه س سم وارتفاعه ص سم وحجمه ٨٠ سم^{٣}

فإن : $\frac{ءص}{ءس}$ = ... عندما س = ٤

(أ) ٤ (ب) $\frac{-٥}{٤}$ (جـ) $\frac{-٥}{٢}$ (د) $\frac{-٢}{٥}$

(٤٥) فى الشكل المقابل :

إذا كان : $\overleftrightarrow{أجـ}$ يقطع الدائرة فى ب ، جـ

، $\overleftrightarrow{أهـ}$ يقطع الدائرة فى ء ، هـ

فإن : $\frac{ءص}{ءس}$ = ... عندما س = ٣ سم

(أ) ٣ (ب) ٦ (جـ) ٨ (د) ١٢

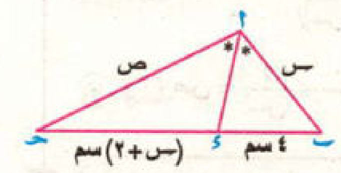
(٤٦) فى الشكل المقابل :

إذا كانت : $\overline{أب}$ قطعة مماسة للدائرة

فإن : $\frac{ءص}{ءس}$ = ... عندما س = ٥

(أ) −٥ (ب) $-\frac{١}{٥}$

(جـ) $-\frac{١}{٢٥}$ (د) −٢٥



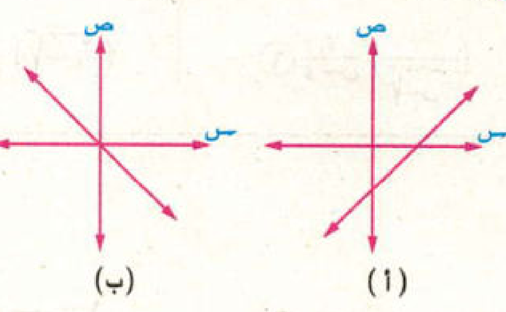
(٤٧) فى الشكل المقابل :

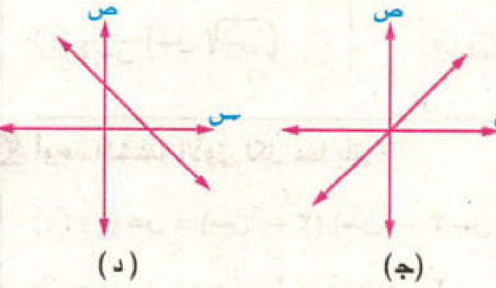
إذا كانت : $\overrightarrow{أء}$ ينصف ∠ ب أ جـ

فإن : $\frac{ءص}{ءس}$ = ... عندما س = ٢

(أ) $\frac{١}{٢}$ (ب) ١ (جـ) $١\frac{١}{٢}$ (د) ٢

(٤٨) إذا كان : ص = أ س^{٢} + ٧ كثيرة الحدود حيث أ ∈ ح$^{-}$ فإن : $\frac{ءص}{ءس}$ يمكن أن يمثلها الشكل ....





ثانيًا الأسئلة المقالية

(١) أوجد المشتقة الأولى لكل مما يأتى :

① ص = ٧

② ص = ٥ س

③ ص = س^{٤}

④ ص = $\frac{٤}{٣}$ π س^{٣}

⑤ ص = $\frac{-٤}{س^{٥}}$

⑥ د (س) = ٣ س^{٢} − ٤ س + ٥

⑦ $ص = ٨ - \frac{٢}{٣} س^{٣} + \frac{١}{٥} س^{٥}$

⑧ $ص = ٢ س^{٦} + س^{-٩}$

⑨ $ص = س^{٧} + \frac{١}{س^{٧}}$

⑩ $ص = س^{٤} - ٣ س^{٢} + ٥ - \frac{٢}{س^{٢}} - \frac{٣}{س^{٤}}$

⑪ $ص = س (٣ س^{٢} - ٢ س) + ١٢ س$

⑫ $ص = \frac{٥ س^{٥} - ٢ س^{٣} + ١٠ س^{٢} - ٢٠}{١٠ س^{٣}}$

⑬ $ص = \frac{٢}{س^{٢}} (س^{٤} - ٤ س^{٢} + س - ٣)$

⑭ $ص = \frac{(س - ٢)(س + ٢)(س^{٢} + ٤)}{س^{٢}}$

⑮ $ص = (س - ١)(س + ١)(س^{٢} + ١)(س^{٤} + ١)(س^{٨} + ١)(س^{١٦} + ١)$

---

٢ أوجد المشتقة الأولى لكل مما يأتى :

① $ص = \sqrt[٣]{س^{٥}}$

② $ص = ٢ س^{٦} + ٣ \sqrt{س}$

③ $ص = \sqrt{س} + \frac{١}{\sqrt{س}}$

④ $ص = س \left(٣ س^{٢} - \sqrt{س}\right)$

⑤ $ص = \frac{\sqrt{س} - ٢ س}{\sqrt{س}}$

⑥ $ص = \frac{٤ س^{٢} - ٣ س + ٢ \sqrt{س}}{س}$

⑦ $ص = \frac{٥}{س} + س \sqrt{س} + \sqrt{٣} س - ٤$

⑧ $ص = \sqrt{س} \left(س \sqrt{س} - \frac{س}{\sqrt{س}} - ٣\right)$

---

٣ أوجد قيمة كل مما يأتى :

① $\frac{ء}{ءس} \left(\frac{١}{س^{٢}}\right)$

② $\frac{ء}{ءس} \left(س^{\frac{١}{٢}}\right)$

③ $\frac{ء}{ءس} \left(\frac{١}{\sqrt[٣]{س}}\right)$

④ $\frac{ء}{ءس} \left(س \sqrt{س}\right)$

⑤ $\frac{ء}{ءس} \left(\sqrt[٣]{س^{٢}}\right)$

⑥ $\frac{ء}{ءس} \left(\frac{١}{\sqrt[٣]{س^{-٥}}}\right)$

---

٤ أوجد المشتقة الأولى لكل مما يأتى :

① $ص = (س^{٢} + ٣)(س^{٣} - ٣ س + ١)$

② $ص = (٤ س^{٢} - ١)(٧ س^{٣} + س)$ عند $س = ١$ «١٣٠»

③ $ص = (س^{٢} + ١)(س^{٣} + ٣)$ عند $س = -١$ «٢»

④ $د(س) = (٤ س^{٢} - ٣ س + ٧)(س^{٢} + ٢ س + ٣)$ عند النقطة (٠ ، ٢١) «٥»

⑤ $د(س) = س (٣ س - ٤)(س^{٢} - ٢)$ عند $س = ٠$ «٨»

⑥ $ص = (٢ س + ١)(٣ س^{٢} - ٢)(٤ س^{٣} + ٣)$



٥ أوجد المشتقة الأولى لكل مما يأتي :

① ص = $\frac{٤}{س^{٢}}$

② ص = $\frac{٥}{٢س + ٣}$

③ د (س) = $\frac{س}{٢س + ١}$

④ ص = $\frac{٥س - ٢}{٥س + ١}$

⑤ د (س) = $\frac{س}{س^{٢} - ١}$

⑥ د (س) = $\frac{س^{٢} - ١}{س^{٢} + ١}$

⑦ ص = $\frac{س^{٢} - ٦س + ٧}{س - ٢}$

⑧ ص = $\frac{س^{٢} + ٢س + ٥}{س^{٢} - ٥س + ١}$

⑨ د (س) = ١ - $\frac{١}{س - ١}$ ثم أوجد : دَ (٣) «$\frac{١}{٤}$»

⑩ د (س) = $\frac{س}{س + ٢}$ - $\frac{س - ١}{س - ٢}$ ثم أوجد : دَ (٠) «$\frac{٣}{٤}$»

---

٦ أوجد قيم أ ، ب إذا كانت كل من الدوال الآتية قابلة للاشتقاق عند النقطة المبينة :

① د (س) = $\begin{cases} س^{٢} + ٤ & ، س \leq ١ \\ أس + ب & ، س > ١ \end{cases}$ عند س = ١ «٢ ، ٣»

② د (س) = $\begin{cases} س^{٢} - أ & ، س \leq ٢ \\ أس + ب & ، س > ٢ \end{cases}$ عند س = ٢ «٤ ، -٨»

③ د (س) = $\begin{cases} أس^{٢} + ب س + ٧ & ، س \leq ٢ \\ \frac{٥}{س - ١} & ، س > ٢ \end{cases}$ عند س = ٢ «-٢ ، ٣»

---

٧ إذا كانت : ص = $\frac{س^{٢} - ١}{س^{٣}}$ أثبت أن : $س^{٤} \left(\frac{ءص}{ءس}\right) = ٣$

---

٨ إذا كانت : ص = $\frac{٢}{\sqrt{س}} + \sqrt{س}$ أثبت أن : ٢ $س^{٢}$ ص $\left(\frac{ءص}{ءس}\right) = س^{٢} - ٤$

---

٩ إذا كانت : ص = $\frac{٣}{س - ١}$ أثبت أن : $\frac{ءص}{ءس} = -\frac{١}{٣} ص^{٢}$

---

١٠ إذا كانت : ص = $\frac{ل^{٢}}{س + ل^{٢}}$ ، ل ثابت أثبت أن : $\frac{ءص}{ءس} + \left(\frac{ص}{ل}\right)^{٢} = ٠$

---

١١ إذا كانت : د (س) = أ$س^{٣}$ + ب س وكانت : د (١) = ٢ ، دَ (١) = صفر

فما قيمة كل من : أ ، ب ؟ «-١ ، ٣»

١٢ أوجد قيم $س$ التي تجعل $دَ(س) = ٧$ حيث $د(س) = س^٣ - ٥ س + ٢$ «± ٢»

١٣ أوجد قيمة الثابت أ إذا كانت : $د(س) = \frac{س + أ}{س - أ}$ ، $دَ(٢) = -٢$ «١ ، ٤»

١٤ إذا كانت : $د(س) = \frac{س^٢ + أ س + ب}{س^٢ - س + ٢}$ وكان $د(٠) = ١$ ، $دَ(٠) = ١$

فما قيمة كل من : أ ، ب ؟ «١ ، ٢»

١٥ إذا كان : $ص = أ س^٣ + ب س^٢$ ، $\frac{ءص}{ءس} = ٨$ عندما $س = ١$ وكان متوسط تغير ص عندما تتغير $س$ من -١ إلى ٢ يساوى ٧ أوجد قيمتي الثابتين : أ ، ب «٢ ، ١»

ثالثًا مسائل تقيس مهارات التفكير

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

① إذا كان : $دَ(س) \times ر(س) + رَ(س) \times د(س) = س + \frac{١}{س}$

فإن : $\frac{ء}{ءس}[د(س) \times ر(س)] = ...$ عند $س = ٢$

(أ) $\frac{٣}{٤}$ (ب) ١ (جـ) $\frac{٥}{٢}$ (د) ٣

② إذا كان : $د(س) = (٢ س + ١) \times هـ(س)$ وكان : $د(٢) = ١٥$ ، $هـَ(٢) = ٤$

فإن : $دَ(٢) = ...$

(أ) ٢٦ (ب) ٢٨ (جـ) ٣٠ (د) ٣٢

③ إذا كان : $٢ د(١) = دَ(١) = ٤$ ، $٣ هـ(١) = هـَ(١) = ٣$

فإن : $\frac{ء}{ءس}\left[\frac{د(س)}{هـ(س)}\right] = ...$ عند $س = ١$

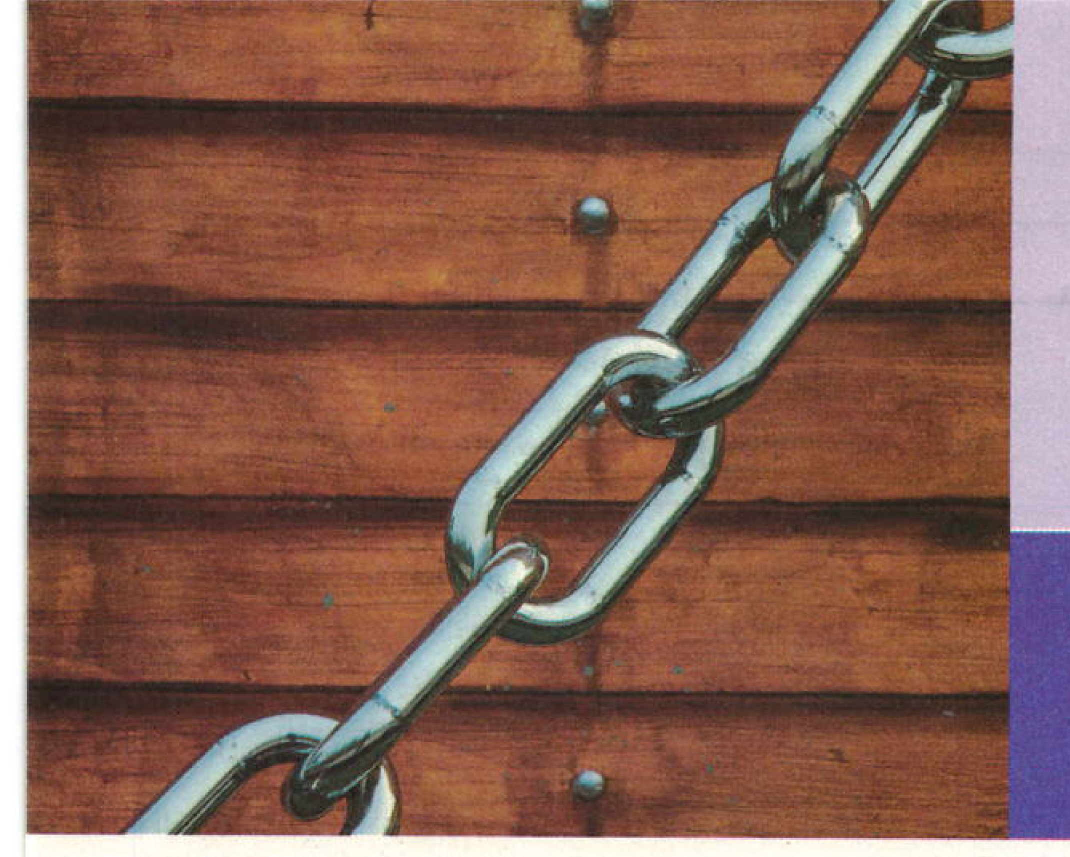
(أ) -٤ (ب) -٢ (جـ) ١ (د) ٣

④ إذا كانت : $د(س) = \frac{هـ(س)}{٢ س^٢ + ٣}$ وكانت : $هـ(١) = -٥$ ، $هـَ(١) = ٦$ فإن : $دَ(١) = ...$

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) ٣ (د) ٤

⑤ إذا كانت : $د(س) = (س - ١)(س - ٢)(س - ٣)$ فإن : $\sum_{ك=١}^{٣} دَ(ك) = ...$

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) ٣ (د) ٤



الدرس

4

مشتقة دالة الدالة (قاعدة السلسلة)

إذا كانت ص دالة فى ع ولتكن ص = د (ع) ، وكانت ع دالة فى س ولتكن ع = ر (س)

فإن : الدالة ص الناتجة من تركيب الدالتين د ، ر تسمى دالة الدالة فى س حيث :

ص = (د ∘ ر) (س) = د (ر (س)) ولإيجاد مشتقة دالة الدالة نتبع النظرية الآتية :

نظرية «قاعدة السلسلة»

إذا كانت : ص = د (ع) دالة قابلة للاشتقاق بالنسبة إلى ع ، ع = ر (س) دالة قابلة للاشتقاق بالنسبة إلى س

فإن : $\frac{ءص}{ءس} = \frac{ءص}{ءع} \times \frac{ءع}{ءس}$ ويكون : ص = د [ر (س)] قابلة للاشتقاق بالنسبة إلى س

مثال ١

أوجد $\frac{ءص}{ءس}$ فى كل مما يأتى :

١ ص = $ع^{٨}$ + ١ ، ع = ٢ س − ٣

٢ ص = $\frac{ع}{ع - ١}$ ، ع = $س^{٢}$ + ٣ س + ٣ ثم أوجد : $[\frac{ءص}{ءس}]_{س = ١}$

الحل

١ $\frac{ءص}{ءع} = ٨ ع^{٧}$ ، $\frac{ءع}{ءس} = ٢$ ∴ $\frac{ءص}{ءس} = \frac{ءص}{ءع} \times \frac{ءع}{ءس} = ٨ ع^{٧} \times ٢ = ١٦ ع^{٧} = ١٦ (٢ س - ٣)^{٧}$

٢ $\frac{ءص}{ءع} = \frac{ع - ١ - ع}{(ع - ١)^{٢}} = \frac{-١}{(ع - ١)^{٢}}$ ، $\frac{ءع}{ءس} = ٢ س + ٣$

∴ $\frac{ءص}{ءس} = \frac{ءص}{ءع} \times \frac{ءع}{ءس} = \frac{-١}{(ع - ١)^{٢}} \times (٢ س + ٣) = \frac{-(٢ س + ٣)}{((س^{٢} + ٣ س + ٣) - ١)^{٢}} = \frac{-(٢ س + ٣)}{(س^{٢} + ٣ س + ٢)^{٢}}$

∴ $[\frac{ءص}{ءس}]_{س = ١} = \frac{-(٢ + ٣)}{(١ + ٣ + ٢)^{٢}} = \frac{-٥}{٣٦}$

مشتقة الدالة $[د(س)]^ن$

إذا كانت : $ص = [د(س)]^ن$ حيث د قابلة للاشتقاق بالنسبة إلى س ، ن عدد حقيقى

فإن : $\frac{ءص}{ءس} = ن [د(س)]^{ن-١} \times د'(س)$

أى أن مشتقة $(قوس)^ن = ن (القوس)^{ن-١} \times$ مشتقة ما بداخل القوس.

مثال ٢

أوجد المشتقة الأولى لكل مما يأتى :

١ $ص = (٢ س^٣ + ٥)^٤$

٢ $ص = \left(\frac{٣ س}{٢ س + ١}\right)^٥$

٣ $ص = \sqrt[٣]{(س^٢ - ٣ س - ٤)^٢}$

الحل

١ $\frac{ءص}{ءس} = ٤ (٢ س^٣ + ٥)^٣ \times ٦ س^٢ = ٢٤ س^٢ (٢ س^٣ + ٥)^٣$

٢ $\frac{ءص}{ءس} = ٥ \left(\frac{٣ س}{٢ س + ١}\right)^٤ \times \frac{٣ (٢ س + ١) - ٢ \times ٣ س}{(٢ س + ١)^٢}$

$= ٥ \left(\frac{٣ س}{٢ س + ١}\right)^٤ \times \frac{٣}{(٢ س + ١)^٢} = \left(\frac{٣ س}{٢ س + ١}\right)^٤ \times \frac{١٥}{(٢ س + ١)^٢}$

٣ ∵ $ص = (س^٢ - ٣ س - ٤)^{\frac{٢}{٣}}$

∴ $\frac{ءص}{ءس} = \frac{٢}{٣} (س^٢ - ٣ س - ٤)^{-\frac{١}{٣}} (٢ س - ٣) = \frac{٢ (٢ س - ٣)}{٣ \sqrt[٣]{س^٢ - ٣ س - ٤}}$

مثال ٣

أوجد المشتقة الأولى لكل مما يأتى :

١ $ص = (٢ س + ١)^٣ (٣ س - ٢)^٤$

٢ $ص = \frac{(س^٢ + ١)^٣}{(٢ س - ٣)^٢}$

الحل

١ $\frac{ءص}{ءس} = (٢ س + ١)^٣ \times ٤ (٣ س - ٢)^٣ \times ٣ + (٣ س - ٢)^٤ \times ٣ (٢ س + ١)^٢ \times ٢$

$= ١٢ (٢ س + ١)^٣ (٣ س - ٢)^٣ + ٦ (٢ س + ١)^٢ (٣ س - ٢)^٤$

$= ٦ (٢ س + ١)^٢ (٣ س - ٢)^٣ (٢ (٢ س + ١) + (٣ س - ٢))$

$= ٦ (٢ س + ١)^٢ (٣ س - ٢)^٣ (٤ س + ٢ + ٣ س - ٢)$

$= ٦ (٢ س + ١)^٢ (٣ س - ٢)^٣ (٧ س)$

$= ٤٢ س (٢ س + ١)^٢ (٣ س - ٢)^٣$

٢ $\frac{ءص}{ءس} = \frac{٣ (س^٢ + ١)^٢ \times ٢ س \times (٢ س - ٣)^٢ - ٢ (٢ س - ٣) \times ٢ \times (س^٢ + ١)^٣}{((٢ س - ٣)^٢)^٢}$

$= \frac{٦ س (س^٢ + ١)^٢ (٢ س - ٣)^٢ - ٤ (س^٢ + ١)^٣ (٢ س - ٣)}{(٢ س - ٣)^٤}$

$= \frac{٢ (س^٢ + ١)^٢ (٢ س - ٣) (٣ س (٢ س - ٣) - ٢ (س^٢ + ١))}{(٢ س - ٣)^٤}$

$= \frac{٢ (س^٢ + ١)^٢ (٦ س^٢ - ٩ س - ٢ س^٢ - ٢)}{(٢ س - ٣)^٣}$

$= \frac{٢ (س^٢ + ١)^٢ (٤ س^٢ - ٩ س - ٢)}{(٢ س - ٣)^٣}$

ملاحظة

إذا كانت : $ص = \sqrt{د (س)}$ فإن : $\frac{ءص}{ءس} = \frac{١}{٢ \sqrt{د (س)}} \times دَ (س) = \frac{دَ (س)}{٢ \sqrt{د (س)}}$

أى أن : مشتقة الجذر التربيعى لدالة = $\frac{١}{٢ \text{(الجذر)}}$ × مشتقة ما تحت الجذر.

مثال ٤

أوجد $\frac{ءص}{ءس}$ لكل مما يأتى :

١ $ص = \sqrt{٢ س + ٣}$

٢ $ص = \sqrt{٥ س^٣ - ١٢ س^٢ + ٨ س + ١}$

الحل

١ $\frac{ءص}{ءس} = \frac{١}{٢ \sqrt{٢ س + ٣}} \times ٢ = \frac{١}{\sqrt{٢ س + ٣}}$

٢ $\frac{ءص}{ءس} = \frac{١٥ س^٢ - ٢٤ س + ٨}{٢ \sqrt{٥ س^٣ - ١٢ س^٢ + ٨ س + ١}}$

مثال ٥

إذا كانت : $ص = \frac{ع^٢}{ع^٢ + ١}$ ، $ع = \sqrt{٣ س - ٢}$ **فأوجد :** $\frac{ءص}{ءس}$ عند $س = ١$

الحل

$\because \frac{ءص}{ءع} = \frac{٢ ع (ع^٢ + ١) - ٢ ع (ع^٢)}{(ع^٢ + ١)^٢} = \frac{٢ ع^٣ + ٢ ع - ٢ ع^٣}{(ع^٢ + ١)^٢} = \frac{٢ ع}{(ع^٢ + ١)^٢}$ ، $\frac{ءع}{ءس} = \frac{٣}{٢ \sqrt{٣ س - ٢}}$

$\therefore \frac{ءص}{ءس} = \frac{ءص}{ءع} \times \frac{ءع}{ءس} = \frac{٢ ع}{(ع^٢ + ١)^٢} \times \frac{٣}{٢ \sqrt{٣ س - ٢}}$

وبالتعويض عن ع : $\therefore \frac{ءص}{ءس} = \frac{٢ \sqrt{٣ س - ٢}}{(٣ س - ٢ + ١)^٢} \times \frac{٣}{٢ \sqrt{٣ س - ٢}} = \frac{٣}{(٣ س - ١)^٢}$

$\therefore \left[\frac{ءص}{ءس}\right]_{س = ١} = \frac{٣}{(٣ \times ١ - ١)^٢} = \frac{٣}{٤}$

حل آخر : فى بعض الأحيان نجد أنه من الأفضل التعويض عن ع فى ص وذلك لجعل ص دالة فى س ثم إيجاد $\frac{ءص}{ءس}$ كالآتى :

$\because$ ع = $\sqrt{٣س - ٢}$ $\therefore$ ص = $\frac{(\sqrt{٣س - ٢})^٢}{(\sqrt{٣س - ٢})^٢ + ١} = \frac{٣س - ٢}{٣س - ٢ + ١} = \frac{٣س - ٢}{٣س - ١}$

$\therefore \frac{ءص}{ءس} = \frac{٣(٣س - ١) - ٣(٣س - ٢)}{(٣س - ١)^٢} = \frac{٩س - ٣ - ٩س + ٦}{(٣س - ١)^٢} = \frac{٣}{(٣س - ١)^٢}$

$\therefore [\frac{ءص}{ءس}]_{س = ١} = \frac{٣}{(٣ \times ١ - ١)^٢} = \frac{٣}{٤}$

نتيجـــة

إذا كانت ص دالة قابلة للاشتقاق بالنسبة إلى س فإن : $\frac{ء}{ءس}$ (ص^ن) = ن ص$^{ن - ١}$ × $\frac{ءص}{ءس}$

مثال ٦

أوجد كلًا مما يأتى :

١ $\frac{ء}{ءس}$ (ص^٣) | ٢ $\frac{ء}{ءص}$ (ص^٣) | ٣ $\frac{ء}{ءن}$ (ص^٣)

٤ $\frac{ء}{ءع}$ (ف^٨) | ٥ $\frac{ء}{ءس}$ (ص)

الحـــل

١ $\frac{ء}{ءس}$ (ص^٣) = ٣ ص^٢ × $\frac{ءص}{ءس}$

٢ $\frac{ء}{ءص}$ (ص^٣) = ٣ ص^٢ (لاحظ أن الاشتقاق هنا بالنسبة إلى ص)

٣ $\frac{ء}{ءن}$ (ص^٣) = ٣ ص^٢ × $\frac{ءص}{ءن}$

٤ $\frac{ء}{ءع}$ (ف^٨) = ٨ ف^٧ × $\frac{ءف}{ءع}$

٥ $\frac{ء}{ءس}$ (ص) = ١ × $\frac{ءص}{ءس}$ = $\frac{ءص}{ءس}$

مثال ٧

أوجد $\frac{ءص}{ءس}$ فى كل مما يأتى :

١ ص^٣ = س^٤ - ٢ س^٢ + ١ | ٢ ص^٤ = س^٥ - س

الحـــل

١ $\because$ ص^٣ = س^٤ - ٢ س^٢ + ١ $\therefore$ ٣ ص^٢ × $\frac{ءص}{ءس}$ = ٤ س^٣ - ٤ س

$\therefore \frac{ءص}{ءس} = \frac{٤س^٣ - ٤س}{٣ ص^٢} = \frac{٤س^٣ - ٤س}{٣ \sqrt[٣]{(س^٤ - ٢س^٢ + ١)^٢}}$

حل آخر : ∵ ص = $(س^4 - 2س^2 + 1)^{\frac{1}{3}}$

∴ $\frac{ءص}{ءس} = \frac{1}{3}(س^4 - 2س^2 + 1)^{-\frac{2}{3}}(4س^3 - 4س) = \frac{4س^3 - 4س}{3\sqrt[3]{(س^4 - 2س^2 + 1)^2}}$

[٢] ∵ $ص^4 = س^5 - س$ ∴ $4ص^3 \times \frac{ءص}{ءس} = 5س^4 - 1$

∴ $\frac{ءص}{ءس} = \frac{5س^4 - 1}{4ص^3} = \pm \frac{5س^4 - 1}{4\sqrt[4]{(س^5 - س)^3}}$

مثال ٨

إذا كانت : ص = $ع^2 + 3ع + 5$ ، $ع = \frac{1}{2}س^2 + 2$

أثبت أن : $\frac{ءص}{ءس} - 7\frac{ءع}{ءس} - س^3 =$ صفر

الحل

∵ $\frac{ءص}{ءع} = 2ع + 3$ ، $\frac{ءع}{ءس} = \frac{1}{2} \times 2س = س$

∴ $\frac{ءص}{ءس} = \frac{ءص}{ءع} \times \frac{ءع}{ءس} = (2ع + 3) \times س$ وبالتعويض عن قيمة ع

∴ $\frac{ءص}{ءس} = \left(2\left(\frac{1}{2}س^2 + 2\right) + 3\right) \times س = (س^2 + 4 + 3) \times س = س^3 + 7س$

∴ $\frac{ءص}{ءس} - 7\frac{ءع}{ءس} - س^3 = س^3 + 7س - 7س - س^3 =$ صفر (وهو المطلوب)

ملاحظة

إذا كانت : ص = (د ∘ ر) (س) = د (ر (س))

فإن : $\frac{ءص}{ءس} = د'(ر(س)) \cdot ر'(س)$

مثال ٩

إذا كان : د (٢س − ١) = $س^2 + 3$ **أوجد :** د'(٥)

الحل

∵ د (٢س − ١) = $س^2 + 3$ ∴ د'(٢س − ١) × ٢ = ٢س

وبوضع ٢س − ١ = ٥ ∴ س = ٣

∴ د'(٥) × ٢ = ٦ ∴ د'(٥) = ٣

تمارين 12 على مشتقة دالة الدالة (قاعدة السلسلة)

اختبر نفسك

من أسئلة الكتاب المدرسي | فهم | تطبيق | مستويات عليا

أولاً أسئلة الاختيار من متعدد

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

① إذا كان : ص = سـ^{٢} ، سـ = ع^{٣} − ١ فإن : $\frac{ء ص}{ء ع}$ = ...

(أ) ع^{٣} − ١ (ب) ٦ ع^{٢}

(جـ) ٦ ع^{٢} (ع^{٣} − ١) (د) سـ^{٢} (ع^{٣} − ١)

② إذا كان : ص = سـ^{٢} + سـ ، سـ = ع^{٢} + ع فإن : $\frac{ء ص}{ء ع}$ = ... عند ع = −١

(أ) −١ (ب) ١ (جـ) صفر (د) ٢

③ إذا كانت : ص = ع^{٣} − ع − ١ ، ع = سـ − $\frac{٤}{سـ}$ فإن : $\frac{ء ص}{ء سـ}$ = ... عند سـ = ٢

(أ) −١ (ب) −٢ (جـ) $\frac{١}{٢}$ (د) $\frac{-١}{٢}$

④ إذا كانت : ص سـ = ٥ ، سـ ع = ٣ فإن : $\frac{ء ص}{ء ع}$ = ...

(أ) ١٥ (ب) $\frac{٥}{٣}$ (جـ) $\frac{٣}{٥}$ (د) صفر

⑤ إذا كانت : ص = $\frac{سـ - ٥}{سـ + ٥}$ ، سـ = ٢ ع + ٣ فإن : $\frac{ء ص}{ء ع}$ = ... عند ع = ١

(أ) $\frac{١}{٢٥}$ (ب) −$\frac{١}{٢٥}$ (جـ) −$\frac{١}{٥}$ (د) $\frac{١}{٥}$

⑥ إذا كانت : ع = $\frac{١}{٢}$ ص^{٢} + ص − ٢ ، ص = سـ^{٢} + سـ + ١

فإن : $\frac{ء ع}{ء سـ}$ = ... عند سـ = −$\frac{١}{٢}$

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) $\frac{١}{٢}$ (د) −$\frac{١}{٢}$

⑦ إذا كانت : ص = $\sqrt{ع}$ + $\frac{١}{\sqrt{ع}}$ ، ع = سـ^{٢} + ٢٥ فإن : $\frac{ء ص}{ء سـ}$ = ... عند سـ = ٠

(أ) −٢ (ب) صفر (جـ) ١ (د) ٣

⑧ إذا كانت : ص = $\frac{ع + ٣}{ع - ١}$ ، ع = $\frac{سـ + ١}{سـ - ٣}$ فإن : $\frac{ء ص}{ء سـ}$ = ... عند سـ = ٤

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) ٢ (د) ٣

⑨ إذا كانت : د (سـ) = $\sqrt{سـ^{٢} + ٩}$ فإن : دَ (−٤) = ...

(أ) $\frac{-٤}{٥}$ (ب) ٥ (جـ) $\frac{١}{١٠}$ (د) $\frac{-١}{١٠}$

(١٠) إذا كان : ص = (س^٢ − ٢)^٥ فإن : $\frac{ءص}{ءس}$ = ...

(أ) ٥ (س^٢ − ٢)^٤ (ب) ١٠ س (س^٢ − ٢)^٤

(جـ) ٢٢ س^٥ (د) ٢ س (س^٢ − ٢)^٥

(١١) إذا كانت : ص = (ع + ١)^٣ ، ع = س^٥ − ١ فإن : $\frac{ءص}{ءس}$ = ...

(أ) س^{١٥} (ب) س^٨ (جـ) ١٥ س^{١٤} (د) ٨ س^٧

(١٢) $\frac{ء}{ءس}$ (٢ − ٣ س)$^{-٢}$ = ...

(أ) ١٢ س$^{-٣}$ − ٢٧ س$^{-٤}$ (ب) $\frac{١}{٣}$ (٢ − ٣ س)$^{-١}$

(جـ) ٦ (٢ − ٣ س)$^{-٣}$ (د) −٢ (٢ − ٣ س)$^{-٣}$

(١٣) إذا كان : ص = $\sqrt{٢ - س}$ فإن : $\frac{ءص}{ءس}$ = ...

(أ) − $\frac{١}{٢ ص}$ (ب) −١ (جـ) −٢ ص − ١ (د) −٢ ص

(١٤) إذا كان : ص = (س + ك)^٢ ، $\frac{ءص}{ءس}$ = ١٢ عند س = صفر فإن : ك = ...

(أ) ٢ فقط. (ب) ± ٢ (جـ) −٢ فقط. (د) ٤ فقط.

(١٥) إذا كان : ص = $\frac{١}{\sqrt{س^٢ + ١}}$ فإن : صَ = ...

(أ) $\frac{-س}{\sqrt{س^٢ + ١}}$ (ب) $\frac{-س}{\sqrt{(س^٢ + ١)^٣}}$ (جـ) $\frac{-س}{\sqrt{(س^٢ + ١)^٢}}$ (د) $\frac{-س}{\sqrt[٣]{(س^٢ + ١)^٢}}$

(١٦) إذا كانت : ص = $\sqrt[٣]{٢ س^٢ - ٣ س + ٩}$ فإن : $\frac{ءص}{ءس}$ = ... عند س = ١

(أ) $\frac{١}{٦}$ (ب) $\frac{١}{١٢}$ (جـ) ٦ (د) ١٢

(١٧) إذا كانت : ص = د (س) فإن : $\frac{ء}{ءس}$ (ص^٦) = ...

(أ) ٦ ص^٥ (ب) ص^٦ (جـ) صفر (د) ٦ ص^٥ $\frac{ءص}{ءس}$

(١٨) إذا كان : ص^٤ = س^٣ فإن : $\frac{ءص}{ءس}$ = ...

(أ) $\frac{٣ س}{٤ ص}$ (ب) $\frac{س^٢}{٤ ص^٢}$ (جـ) $\frac{٣ س^٢}{ص^٣}$ (د) $\frac{٣ ص}{٤ س}$

(١٩) إذا كان : ص = $\frac{ع}{ع - ١}$ ، ع = $\frac{س}{س + ١}$ فإن : ....

(أ) $\frac{ءص}{ءس}$ + ١ = ٠ (ب) $\frac{ءص}{ءع}$ = $\frac{ءع}{ءس}$ × $\frac{ءس}{ءص}$

(جـ) $\frac{ءص}{ءس}$ = ١ (د) $\frac{ءص}{ءس}$ = $\frac{ع س}{(ع - ١)(س + ١)}$

(٢٠) إذا كان : س^٢ + ص^٢ = ص فإن : ....

(أ) $\frac{ءص}{ءس}$ = ٢ س + ٢ ص (ب) ٢ س + ٢ ص = ١

(جـ) $\frac{ءص}{ءس}$ = $\frac{٢ س}{١ - ٢ ص}$ (د) $\frac{ءص}{ءس}$ = $\frac{س^٢}{ص - س^٢}$

(٢١) إذا كانت : د (س) = $س^{٢}$ + ٣ فإن : $\frac{\text{ء}}{\text{ء س}}$ [د (د (س))] = ... عند س = ١

(أ) ١ (ب) ٤ (جـ) ٨ (د) ١٦

(٢٢) إذا كانت : د (٣ − ٢ س) = ٣ $س^{٢}$ + ١ فإن : $\bar{\text{د}}$ (٧) = ...

(أ) −١٢ (ب) −٢ (جـ) ٦ (د) ٤٢

(٢٣) إذا كان : د (س − ١) = س − ٢ ر ($س^{٢}$ + ٣) وكان : $\bar{\text{د}}$ (١) = ٩ فإن : $\bar{\text{ر}}$ (٧) = ...

(أ) −٢ (ب) −١ (جـ) ١ (د) ٢

(٢٤) إذا كان : ر (س) = $\sqrt{\text{د (س)}}$ حيث كل من د (س) ، ر (س) دوال قابلة للإشتقاق وكانت د (٣) = ٤
فإن : $\bar{\text{ر}}$ (٣) : $\bar{\text{د}}$ (٣) = ...

(أ) ١ : ٤ (ب) ١ : ١٦ (جـ) ٤ : ١ (د) ١٦ : ١

(٢٥) إذا كانت : د (س) = $س^{٢}$ + ٣ فإن : $\bar{\text{د}}$ (د (س)) = ... عند س = ١

(أ) ١ (ب) ٤ (جـ) ٨ (د) ١٦

(٢٦) إذا كانت : ٢ د (٣) = ٥ $\bar{\text{د}}$ (٣) = ١٠ ، $\bar{\text{هـ}}$ (٥) = ٢ فإن : $\overline{(\text{هـ} \circ \text{د})}$ (٣) = ...

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) ٣ (د) ٤

(٢٧) إذا كان : د (س) = $\sqrt{\text{ر (س)}}$ وكان $\bar{\text{د}}$ (س) = $\frac{١}{\sqrt{\text{ر (س)}}}$ فإن : $\bar{\text{ر}}$ (س) = ...

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) س (د) $\bar{\text{د}}$ (س)

(٢٨) الشكل المقابل يمثل منحنى دالة د
فأى مما يأتى يكون موجب

(أ) $\frac{\text{ء}}{\text{ء س}}$ [د (س)] عند أ

(ب) $\frac{\text{ء}}{\text{ء س}}$ $[(\text{د (س)})^{٢}]$ عند ء

(جـ) $\frac{\text{ء}}{\text{ء س}}$ $[(\text{د (س)})^{٢}]$ عند ب

(أ) $\frac{\text{ء}}{\text{ء س}}$ $[(\text{د (س)})^{٣}]$ عند حـ

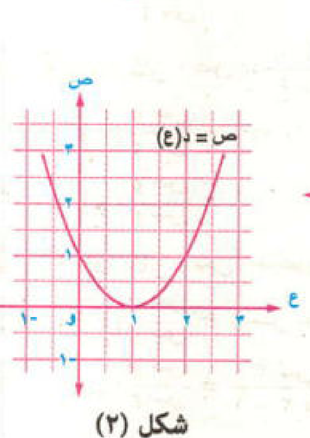
(٢٩) فى الشكلين المقابلين :
إذا كان الشكل الأول يمثل دالة خطية
والثانى يمثل دالة تربيعية
فإن : $\frac{\text{ء ص}}{\text{ء س}}$ = ... عندما ع = ٥

(أ) ٤

(ب) ٨

(جـ) ١٢

(د) ١٦





شكل (١) شكل (٢)

ثانيًا / الأسئلة المقالية

١ أوجد $\frac{ءص}{ءس}$ فى كل مما يأتى :

① ص = $ع^2$ ، ع = ٣ $س^2$ − ٢ عند س = ٢ «٢٤٠»

② ص = $ع^7$ ، ع = $س^3$ + ٢ $س^2$ − ٤ عند س = ١ «٤٩»

③ ص = $ع^5$ + ٣ ، ع = $(س - ١)^3$ عند س = ٢ «١٥»

④ ص = $ع^3$ + ع − ٢ ، ع = $س^2$ − س عند النقطة (٠ ، −٢) «−١»

⑤ ص = $\sqrt{ع}$ ، ع = $\frac{س - ٢}{س + ١}$ عند س = ٣ «$\frac{٣}{١٦}$»

⑥ ص = $\frac{ع - ١}{ع + ١}$ ، ع = $\frac{س + ١}{س - ١}$ عند س = ٢ «$-\frac{١}{٤}$»

⑦ ص = $ع^2$ − ع + ١ ، ع = $\sqrt[3]{(س - ١)^2}$ عند س = ٢ «$\frac{٢}{٣}$»

---

٢ أوجد $\frac{ءص}{ءس}$ فى كل مما يأتى :

① ص = ٣ $ع^2$ − ١ ، ع = $\frac{٥}{س}$

② ص = $\sqrt[3]{ع}$ ، ع = $س^2$ − ٣ س + ٢

③ ص = ع + $\frac{١}{ع}$ ، س ع = ١

④ ص = $\frac{ع^2}{ع^2 + ١}$ ، ع = $\sqrt{٢ س + ١}$

---

٣ أوجد المشتقة الأولى لكل مما يأتى :

① ص = $(س + ٤)^{12}$

② ص = $(١ - ٣ س)^5$

③ ص = $(س^2 - ٣)^6$

④ ص = $(٣ س^2 - ٤ س + ١)^4$

⑤ ص = $(٦ س^3 + ٣ س + ١)^{10}$

⑥ ص = $\left(س^2 + \frac{١}{س^2}\right)^7$

⑦ ص = $\frac{٧}{(٣ س - ١)^6}$

⑧ ص = $\frac{٧}{(س^2 - ٩)^5}$

---

٤ أوجد المشتقة الأولى لكل مما يأتى :

① ص = $س^5$ $(س + ٣)^7$ عند س = −٢ «−١٤٤»

② ص = (س − ٣) $(س - ٥)^8$ عند النقطة (٤ ، ١) «−٧»

③ ص = $(١ - س)^6$ $(١ + س)^6$ عند س = $\sqrt{٢}$ «١٢ $\sqrt{٢}$»

④ ص = $(س^2 + ١)^5$ $(س^2 - س + ١)^{-4}$ عند س = ١ «٣٢»

⑤ ص = $\left(\frac{٣ س - ٢}{٥ س - ٤}\right)^9$ عند س = ١ «−١٨»

⑥ 📖 $ص = \left(\frac{س^٢ + ١}{س - ٣}\right)^٥$ عند س = ١ «$\frac{-١٥}{٢}$»

⑦ $ص = \frac{س^٧}{(٣س - ٢)^٤}$ عند النقطة (١ ، ١) «−٥»

⑧ $ص = \frac{(س - ١)^٤}{(س^٢ + ١)^٥}$ عند النقطة (٠ ، ١) «−٤»

٥ أوجد المشتقة الأولى لكل مما يأتى :

① $ص = \sqrt{س^٢ + ١}$

② $ص = \sqrt[٣]{(٢س + ١)^٥}$

③ $ص = \sqrt{٩ - ٢س^٢}$ عند $س = \frac{١}{\sqrt{٢}}$ «$-\frac{١}{٢}$»

④ 📖 $ص = \sqrt[٣]{(٢س^٣ + ٤س + ٣)^٢}$ عند س = ٢ «$\frac{٥٦}{٩}$»

⑤ $ص = س\sqrt{س - ١}$ عند النقطة (٥ ، ١٠) «$٣\frac{١}{٤}$»

⑥ $ص = (س^٢ - ١)\sqrt{٢س + ٣}$ عند س = −١ «−٢»

⑦ $ص = \frac{٩س}{\sqrt{٥س^٢ - ٤}}$ عند النقطة (١ ، ٩) «−٣٦»

⑧ $ص = \frac{٨س}{\sqrt[٣]{س - ٢}}$ عند س = ٣ «صفر»

٦ إذا كانت : ص = د (س) أوجد كلًا مما يأتى :

① $\frac{ء}{ءس}(ص^٥)$ ② $\frac{ء}{ءص}(ص^٥)$ ③ $\frac{ء}{ءن}(ص^٥)$ ④ 📖 $\frac{ء}{ءس}(ص^ن)$

٧ أوجد كلًا مما يأتى :

① $\frac{ء}{ءس}\left(س\sqrt{٢س^٢ + ١}\right)$ عند س = ٠ «١»

② $\frac{ء}{ءس}\left(\sqrt{س} + \frac{١}{\sqrt{س}}\right)^٤$ عند س = ١ «صفر»

③ $\frac{ء}{ءس}(س^٢ + ٢ص^٢)$

٨ أوجد $\frac{ءص}{ءس}$ فى كل مما يأتى :

① $ص^٥ = س^٣ - ٢س^٢$

② 📖 $ص^٣ = ٣س^٢ - ٤$

③ $٤ص^٢ = س^٥ - ٢س^٣ + س$

④ 📖 $ص^٣ = (س^٢ - ٤س + ٤)^{-٢}$

⑤ $٢\sqrt{ص} = س^٢ - ٣$

⑥ $س^٢ - ص^٣ = ٢س$

٩ إذا كانت : ص = $س^٢$ − ١ ، س = $ع^٣$ − ٢ أوجد : $\frac{ءص}{ءع}$

ثم أثبت أن : $\frac{ءص}{ءع}$ + ٤ $\frac{ءس}{ءع}$ = ٦ $ع^٥$ «٦ $ع^٥$ − ١٢ $ع^٢$»

---

١٠ إذا كانت : ص = $ع^٢$ + ع ، ع = ٢ $س^٢$ أثبت أن : $\frac{ءص}{ءس}$ − $\frac{ءع}{ءس}$ = ١٦ $س^٣$

---

١١ إذا كانت : ص = $\sqrt{١ + س^٢}$ ، ع = ٣ $س^٢$ − ٧ أثبت أن : ص $\left(\frac{ءص}{ءس}\right)$ + $\frac{ءع}{ءس}$ = ٧ س

---

١٢ إذا كانت : ص = $(س − ٥)^٣$ أثبت أن : $\left(\frac{ءص}{ءس}\right)^٢$ − ص (س − ٥) $\left(\frac{ءص}{ءس}\right)$ = ٢٤ $ص^٢$

---

١٣ إذا كانت : $س^٣$ − $ص^٣$ = ٨ أثبت أن : $\frac{ءص}{ءس}$ = $\left(\frac{س}{ص}\right)^٢$

---

١٤ إذا كانت : $(س + ص)^٣$ = ٥ أثبت أن : $\frac{ءص}{ءس}$ = −١

---

١٥ أوجد قيم س التى تجعل دَ (س) = ٧ حيث د (س) = $(س − ٥)^٧$ «٦ أ ٤،»

---

١٦ إذا كانت : ص = $(أ س + ب)^٢$ وعندما س = ٢ فإن : ص = ١ ، $\frac{ءص}{ءس}$ = ٤

أوجد قيمتى : أ ، ب «± ٢ ، ∓ ٣»

---

١٧ الربط بالحجوم : يصب زيت بمعدل ١٠ $سم^٣$/ث فى برميل أسطوانى الشكل طول نصف قطر قاعدته ٩٠ سم.

أوجد معدل ارتفاع الزيت فى البرميل بالنسبة للزمن. «$\frac{١}{٨١٠ \pi}$ سم/ث»

ثالثًا مسائل تقيس مهارات التفكير

١ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

① إذا كان : د (٢) = دَ (٢) = ٣ وكان : ر (س) = $(س^٢ د (س))^٢$ فإن : رَ (٢) = ...

(أ) ٥٧٦ (ب) ٧٦٨ (جـ) ٦٧٢ (د) ٤٨٠

② إذا كانت د دالة زوجية وقابلة للاشتقاق لجميع قيم س ∈ ح حيث د ليست دالة ثابتة فإن دَ (س) تكون دالة ....

(أ) زوجية. (ب) فردية.

(جـ) ليست زوجية وليست فردية. (د) زوجية وفردية معًا.

③ إذا كانت : د (س) = ٢ س − ٥ فإن : $\frac{ء}{ءس}$ [د$^{-١}$ (س)] = ...

(أ) ٢ (ب) $\frac{١}{٢}$ (جـ) ٤ (د) $\frac{١}{٤}$

④ إذا كان : د (س) = س^{٢} + ٢ ، هـ (س) = س + ٢

فإن : $\frac{ء}{ءس}$ [(د ٥ هـ) (س)] = ... عند س = ١

(أ) ٥ (ب) ٦ (جـ) ٨ (د) ١٠

⑤ إذا كانت : ل (س) = د (ر (س)) حيث د (−٢) = ٨ ، دَ (−٢) = ٤

، دَ (٥) = ٣ ، ر (٥) = −٢ ، رَ (٥) = ٦ فإن : لَ (٥) = ...

(أ) ٢٤ (ب) ٢٠ (جـ) ١٢ (د) ٨

⑥ إذا كانت : ص = $\sqrt{س + \sqrt{س + \sqrt{س + \sqrt{س + ...}}}}$ فإن : $\frac{ءص}{ءس}$ = ...

(أ) ١ (ب) $\frac{١}{س ص}$ (جـ) $\frac{١}{٢ ص + ١}$ (د) $\frac{١}{٢ ص − ١}$

⑦ مشتقة س^{٦} بالنسبة إلى س^{٣} هي ....

(أ) س^{٣} (ب) ٢ س^{٣} (جـ) ٣ س^{٢} (د) ٦ س^{٦}

---

٢ إذا كانت : ص = $\frac{٢ س}{\sqrt{١ + س^{٢}}}$ ، ع = $\frac{\sqrt{١ + س^{٢}}}{٥ س}$ أثبت أن : ٥ ع^{٢} $\frac{ءص}{ءس}$ + ٢ $\frac{ءع}{ءس}$ = ٠

---

٣ إذا كانت : ص = $\left(\frac{س^{٢} − ٢}{س^{٢} + ٢}\right)^{ن}$ أثبت أن : $\frac{ءص}{ءس}$ = $\frac{٨ ن س ص}{س^{٤} − ٤}$

---

٤ إذا كان : $\frac{٢}{\sqrt{س} + \sqrt{ص}}$ = ٥ أثبت أن : $\left(\frac{ءص}{ءس}\right)^{٢}$ = $\frac{ص}{س}$

الدرس



5

مشتقات الدوال المثلثية

١ إذا كانت : ص = جا س فإن : $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = جتا س

٢ إذا كانت : ص = جتا س فإن : $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = − جا س

٣ إذا كانت : ص = طا س فإن : $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = قا^{2} س

البرهـان (لا يمتحن فيه الطالب)

١ ∵ ص = جا س ∴ د (س) = جا س ، د (س + هـ) = جا (س + هـ)

$$\therefore \text{دَ (س)} = \underset{\text{هـ} \to 0}{\text{نها}} \frac{\text{د (س + هـ)} - \text{د (س)}}{\text{هـ}} = \underset{\text{هـ} \to 0}{\text{نها}} \frac{\text{جا (س + هـ)} - \text{جا س}}{\text{هـ}}$$

$$= \underset{\text{هـ} \to 0}{\text{نها}} \frac{\text{جا س جتا هـ} + \text{جتا س جا هـ} - \text{جا س}}{\text{هـ}}$$

$$= \underset{\text{هـ} \to 0}{\text{نها}} \left[\frac{\text{جتا س جا هـ}}{\text{هـ}} + \frac{\text{جا س (جتا هـ} - 1)}{\text{هـ}}\right]$$

$$= \text{جتا س} \underset{\text{هـ} \to 0}{\text{نها}} \frac{\text{جا هـ}}{\text{هـ}} + \text{جا س} \times \underset{\text{هـ} \to 0}{\text{نها}} \frac{\text{جتا هـ} - 1}{\text{هـ}}$$

= جتا س × ١ + جا س × ٠ = جتا س   **أى أن :** $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = جتا س

٢ وبالمثل يمكن استخدام التعريف فى إثبات أن :

إذا كان : ص = جتا س فإن : $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = − جا س

٣ ∵ ص = طا س = $\frac{\text{جا س}}{\text{جتا س}}$

$$\therefore \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{\text{جتا س} \times \text{جتا س} - \text{جا س} \times (-\text{جا س})}{\text{جتا}^{2}\text{ س}}$$

$$= \frac{\text{جتا}^{2}\text{ س} + \text{جا}^{2}\text{ س}}{\text{جتا}^{2}\text{ س}} = \frac{1}{\text{جتا}^{2}\text{ س}} = \text{قا}^{2}\text{ س}$$

أى أن : $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = قا^{2} س

بصفة عامة

١ إذا كانت : ص = حا ع فإن : $\frac{ءص}{ءس}$ = حتا ع . $\frac{ءع}{ءس}$

٢ إذا كانت : ص = حتا ع فإن : $\frac{ءص}{ءس}$ = − حا ع . $\frac{ءع}{ءس}$

٣ إذا كانت : ص = طا ع فإن : $\frac{ءص}{ءس}$ = قا^{٢} ع . $\frac{ءع}{ءس}$

حيث ع دالة قابلة للاشتقاق بالنسبة إلى المتغير س

مثال ١

أوجد المشتقة الأولى لكل مما يأتى :

١ ص = حا ٣ س

٢ ص = ٢ حتا (٤ − س)

٣ ص = حا (٢ س + π) + طا ٣ س

٤ ص = س^{٤} + طا (٥ س − ٢)

٥ ص = حا (٣ س^{٣} + ٢ س + ١)

٦ ص = حتا $\frac{س}{٣}$ + حتا $\frac{π}{٣}$

الحـل

١ $\frac{ءص}{ءس}$ = حتا ٣ س × ٣ = ٣ حتا ٣ س

٢ $\frac{ءص}{ءس}$ = ٢ × − حا (٤ − س) × − ١ = ٢ حا (٤ − س)

٣ $\frac{ءص}{ءس}$ = حتا (٢ س + π) × ٢ + قا^{٢} ٣ س × ٣ = ٢ حتا (٢ س + π) + ٣ قا^{٢} ٣ س

٤ $\frac{ءص}{ءس}$ = ٤ س^{٣} + قا^{٢} (٥ س − ٢) × ٥ = ٤ س^{٣} + ٥ قا^{٢} (٥ س − ٢)

٥ $\frac{ءص}{ءس}$ = حتا (٣ س^{٣} + ٢ س + ١) × (٩ س^{٢} + ٢)

= (٩ س^{٢} + ٢) حتا (٣ س^{٣} + ٢ س + ١)

٦ $\frac{ءص}{ءس}$ = − حا $\frac{س}{٣}$ × $\frac{١}{٣}$ + صفر

= − $\frac{١}{٣}$ حا $\frac{س}{٣}$

لاحظ أن :

حتا $\frac{π}{٣}$ = $\frac{١}{٢}$ = مقدار ثابت

∴ المشتقة = صفر

مثال ٢

أوجد المشتقة الأولى لكل مما يأتى :

١ ص = حا ٢ س حتا ٣ س

٢ ص = $\frac{حا (٢ س + ١)}{حتا (٣ س − ١)}$

٣ ص = س^{٣} طا ٥ س

٤ ص = حا $\sqrt{س}$

٥ ص = حتا^{٢} (٢ س − ١)

٦ ص = طا^{٣} (١ + ٥ س + ٣ س^{٢})

الحـــل

[1] $\frac{ءص}{ءس}$ = حا ٢ س × - حا ٣ س × ٣ + حتا ٣ س × حتا ٢ س × ٢

= - ٣ حا ٢ س حا ٣ س + ٢ حتا ٢ س حتا ٣ س

[2] $\frac{ءص}{ءس}$ = $\frac{\text{حتا (٣ س - ١) × حتا (٢ س + ١) × ٢ - حا (٢ س + ١) × - حا (٣ س - ١) × ٣}}{\text{حتا}^{٢}\text{ (٣ س - ١)}}$

= $\frac{\text{٢ حتا (٣ س - ١) حتا (٢ س + ١) + ٣ حا (٢ س + ١) حا (٣ س - ١)}}{\text{حتا}^{٢}\text{ (٣ س - ١)}}$

[3] $\frac{ءص}{ءس}$ = س^{٣} × قا^{٢} ٥ س × ٥ + طا ٥ س × ٣ س^{٢} = ٥ س^{٣} قا^{٢} ٥ س + ٣ س^{٢} طا ٥ س

[4] $\frac{ءص}{ءس}$ = حتا ($\sqrt{\text{س}}$) × $\frac{١}{٢\sqrt{\text{س}}}$ = $\frac{\text{حتا}\sqrt{\text{س}}}{٢\sqrt{\text{س}}}$

[5] ∵ ص = (حتا (٢ س - ١))^{٢}

∴ $\frac{ءص}{ءس}$ = ٢ حتا (٢ س - ١) × - حا (٢ س - ١) × ٢ = - ٤ حتا (٢ س - ١) حا (٢ س - ١)

[6] ∵ ص = (طا (١ + ٥ س + ٣ س^{٢}))^{٣}

∴ $\frac{ءص}{ءس}$ = ٣ طا^{٢} (١ + ٥ س + ٣ س^{٢}) × قا^{٢} (١ + ٥ س + ٣ س^{٢}) × (٥ + ٦ س)

= ٣ (٥ + ٦ س) طا^{٢} (١ + ٥ س + ٣ س^{٢}) قا^{٢} (١ + ٥ س + ٣ س^{٢})

مثال ③

أوجد المشتقة الأولى لكل مما يأتى :

[1] ص = طا ٦ س^{٢}

[2] ص = طا^{٢} ٦ س

[3] ص = حتا (طا ٤ س)

[4] ص = ٤ س حا س حتا س حتا ٢ س

[5] ص = $\frac{\text{طا س} + \sqrt{٣}}{١ - \sqrt{٣}\text{ طا س}}$

الحـــل

[1] $\frac{ءص}{ءس}$ = قا^{٢} (٦ س^{٢}) × (١٢ س) = ١٢ س قا^{٢} ٦ س^{٢}

[2] ∵ ص = (طا ٦ س)^{٢}

∴ $\frac{ءص}{ءس}$ = ٢ (طا ٦ س) × قا^{٢} ٦ س × ٦ = ١٢ طا ٦ س قا^{٢} ٦ س

[3] $\frac{ءص}{ءس}$ = - حا (طا ٤ س) × قا^{٢} ٤ س × ٤ = - ٤ قا^{٢} ٤ س حا (طا ٤ س)

٤ ∵ ص = ٢ س × (٢ حاس حتاس) حتا ٢ س = ٢ س حا ٢ س حتا ٢ س

= س × ٢ حا ٢ س حتا ٢ س = س حا ٤ س

∴ $\frac{ءص}{ءس}$ = س × حتا ٤ س × ٤ + حا ٤ س × ١ = ٤ س حتا ٤ س + حا ٤ س

٥ ∵ طا $\frac{\pi}{٣}$ = $\sqrt{٣}$ ∴ ص = $\frac{\text{طاس} + \text{طا}\frac{\pi}{٣}}{١ - \text{طاس طا}\frac{\pi}{٣}}$ = طا (س + $\frac{\pi}{٣}$)

∴ $\frac{ءص}{ءس}$ = قا^٢ (س + $\frac{\pi}{٣}$)

مثال ٤

إذا كانت : ص = $\frac{\text{حتاس}}{١ - \text{حاس}}$ فاثبت أن : $\frac{ءص}{ءس} = \frac{١}{١ - \text{حاس}}$

الحل

$\frac{ءص}{ءس} = \frac{-\text{حاس} \times (١ - \text{حاس}) - \text{حتاس} \times (-\text{حتاس})}{(١ - \text{حاس})^٢} = \frac{-\text{حاس} + \text{حا}^٢\text{س} + \text{حتا}^٢\text{س}}{(١ - \text{حاس})^٢}$

$= \frac{-\text{حاس} + ١}{(١ - \text{حاس})^٢} = \frac{١ - \text{حاس}}{(١ - \text{حاس})^٢} = \frac{١}{١ - \text{حاس}}$

مثال ٥

إذا كانت : ص = $\sqrt{٧ - ٣ع}$ ، ع = طا $\frac{\text{س}}{٢}$ فاثبت أن : ٤ $\frac{ءص}{ءس}$ + ٣ = ٠ عند س = $\frac{\pi}{٢}$

الحل

∵ $\frac{ءص}{ءع} = \frac{-٣}{٢\sqrt{٧ - ٣ع}}$ ، $\frac{ءع}{ءس} = \frac{١}{٢}$ قا^٢ $\frac{\text{س}}{٢}$

∴ $\frac{ءص}{ءس} = \frac{-٣}{٢\sqrt{٧ - ٣ع}} \times \frac{١}{٢}$ قا^٢ $\frac{\text{س}}{٢} = \frac{-٣ \text{قا}^٢ \frac{\text{س}}{٢}}{٤\sqrt{٧ - ٣ع}}$ وبالتعويض عن ع

$= \frac{-٣ \text{قا}^٢ \frac{\text{س}}{٢}}{٤\sqrt{٧ - ٣ \text{طا} \frac{\text{س}}{٢}}}$

∴ $\left[\frac{ءص}{ءس}\right]_{\text{س} = \frac{\pi}{٢}} = \frac{-٣ \text{قا}^٢ \frac{\pi}{٤}}{٤\sqrt{٧ - ٣ \text{طا} \frac{\pi}{٤}}} = \frac{-٣ \times ٢}{٤\sqrt{٧ - ٣ \times ١}} = \frac{-٣}{٤}$

∴ ٤ $\frac{ءص}{ءس}$ + ٣ = ٤ × $\frac{-٣}{٤}$ + ٣ = صفر

تمـارين 13 على مشتقات الدوال المثلثية

اختبر نفسك

من أسئلة الكتاب المدرس ● فهم ● تطبيق ● مستويات عليا

أولًا / أسئلة الاختيار من متعدد

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

① إذا كانت : د (س) = طا (٥ س − π) فإن : دَ $\left(\frac{\pi}{4}\right)$ = ...

(أ) ٥ (ب) ٥ $\sqrt{2}$ (جـ) ١٠ (د) ١٠ $\sqrt{3}$

② إذا كانت : ص = حا ٢ س فإن : $\frac{ءص}{ءس}$ عند س = $\frac{\pi}{6}$ تساوى ....

(أ) ٢ (ب) ١ (جـ) $\frac{1}{2}$ (د) $\sqrt{3}$

③ $\frac{ء}{ءس}$ (حتا^2 س + حا^2 س) = ...

(أ) ١ (ب) صفر

(جـ) س (د) ٢ (حتا س + حا س)

④ $\frac{ء}{ءس}$ $\left(\text{طا } \frac{\pi}{4}\right)$ = ...

(أ) ١ (ب) قا^2 $\frac{\pi}{4}$ (جـ) صفر (د) ٢

⑤ إذا كانت : ص = طا (٩ − ٧ س) فإن : $\frac{ءص}{ءس}$ = ...

(أ) قا^2 (٩ − ٧ س) (ب) قا^2 (−٧)

(جـ) −٧ قا^2 (٩ − ٧ س) (د) ٢ قا^2 (٩ − ٧ س)

⑥ إذا كانت : ص = حا ٤ س فإن : $\frac{ءص}{ءس}$ = ...

(أ) ٤ حا ٣ س (ب) ٤ حا ٤ س (جـ) ٤ حتا ٤ س (د) −٤ حتا ٤ س

⑦ إذا كانت : ص = حتا $\frac{1}{2}$ س فإن : $\frac{ءص}{ءس}$ = ...

(أ) − حا $\frac{1}{2}$ س (ب) − $\frac{1}{2}$ حا $\frac{1}{2}$ س (جـ) $\frac{1}{2}$ حتا س (د) $\frac{1}{2}$ حتا $\frac{1}{2}$ س

⑧ إذا كانت : ص = ٢ حا (٣ س + ٤) فإن : صَ = ...

(أ) ٦ حتا (٣ س + ٤) (ب) ٢ حتا (٣ س + ٤)

(جـ) ٦ حتا (٣ س) (د) −٦ حتا (٣ س + ٤)

⑨ إذا كان : ص = حا (س^2 + ٣) فإن : $\frac{ءص}{ءس}$ = ...

(أ) ٢ حتا (س^2 + ٣) (ب) ٢ حتا س

(جـ) −٢ حتا س (د) ٢ س حتا (س^2 + ٣)

(١٠) إذا كانت : ص = $س^٤$ + حتا $\frac{\pi}{٢}$ − حا $\frac{س}{٣}$ فإن : $\frac{ءص}{ءس}$ = ...

(أ) ٤ $س^٣$ − حا $\frac{\pi}{٢}$ − $\frac{١}{٣}$ حتا $\frac{س}{٣}$ (ب) ٤ $س^٣$ − $\frac{١}{٣}$ حتا $\frac{س}{٣}$

(جـ) ٤ $س^٣$ − حا $\frac{\pi}{٢}$ + $\frac{١}{٣}$ حتا $\frac{س}{٣}$ (د) ٤ $س^٣$ − $\frac{١}{٣}$ حا $\frac{س}{٣}$

(١١) إذا كان : ص = حتا $\left(\frac{٢}{س}\right)$ فإن : ص̄ = ...

(أ) − حتا $\left(\frac{٢}{س}\right)$ (ب) $\frac{-٢}{س^٢}$ حا $\left(\frac{٢}{س}\right)$ (جـ) $\frac{٢}{س^٢}$ حا $\left(\frac{٢}{س}\right)$ (د) $\frac{٢}{س}$ حا $\left(\frac{٢}{س}\right)$

(١٢) إذا كان : د (س) = $حا^٢$ س فإن : د̄ (س) = ...

(أ) $حتا^٢$ س (ب) ٢ $حتا^٢$ س (جـ) ٢ حا س (د) ٢ حا س حتا س

(١٣) $\frac{ء}{ءس}$ (طا ٣ $س^٢$) = ...

(أ) ٦ س طا ٣ $س^٢$ $حا^٢$ ٣ $س^٢$ (ب) ٦ طا س $قا^٢$ ٣ س

(جـ) ٦ س $قا^٢$ ٣ $س^٢$ (د) $قا^٢$ ٦ س

(١٤) إذا كانت : ص = $س^٣$ + حتا ٣ س + $\frac{١}{٤}$ حا ٤ س فإن : $\frac{ءص}{ءس}$ = ... عند س = صفر

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) ٣ (د) ٤

(١٥) إذا كانت : ص = حتا $\left(\frac{\pi}{٢} - س\right)$ + حا (π − ٢ س) فإن : $\frac{ءص}{ءس}$ = ...

(أ) حا س + حا ٢ س (ب) حا س + ٢ حا ٢ س

(جـ) حتا س + حتا ٢ س (د) حتا س + ٢ حتا ٢ س

(١٦) إذا كانت : ص = حا س فإن : ص̄ = ...

(أ) ص حتا س (ب) ص طا س (جـ) ص طتا س (د) ص حا س

(١٧) إذا كانت : ص = س حا ٢ س فإن : $\frac{ءص}{ءس}$ = ...

(أ) س حتا ٢ س + حا ٢ س (ب) ٢ س حتا ٢ س + حا ٢ س

(جـ) −٢ س حتا ٢ س + حا ٢ س (د) − س حتا ٢ س + حا ٢ س

(١٨) $\frac{ء}{ءس}$ $\left(\frac{١}{٢}\ \text{طتا}\ ٢\ س\ \text{حا}\ ٢\ س\right)$ = ...

(أ) − حا ٢ س (ب) − حتا ٢ س (جـ) حا ٢ س (د) حتا ٢ س

(١٩) $\frac{ء}{ءس}$ (٢ $حتا^٢$ س − ١) = ...

(أ) حا ٢ س (ب) حتا ٢ س (جـ) −٢ حا ٢ س (د) −٢ حتا ٢ س

(٢٠) إذا كانت : ص = ٢ س طا ٣ س فإن : $\frac{ءص}{ءس} = \frac{.............}{جتا^٢ ٣ س}$

(أ) س − جا ٦ س　　(ب) ٢ س + جا ٣ س

(جـ) ٢ س + جا ٦ س　　(د) ٦ س + جا ٦ س

(٢١) إذا كانت : ص = ٢ جا $\frac{١}{٢}$ س − س جتا $\frac{١}{٢}$ س فإن : $\frac{ءص}{ءس}$ = ... عند س = π

(أ) صفر　　(ب) ١　　(جـ) $\frac{π}{٢}$　　(د) π

(٢٢) إذا كانت : ص = $\frac{س}{جتا ٣ س}$ فإن : $\frac{ءص}{ءس}$ = ... عند س = $\frac{π}{٣}$

(أ) $\frac{١}{٣ π}$　　(ب) ١　　(جـ) $\frac{π}{٣}$　　(د) −١

(٢٣) إذا كان : ص = جتا س فإن : ص − صً = ...

(أ) جا س − جتا س　　(ب) جتا س − جا س　　(جـ) جا س + جتا س　　(د) صفر

(٢٤) إذا كان : ص = جا س فإن : $\frac{ءص}{ءس}$ = ...

(أ) جا $\left(\frac{π}{٢} + س\right)$　　(ب) جا $\left(س - \frac{π}{٢}\right)$　　(جـ) جا $\left(\frac{٣π}{٢} + س\right)$　　(د) جا $\left(\frac{٣π}{٢} - س\right)$

(٢٥) إذا كانت : ص = جا^٢ (٢٧٠° − س) فإن : $\frac{ءص}{ءس}$ = ...

(أ) جا ٢ س　　(ب) − جا ٢ س　　(جـ) جتا ٢ س　　(د) − جتا ٢ س

(٢٦) إذا كان : ص = $\frac{جا س}{١ + جتا س}$ فإن : $\frac{ءص}{ءس}$ = ...

(أ) ص جا س　　(ب) ص جتا س　　(جـ) ص قتا س　　(د) ص قا س

(٢٧) إذا كانت : ص = طا س فإن : $\frac{ءص}{ءس}$ = ...

(أ) ١ + ص　　(ب) ١ − ص　　(جـ) ١ + ص^٢　　(د) ١ − ص^٢

(٢٨) إذا كانت : ص = (جا س + جتا س)^٢ فإن : $\frac{ءص}{ءس}$ = ...

(أ) ٢ جا ٢ س　　(ب) ٢ جتا ٢ س　　(جـ) ٢ جا س　　(د) جتا س − جا س

(٢٩) إذا كانت : ص = جا^٢ س − جتا^٢ س فإن : $\frac{ءص}{ءس}$ = ...

(أ) ٢ جا ٢ س　　(ب) ٢ جتا ٢ س

(جـ) ٢ جا س − ٢ جتا س　　(د) جتا س − جا س

(٣٠) إذا كانت : ص = طا^٢ ٣ س فإن : صً = ...

(أ) ٢ طا ٣ س　　(ب) ٦ طا ٣ س

(جـ) ٦ طا ٣ س قا^٢ ٣ س　　(د) ٣ قا^٤ ٣ س

(٣١) إذا كان : ص = قتا س فإن : ص َ = ...

(أ) قتا س (ب) قتا س ظا س (جـ) $\frac{1}{\text{جا س}}$ (د) $\frac{-1}{\text{جتا}^2\text{ س}}$

(٣٢) إذا كانت : ص = جتا $(\sqrt{\text{س}})$ فإن : $\frac{\text{ء ص}}{\text{ء س}}$ = ... عند س = $\frac{1}{4}\pi^2$

(أ) $\frac{1}{\pi}$ (ب) $\frac{-1}{\pi}$ (جـ) $\frac{-2}{\pi}$ (د) $\frac{2}{\pi}$

(٣٣) إذا كانت : ص = جا^3 ٤ س فإن : $\frac{\text{ء ص}}{\text{ء س}}$ = ... عند س = $\frac{\pi}{16}$

(أ) ٣ (ب) ٦ (جـ) $3\sqrt{2}$ (د) $6\sqrt{2}$

(٣٤) إذا كان : س ص + جا س = ٥ فإن : $\frac{\text{ء ص}}{\text{ء س}}$ = ... عند س = $\frac{\pi}{2}$

(أ) $\frac{-4}{\pi}$ (ب) $\frac{-8}{\pi}$ (جـ) $\frac{-4}{\pi^2}$ (د) $\frac{-16}{\pi^2}$

(٣٥) إذا كانت : ص = س^2 جا س فإن : $\frac{\text{ء ص}}{\text{ء س}}$ = ... عند س = $\frac{\pi}{2}$

(أ) $\frac{\pi}{2}$ (ب) π (جـ) $\frac{3\pi}{2}$ (د) $\frac{-\pi}{2}$

(٣٦) $\frac{\text{ء}}{\text{ء س}}\left(\text{جا س} - \frac{1}{3}\text{ جا}^3\text{ س}\right)$ = ...

(أ) جا^3 س (ب) − جا^3 س (جـ) جتا^3 س (د) − جتا^3 س

(٣٧) إذا كانت : ص = ٢ جا $\frac{\text{س}}{2}$ جتا $\frac{\pi}{2}$ فإن : ص َ = ...

(أ) − جا س (ب) جتا س (جـ) جا س (د) صفر

(٣٨) إذا كانت : ص = ١٦ جا $\frac{\text{س}}{4}$ جتا $\frac{\text{س}}{4}$ جتا $\frac{\text{س}}{2}$ جتا س فإن : $\frac{\text{ء ص}}{\text{ء س}}$ = ...

(أ) $\frac{1}{2}$ جا ٢ س (ب) جتا ٢ س (جـ) ٢ جا ٢ س (د) ٤ جتا ٢ س

(٣٩) إذا كانت : د (س) = $\frac{\text{جتا ٢ س}}{\text{جا س} - \text{جتا س}}$ فإن : دَ $\left(\frac{3\pi}{4}\right)$ = ...

(أ) $2\sqrt{2}$ (ب) $\sqrt{2}$ (جـ) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ (د) صفر

(٤٠) إذا كانت : ص = $\sqrt{\text{جتا (٥ س)}}$ فإن : $\frac{\text{ء ص}}{\text{ء س}}$ = ...

(أ) $\frac{-5\text{ جا ٥ س}}{2\sqrt{\text{جتا (٥ س)}}}$ (ب) $\frac{-\text{جا (٥ س)}}{2\sqrt{\text{جتا (٥ س)}}}$ (جـ) $\frac{5}{2}$ (جتا ٥ س)$^{-\frac{1}{2}}$ (د) $\frac{1}{2}$ (جتا ٥ س)$^{-\frac{1}{2}}$

(٤١) إذا كانت : ص = $\frac{\text{جا}^2\text{ س}}{1 + \text{جتا س}}$ فإن : $\frac{\text{ء ص}}{\text{ء س}}$ = ...

(أ) ١ − جتا س (ب) جا^2 س (جـ) جا س (د) ١ + جتا س

(٤٢) إذا كانت : ص = جا (جتا^2 س) فإن : ص َ = ...

(أ) جتا (جتا^2 س) (ب) جتا (جتا^2 س) × ٢ جتا س

(جـ) جتا^3 س × −٢ جتا س (د) −٢ جا س جتا س جتا (جتا^2 س)

(٤٣) إذا كانت : ص = $\frac{س}{حاس}$ فإن : $\left[\frac{ءص}{ءس}\right]_{س = \frac{٢\pi}{٢}}$ = ...

(أ) $\frac{٣}{٢}$ (ب) حتا $\frac{٣\pi}{٢}$ (جـ) حتا π (د) ١

(٤٤) إذا كانت : د (س) = $\sqrt{حاس + حتاس}$ فإن : دَ (٠) = ...

(أ) $\frac{١}{٢}$ (ب) $\frac{١}{\sqrt{٢}}$ (جـ) $\frac{١}{٤}$ (د) -١

(٤٥) إذا كانت : د (س) = حا^٤ س فإن : دَ $\left(\frac{\pi}{٤}\right)$ = ...

(أ) $\frac{١}{٢}$ (ب) ٤ (جـ) $\frac{١}{٤}$ (د) ١

(٤٦) مشتقة ١ - حتا^٢ س بالنسبة إلى حتا^٢ س هى ....

(أ) -١ (ب) ١ (جـ) طاس (د) - طاس

(٤٧) إذا كان : د (س) = أ حاس ، ر (س) = $\frac{طاس}{ب}$ حيث كل من أ ، ب ثوابت

وكان دَ (π) = رَ $\left(\frac{\pi}{٣}\right)$ فإن : أ ب = ...

(أ) -٤ (ب) -$\frac{١}{٤}$ (جـ) $\frac{١}{٤}$ (د) ٤

ثانيًا الأسئلة المقالية

١ أوجد المشتقة الأولى لكل مما يأتى :

(١) ص = ٥ حا (٣ - π س)

(٢) ص = حتا (٥ س + ٣)

(٣) ص = ٣ طا (٢ س + ٣)

(٤) ص = طا (-٥ س^٢ + ١٩)

(٥) ص = ٢ حتا (٤ - ٣ س^٢)

(٦) ص = س - حا ٢ س + طا ٥ س

(٧) ص = حا $\frac{\pi}{٤}$ - ٧ حاس

(٨) ص = حتا (٢ س - ١) + حا (٤ - ٥ س)

(٩) ص = طا ($\sqrt{س}$)

(١٠) ص = حا $\left(\frac{١}{س^٢}\right)$

٢ أوجد المشتقة الأولى لكل مما يأتى :

(١) ص = س حا (٣ س - ٢)

(٢) ص = س^٢ حا ٢ س

(٣) ص = س طا (٣ س) + حتا س

(٤) ص = س حاس + $\sqrt{س}$

(٥) ص = ٢ حا ٢ س حتا ٣ س

(٦) ص = ٢ حا (٢ س + ١) حتا (٢ س + ١)

(٧) ص = س^٢ حا (٢ س^٢ + ٥)

(٨) ص = $\frac{طاس}{س}$

(٩) ص = $\frac{حا ٢ س}{حتاس}$

(١٠) ص = $\frac{١ + حتا ٢ س}{١ - حتا ٢ س}$

(١١) ص = ظتاس

(١٢) ص = قتاس

٣ أوجد المشتقة الأولى لكل مما يأتى :

① ص = طا٤ $\frac{1}{2}$ س

② ص = حتا٢ (٤ س٢ − ٧)

③ ص = ٤ حتا٥ س

④ ص = حتا٣ ($\frac{س}{س + ١}$)

⑤ ص = طا٣ (٤ س − ٧ − ٢ س٣)

⑥ ص = س $\sqrt{جا س}$

⑦ ص = ٢ حتا س حتا $\frac{س}{٢}$ جا $\frac{س}{٢}$

⑧ ص = $\frac{جا ٢ س}{١ − حتا ٢ س}$

⑨ س = ص حتا س

⑩ ص = س٥ حتا $\frac{\pi}{س}$

⑪ س٢ = ص قا (٣ س − ٢)

⑫ ص = حتا (حتا س)

⑬ ص = جا (طا ٢ س)

⑭ ص = قا٢ س − ١

⑮ ص = $\sqrt{طا^٥ س}$

⑯ ص = $\frac{طا س + طا \frac{\pi}{٤}}{١ − طا س طا \frac{\pi}{٤}}$

---

٤ أوجد $\frac{ءص}{ءس}$ فى كل مما يأتى :

① ص = جا ٢ س حتا س — عند النقطة (π ، ٠) — «−٢»

② ص = (س − ٥) حتا $\frac{\pi س}{٨}$ — عند س = ٤ — « $\frac{\pi}{٨}$ »

③ ص = جا س طا ٤ س — عند س = $\frac{\pi}{٤}$ — «٢ $\sqrt{٢}$»

④ ص = $\sqrt{١ + حتا س}$ — عند س = $\frac{\pi}{٢}$ — «− $\frac{١}{٢}$»

⑤ ص = $\frac{س^٣}{حتا س}$ — عند س = π — «−٣ π٢»

⑥ ص = $\frac{٢ حتا ٣ س}{س + ١}$ — عند س = صفر — «−٢»

⑦ ص = (١ + جا س) (١ − حتا س) — عند س = π — «−٢»

⑧ ص = (جا ٢ س − حتا ٤ س)٤ — عند س = صفر — «−٨»

---

٥ إذا كانت : ص = ٢ س جا س حتا س أثبت أن : $\frac{ءص}{ءس}$ = جا ٢ س + ٢ س حتا ٢ س

---

٦ إذا كانت : ص = س جا س أثبت أن : س ($\frac{ءص}{ءس}$ − س حتا س) = ص

---

٧ إذا كانت : ص = $\frac{١}{٣}$ حتا٣ س − حتا س أثبت أن : $\frac{ءص}{ءس}$ = جا٣ س

---

٨ إذا كانت : ص = $\frac{جا س}{١ + حتا س}$ أثبت أن : (١ + حتا س) $\frac{ءص}{ءس}$ = ١

٩ إذا كانت : ص = $\frac{جا س}{جا س + جتا س}$ أثبت أن : $\frac{ءص}{ءس} = \frac{١}{١ + جا ٢ س}$

١٠ إذا كانت : ص = $\frac{١ + ظا س}{١ - ظا س}$ أثبت أن : $\frac{ءص}{ءس}$ = قا^{٢} (س + ٤٥°)

١١ إذا كانت : ص = $\frac{جا س}{١ + جا س}$ أثبت أن : $\frac{١}{ص^{٢}} \times \frac{ءص}{ءس}$ = ظا س قتا س

١٢ إذا كانت : ص = $\frac{١ + جا^{٢} س}{١ - جا^{٢} س}$ أثبت أن : $\frac{ءص}{ءس}$ = ٤ ظا س قا^{٢} س

١٣ إذا كانت : ٢ س + ص = جا ٢ س أثبت أن : $\frac{ءص}{ءس}$ + ٤ جا^{٢} س = صفر

١٤ إذا كانت : ص = جا س + جتا س أثبت أن : $(ص')^{٢} + ص^{٢} = ٢$

١٥ أوجد $\frac{ءص}{ءس}$ إذا كان ص = جا س حيث س مقيسة بالتقدير الستينى.

١٦ إذا كان : ص = جا^{٢} س - جتا ٢ س - ٤ س

① أوجد معدل تغير ص بالنسبة للمتغير س

② أوجد قيم س ∈]٠ ، π[عندما يكون معدل التغير مساويًا -١ «$\frac{\pi}{٤}$»

١٧ إذا كانت : ص = قا ٤ س أوجد معدل تغير ص بالنسبة إلى س عندما س = $\frac{\pi}{٤}$ «صفر»

١٨ أثبت أن :

① $\frac{ء}{ءس}$ (جا^{٢} س) = - $\frac{ء}{ءس}$ (جتا^{٢} س)

② $\frac{ء}{ءس}$ (جا^{٢} س + جتا^{٢} س) = $\frac{ء}{ءس}$ (قا^{٢} س - ظا^{٢} س)

③ $\frac{ء}{ءس}$ $\left(\frac{١}{٢}\right.$ظا س + جا ٢ س$\left.\right)$ = جا ٢ س

١٩ أوجد $\frac{ءص}{ءس}$ فى كل مما يأتى :

① ص = ع - جا ع ، ع = ٥ س + π عند س = ٠ «١٠»

② ص = (٣ ع + ١)^{٥} ، ع = $\frac{١}{٣}$ جتا ٢ س عند س = $\frac{\pi}{٤}$ «-١٠»

③ ص = $\sqrt{٤ - ٢ ع}$ ، ع = ظا ٢ س عند س = $\frac{\pi}{٨}$ «-٢ $\sqrt{٢}$»

ثالثًا مسائل تقيس مهارات التفكير

١ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

① إذا كان : جا س جتا ص − جا ص جتا س = $\frac{1}{2}$ فإن : $\frac{\text{ء ص}}{\text{ء س}}$ = ...

(أ) صفر (ب) جا (س + ص) (جـ) جتا (س + ص) (د) ١

② إذا كان : ص = $\frac{\text{٢ ظا س}}{\text{١ − ظا}^2\text{ س}}$ فإن : $\frac{\text{ء ص}}{\text{ء س}}$ = ...

(أ) ٢ ظا ٢ س (ب) ٢ قا^2 ٢ س (جـ) ١ (د) صفر

③ $\frac{\text{ء}}{\text{ء س}}$ [س^2 + $\frac{\text{ء}}{\text{ء س}}$ (س + جا س)] = ...

(أ) جتا ٢ س − جا س (ب) ٢ س − جا س

(جـ) ٢ س + ١ + جتا س (د) ٢ س + جا س

④ $\underset{\text{س} \to \text{أ}}{\text{نهـا}}$ $\frac{\text{جا س − جا أ}}{\text{س − أ}}$ = ...

(أ) جتا س (ب) ١ (جـ) جتا أ (د) جا (س − أ)

⑤ $\underset{\text{هـ} \to 0}{\text{نهـا}}$ $\frac{\text{جا}\left(\frac{\pi}{4} + \text{هـ}\right) - \text{جا}\left(\frac{\pi}{4}\right)}{\text{هـ}}$ = ...

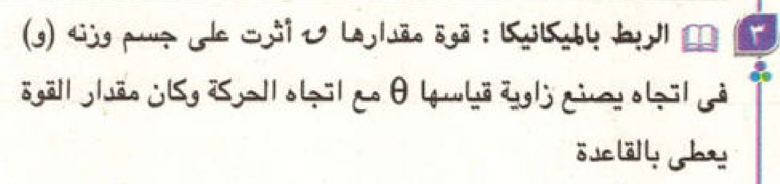
(أ) $\frac{\text{جا هـ}}{\text{هـ}}$ (ب) جا هـ (جـ) جتا هـ (د) جتا $\frac{\pi}{4}$

⑥ إذا كانت : ص = جتا $\sqrt{\text{س}}$ فإن : $\underset{\text{س} \to 0}{\text{نهـا}}$ $\left(\frac{\text{ء ص}}{\text{ء س}}\right)$ = ...

(أ) − جا $\sqrt{\text{س}}$ (ب) جتا $\sqrt{\text{س}}$ (جـ) $\frac{-1}{2}$ (د) $\frac{1}{2}$

---

٢ إذا كانت : ص = ع^4 − ٢ ع^2 + ١ ، ع = جا ٤ س **أثبت أن :** $\frac{\text{ء ص}}{\text{ء س}}$ + ١٦ ص ظا ٤ س = ٠



٣ الربط بالميكانيكا : قوة مقدارها ق أثرت على جسم وزنه (و) فى اتجاه يصنع زاوية قياسها θ مع اتجاه الحركة وكان مقدار القوة يعطى بالقاعدة



ق = $\frac{\text{م و}}{\text{م جا}\,\theta + \text{جتا}\,\theta}$ حيث م ثابت يسمى بمعامل الاحتكاك.

① أوجد معدل تغير القوة بالنسبة للزاوية θ

② اكتب الشرط اللازم لكى يكون معدل التغير يساوى صفرًا.

الدرس

6

تطبيقات على المشتقة



أولًا / ميل الخط المستقيم

١ ميل الخط المستقيم الذى معادلته : ؟س + ب ص + حـ = ٠ هو $\frac{-\text{معامل س}}{\text{معامل ص}} = \frac{-؟}{ب}$

فمثلًا : ميل المستقيم الذى معادلته : ٥ س + ٢ ص + ٧ = ٠ هو $\frac{-٥}{٢}$

٢ ميل الخط المستقيم المار بالنقطتين : ($س_١$ ، $ص_١$) ، ($س_٢$ ، $ص_٢$) يساوى $\frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١}$

فمثلًا : ميل المستقيم المار بالنقطتين (٢ ، −٣) ، (٤ ، ١) هو $\frac{١ + ٣}{٤ - ٢} = ٢$

٣ ميل المستقيم = طا هـ

حيث (هـ) قياس الزاوية الموجبة التى يصنعها المستقيم مع الاتجاه الموجب لمحور السينات.

فمثلًا : ميل المستقيم الذى يصنع زاوية قياسها ١٣٥° مع الاتجاه الموجب لمحور السينات هو طا ١٣٥° = −١

٤ إذا كان : $\overleftarrow{ى}$ = (؟ ، ب) متجه اتجاه لمستقيم فإن ميل هذا المستقيم = $\frac{ب}{؟}$

فمثلًا : إذا كان (٢ ، ٣) متجه اتجاه لمستقيم فإن ميل هذا المستقيم = $\frac{٣}{٢}$

٥ ميل المستقيم يكون موجبًا إذا كان يصنع زاوية حادة مع الاتجاه الموجب لمحور السينات.

٦ ميل المستقيم يكون سالبًا إذا كان يصنع زاوية منفرجة مع الاتجاه الموجب لمحور السينات.

٧ ميل محور السينات = ميل أى مستقيم أفقى (موازى لمحور السينات) = صفر

٨ ميل كل من محور الصادات وأى مستقيم رأسى (موازى لمحور الصادات) يكون غير معرف لأن المقام = صفر

ثانيًا العلاقة بين المستقيمين المتوازيين والمستقيمين المتعامدين

إذا كان : $ل_1$ ، $ل_2$ مستقيمين ميلاهما $م_1$ ، $م_2$ على الترتيب فإن :

١ $ل_1 // ل_2 \Longleftrightarrow م_1 = م_2$

٢ $ل_1 \perp ل_2 \Longleftrightarrow م_1 \times م_2 = -1$ (ما لم يوازى أحدهما أحد المحورين)

فمثلًا : إذا كان ميل المستقيم = $\frac{3}{2}$ فإن : ميل المستقيم الذى يوازيه = $\frac{3}{2}$

وميل المستقيم العمودى عليه = $\frac{-2}{3}$

ثالثًا معادلة الخط المستقيم

١ بدلالة نقطة عليه ($س_1$ ، $ص_1$) والميل (م) هى $(ص - ص_1) = م (س - س_1)$

٢ بدلالة الميل (م) وطول الجزء المقطوع من محور الصادات هى $ص = م س + ح$

٣ بدلالة الجزءين المقطوعين من محورى الإحداثيات هى $\frac{س}{أ} + \frac{ص}{ب} = 1$

ملاحظات

١ معادلة المستقيم الذى يوازى محور السينات ويمر بالنقطة (ل ، ك) هى $ص = ك$

٢ معادلة المستقيم الذى يوازى محور الصادات ويمر بالنقطة (ل ، ك) هى $س = ل$

٣ معادلة محور السينات هى $ص = 0$

٤ معادلة محور الصادات هى $س = 0$

٥ معادلة المستقيم الذى يمر بنقطة الأصل هى $ص = م س$

٦ لإيجاد نقط تقاطع المنحنى مع محور السينات نضع ص = ٠ ونوجد قيم س

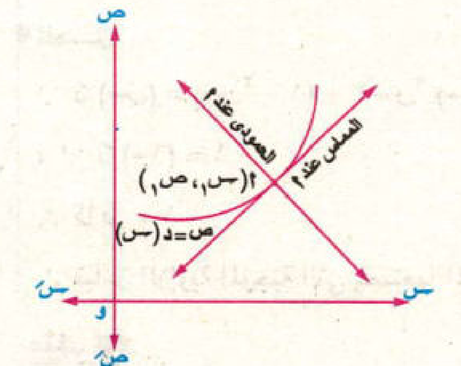
٧ لإيجاد نقط تقاطع المنحنى مع محور الصادات نضع س = ٠ ونوجد قيم ص

٨ لإيجاد نقط تقاطع منحنيين نحل معادلتيهما آنيًا.

استخدام المشتقة الأولى لإيجاد ميلى المماس والعمودى عليه لمنحنى

نعلم مما سبق دراسته أن المشتقة الأولى للدالة د حيث ص = د (س) تعنى ميل المماس لمنحنى هذه الدالة عند أى نقطة (س ، ص) واقعة عليه

ففى الشكل المقابل :



* ميل المماس لمنحنى الدالة [ص = د (س)]

عند النقطة أ (س$_1$ ، ص$_1$) الواقعة عليه هو $\left[\frac{ءص}{ءس}\right]_{(س_1 ، ص_1)}$

* ميل العمودى على منحنى الدالة [ص = د (س)]

عند النقطة أ (س$_1$ ، ص$_1$) الواقعة عليه هو $\frac{-1}{\left[\frac{ءص}{ءس}\right]_{(س_1 ، ص_1)}}$

معادلتا المماس والعمودى عليه لمنحنى

إذا كانت (س$_1$ ، ص$_1$) نقطة تقع على منحنى الدالة د حيث : ص = د (س)، م ميل المماس عند هذه النقطة أى م = $\left[\frac{ءص}{ءس}\right]_{(س_1 ، ص_1)}$ فإن :

* معادلة المماس للمنحنى عند النقطة (س$_1$ ، ص$_1$) هى $ص - ص_1 = م (س - س_1)$

* معادلة العمودى للمنحنى عند النقطة (س$_1$ ، ص$_1$) هى $ص - ص_1 = \frac{-1}{م} (س - س_1)$

مثال ١

أوجد ميل المماس والعمودى عليه للمنحنى : ص = ظا $\left(\pi - \frac{3}{4} س\right)$ عند النقطة (π ، ١)

الحل

∵ $\frac{ءص}{ءس} = -\frac{3}{4}$ قا^2 $\left(\pi - \frac{3}{4} س\right)$

∴ ميل المماس للمنحنى عند النقطة (π ، ١) = $-\frac{3}{4}$ قا^2 $\left(\pi - \frac{3}{4}\pi\right) = -\frac{3}{4}$ قا^2 $\frac{\pi}{4} = \frac{-3}{4} \times \left(\sqrt{2}\right)^2 = \frac{-3}{2}$

، ميل العمودى على المنحنى عند النقطة (π ، ١) = $\frac{2}{3}$

مثال ٢

أوجد النقط الواقعة على المنحنى : ص = س^2 − ٤ س + ٣ والتى يكون عندها المماس للمنحنى موازيًا محور السينات.

الحل

∵ ص = س^2 − ٤ س + ٣ ∴ $\frac{ءص}{ءس}$ = ٢ س − ٤

، ∵ المماس يوازى محور السينات. ∴ $\frac{ءص}{ءس}$ = ٠

∴ ٢ س − ٤ = ٠ ∴ س = ٢ ومنها ص = −١ ∴ النقطة هى (٢ ، −١)

مثال ٣

أوجد قياس الزاوية الموجبة التى يصنعها المماس للمنحنى :

د (س) = (س^{٣} − ١) (س + ٢) مع الاتجاه الموجب لمحور السينات عند النقطة (−١ ، −٢) الواقعة على المنحنى.

الحـــل

∵ دَ (س) = (س^{٣} − ١) + ٣ س^{٢} (س + ٢)

، ∵ دَ (−١) = ١ ∴ ميل المماس للمنحنى عند النقطة (−١ ، −٢) = ١

∴ ظا هـ = ١ ∴ هـ = ٤٥°

∴ قياس الزاوية الموجبة التى يصنعها المماس للمنحنى عند النقطة (−١ ، −٢) = ٤٥°

مثال ٤

أوجد النقط الواقعة على المنحنى : ص = ٣ س^{٣} − ١١ س + ٥ والتى عندها يكون المماس للمنحنى :

[١] موازيًا للمستقيم ٢ س + ص − ٥ = ٠ [٢] عموديًا على المستقيم ٢٥ ص + س = ٦

الحـــل

∵ ص = ٣ س^{٣} − ١١ س + ٥ ∴ $\frac{ءص}{ءس}$ = ٩ س^{٢} − ١١

[١] ∵ ميل المستقيم المعطى = $\frac{-٢}{١}$ = −٢ ∴ ميل المماس = −٢

∴ ٩ س^{٢} − ١١ = −٢ ∴ س^{٢} = ١ ∴ س = ± ١

∴ عند س = ١ فإن : ص = −٣

، عند س = −١ فإن : ص = ١٣

∴ النقط هى (١ ، −٣) ، (−١ ، ١٣)

[٢] ∵ ميل المستقيم المعطى = $\frac{-١}{٢٥}$ ∴ ميل المماس = ٢٥

∴ ٩ س^{٢} − ١١ = ٢٥ ∴ س^{٢} = ٤ ∴ س = ± ٢

∴ عند س = ٢ فإن : ص = ٧

، عند س = −٢ فإن : ص = ٣

∴ النقط هى (٢ ، ٧) ، (−٢ ، ٣)

مثال ٥

أوجد معادلتى المماس والعمودى عليه للمنحنى : ص = ٥ س^{٣} + ٣ س^{٢} + ٤ عند النقطة (−١ ، ٢) الواقعة عليه.

الحـــل

∵ ص = ٥ س^{٣} + ٣ س^{٢} + ٤ ∴ $\frac{ءص}{ءس}$ = ١٥ س^{٢} + ٦ س

$\therefore \left(\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}\right)_{\text{س}=-1} = 9$ $\therefore$ ميل المماس = ٩

$\therefore$ معادلة المماس هى (ص − ٢) = ٩ (س + ١) أى ص − ٩ س − ١١ = ٠

، $\because$ ميل العمودى = $\frac{-1}{9}$

$\therefore$ معادلة العمودى هى (ص − ٢) = $\frac{-1}{9}$ (س + ١) أى س + ٩ ص − ١٧ = ٠

مثال ٦

أوجد معادلتى المماس والعمودى للمنحنى : ص = (س − ٢) (س^3 − ٤) عند النقطة (٢ ، ٠) الواقعة على المنحنى.

الحل

$\because$ ص = (س − ٢) (س^3 − ٤) $\therefore \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = (س − ٢) (٣ س^2) + (س^3 − ٤)

$\therefore \left(\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}\right)_{\text{س}=2} = 4$ $\therefore$ ميل المماس = ٤

$\therefore$ معادلة المماس هى (ص − ٠) = ٤ (س − ٢) أى ٤ س − ص − ٨ = ٠

، ميل العمودى = $\frac{-1}{4}$

$\therefore$ معادلة العمودى هى (ص − س) = $\frac{-1}{4}$ (س − ٢) أى ٤ ص + س − ٢ = ٠

مثال ٧

أوجد معادلة العمودى لمنحنى الدالة ص = س^2 + ٢ س − ٣ عند كل نقطة من نقط تقاطعه مع

١ محور السينات. ٢ محور الصادات.

الحل

١ نوجد نقط تقاطع المنحنى مع محور السينات بوضع ص = ٠

$\therefore$ س^2 + ٢ س − ٣ = ٠ $\therefore$ (س + ٣) (س − ١) = ٠

$\therefore$ س = −٣ أ، س = ١ $\therefore$ نقط التقاطع هى (−٣ ، ٠) ، (١ ، ٠)

، $\because$ ميل المماس للمنحنى عند أى نقطة (س ، ص) عليه = $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = ٢ س + ٢

- عند النقطة (−٣ ، ٠) $\therefore$ ميل المماس = −٤ وميل العمودى = $\frac{1}{4}$

$\therefore$ معادلة العمودى هى : (ص − ٠) = $\frac{1}{4}$ (س + ٣) أى ٤ ص − س − ٣ = ٠

- عند النقطة (١ ، ٠) $\therefore$ ميل المماس = ٤ $\therefore$ ميل العمودى = $-\frac{1}{4}$

$\therefore$ معادلة العمودى هى : (ص − ٠) = $-\frac{1}{4}$(س − ١) أى س + ٤ ص − ١ = ٠

٢ نوجد نقط تقاطع المنحنى مع محور الصادات بوضع س = ٠

∴ ص = -٣ ∴ نقطة التقاطع هى (٠ ، -٣)

∴ ميل المماس = ٢ وميل العمودى = $\frac{-١}{٢}$

∴ معادلة العمودى هى (ص + ٣) = $\frac{-١}{٢}$ (س - ٠) أى س + ٢ ص + ٦ = ٠

مثال ٨

إذا كانت : ص = ظا س حيث س ∈] ٠ ، ٢ π[- $\{\frac{\pi}{٢} ، \frac{٣\pi}{٢}\}$

فأوجد النقط الواقعة على منحنى هذه الدالة والتى عندها يكون المماس موازيًا للمستقيم :

٢ ص - ٨ س + ٧ = ٠

الحل

∵ ص = ظا س ∴ صَ = قا² س

، ∵ ميل المستقيم المعطى = $\frac{-(-٨)}{٢}$ = ٤ ∴ قا² س = ٤ ∴ قا س = ± ٢

∴ حتا س = ± $\frac{١}{٢}$ ∴ س = $\frac{\pi}{٣}$ ، $\frac{٢\pi}{٣}$ ، $\frac{٤\pi}{٣}$ ، $\frac{٥\pi}{٣}$

ومنها ص = $\sqrt{٣}$ ، -$\sqrt{٣}$ ، $\sqrt{٣}$ ، -$\sqrt{٣}$ على الترتيب.

∴ النقط هى : $\left(\frac{\pi}{٣} ، \sqrt{٣}\right)$ ، $\left(\frac{٢\pi}{٣} ، -\sqrt{٣}\right)$ ، $\left(\frac{٤\pi}{٣} ، \sqrt{٣}\right)$ ، $\left(\frac{٥\pi}{٣} ، -\sqrt{٣}\right)$

مثال ٩

إذا كانت : س ∈ [٠ ، π] فأوجد نقطة على المنحنى ص = حا ٢ س - حتا س يكون المماس عندها مائلًا بزاوية قياسها $\frac{٣\pi}{٤}$ مع الاتجاه الموجب لمحور السينات وأوجد معادلة هذا المماس.

الحل

∵ ص = حا ٢ س - حتا س

∴ صَ = ٢ حتا ٢ س + حا س ، عندما ميل المماس = ظا $\frac{٣\pi}{٤}$ = -١

∴ ٢ حتا ٢ س + حا س = -١ (لكن حتا ٢ س = ١ - ٢ حا² س)

∴ ٢ - ٤ حا² س + حا س = -١ ∴ ٤ حا² س - حا س - ٣ = ٠

∴ (٤ حا س + ٣) (حا س - ١) = ٠

∴ حا س = $\frac{-٣}{٤}$ (مرفوض لأن س ∈ [٠ ، π])

أ ، حا س = ١ ومنها س = $\frac{\pi}{٢}$ ومنها ص = ٠ ∴ نقطة التماس هى $\left(\frac{\pi}{٢} ، ٠\right)$

∴ معادلة المماس هى : (ص - ٠) = -١ $\left(س - \frac{\pi}{٢}\right)$ أى س + ص - $\frac{\pi}{٢}$ = صفر

مثال ١٠

إذا كان المنحنى : ص = $\frac{أ}{س + ب}$ يمر بالنقطة (−١ ، ٢) والمماس للمنحنى عند هذه النقطة يوازى المستقيم

س + ص − ٣ = ٠ **فأوجد قيمتى : أ ، ب**

الحل

∵ المنحنى ص = $\frac{أ}{س + ب}$ يمر بالنقطة (−١ ، ٢)

∴ ٢ = $\frac{أ}{-١ + ب}$ ∴ أ = ٢ (−١ + ب) (١)

، ∵ $\frac{ءص}{ءس} = \frac{-أ}{(س + ب)^٢}$ ∴ $\left(\frac{ءص}{ءس}\right)_{س = -١} = \frac{-أ}{(-١ + ب)^٢}$

، ∵ المماس يوازى المستقيم س + ص − ٣ = ٠ ∴ ميل المماس = −١

∴ $\frac{-أ}{(-١ + ب)^٢}$ = −١ ∴ $\frac{أ}{(-١ + ب)^٢}$ = ١ بشرط ب ≠ ١ (٢)

بالتعويض عن قيمة أ من (١) فى (٢) :

∴ $\frac{٢ (-١ + ب)}{(-١ + ب)^٢}$ = ١ ∴ $\frac{٢}{(-١ + ب)}$ = ١

∴ −١ + ب = ٢ ∴ ب = ٣

وبالتعويض فى (١) : ∴ أ = ٢ (−١ + ٣) = ٤

مثال ١١

أثبت أن مساحة المثلث المحصور بين المماس للمنحنى ص = $\frac{٢}{س}$ حيث س > ٠ عند أى نقطة عليه ومحورى الإحداثيات تساوى ٤ وحدة مربعة.

الحل

∵ ص = $\frac{٢}{س}$ = ٢ س$^{-١}$ ∴ ص َ = $\frac{-٢}{س^٢}$ وبفرض أن نقطة التماس هى (أ ، $\frac{٢}{أ}$)

∴ ص َ = $\frac{-٢}{أ^٢}$ ∴ معادلة المماس هى $\left(ص - \frac{٢}{أ}\right) = \frac{-٢}{أ^٢}$ (س − أ)

أى ٢ س + أ^٢ ص − ٤ أ = ٠ ، بوضع ص = ٠

∴ س = ٢ أ ∴ المماس يقطع محور السينات عند (٢ أ ، ٠)

، بوضع س = ٠ ∴ ص = $\frac{٤}{أ}$

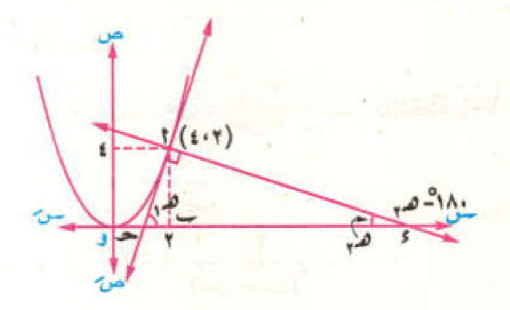
∴ المماس يقطع محور الصادات عند (٠ ، $\frac{٤}{أ}$)

∴ مساحة المثلث المطلوب = $\frac{١}{٢}$ × ٢ أ × $\frac{٤}{أ}$ = ٤ وحدة مربعة.

مثال ١٢

أوجد مساحة المثلث المحدد بمحور السينات والمماس والعمودى لمنحنى الدالة د : د (س) = $س^2$ عند النقطة (٢ ، ٤) الواقعة عليه.

الحل



دَ (س) = ٢ س ، عند النقطة (٢ ، ٤)

∴ دَ (س) = ٤

∵ ميل المماس = ظا $هـ_1$

∴ ظا $هـ_1$ = $\frac{أب}{ب حـ}$

∴ ٤ = $\frac{٤}{ب حـ}$ ∴ ب حـ = ١ وحدة.

، ∵ ميل العمودى = $\frac{-١}{٤}$ ∴ ظا (١٨٠° - $هـ_2$) = $-\frac{١}{٤}$

∴ - ظا $هـ_2$ = $\frac{-١}{٤}$ ∴ ظا $هـ_2$ = $\frac{١}{٤}$

، ∵ ظا $هـ_2$ = $\frac{أب}{ء ب}$ ∴ $\frac{١}{٤}$ = $\frac{٤}{ء ب}$

∴ ء ب = ١٦ وحدة. ∴ ء حـ = ١٦ + ١ = ١٧ وحدة.

∴ مساحة Δ أ ء حـ = $\frac{١}{٢}$ × ء حـ × أ ب = $\frac{١}{٢}$ × ١٧ × ٤ = ٣٤ وحدة مربعة.

حل آخر :

∵ المماس للمنحنى عند النقطة (٢ ، ٤) ميله = ٤

∴ معادلة المماس هى (ص - ٤) = ٤ (س - ٢) أى ص - ٤ س + ٤ = ٠

لإيجاد نقط تقاطع المماس مع محور السينات نضع ص = ٠

∴ س = ١ ∴ حـ = (١ ، ٠)

، ∵ العمودى للمنحنى عند النقطة (٢ ، ٤) ميله = $\frac{-١}{٤}$

∴ معادلة العمودى هى (ص - ٤) = $\frac{-١}{٤}$ (س - ٢) أى ٤ ص + س - ١٨ = ٠

لإيجاد نقط تقاطع العمودى مع محور السينات نضع ص = ٠

∴ س = ١٨ ∴ ء = (١٨ ، ٠)

∴ طول $\overline{حـ ء}$ = ١٨ - ١ = ١٧ وحدة طولية.

∴ مساحة Δ أ حـ ء = $\frac{١}{٢}$ حـ ء × أ ب = $\frac{١}{٢}$ × ١٧ × ٤ = ٣٤ وحدة مربعة.



تمارين 14 على تطبيقات على المشتقة

من أسئلة الكتاب المدرسى • فهم • تطبيق • مستويات عليا

أولاً أسئلة الاختيار من متعدد

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) ميل المماس لمنحنى الدالة ص = (٢ س − ٣)^{٥} عند س = ٢ يساوى ....

(أ) ١ (ب) $\frac{١}{١٢}$ (جـ) ٥ (د) ١٠

(٢) ميل المماس لمنحنى الدالة ص = جاس جتاس يساوى ....

(أ) جتاس جاس (ب) جتا^{٢} س − جا^{٢} س

(جـ) جاس − جتاس (د) جا^{٢} س + جتا^{٢} س

(٣) ميل المماس للمنحنى ص = س جتا ٢ س عندما س = $\frac{\pi}{٢}$ يساوى ....

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) −١ (د) ٢

(٤) ميل العمودى على المنحنى ص = جا ٢ س عند النقطة التى تقع على المنحنى وإحداثيها السينى = $\frac{\pi}{٦}$ يساوى ....

(أ) صفر (ب) −١ (جـ) ٣ (د) ١

(٥) إذا كان المستقيم : ص + س − ١ = ٠ يمس منحنى الدالة د : د (س) = س^{٢} − ٣ س + أ فإن : أ = ...

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) ٣ (د) ٤

(٦) النقطة الواقعة على منحنى الدالة د : د (س) = (س − ٣)^{٢} − ١ والتى عندها المماس يوازى المستقيم ٢ س + ص − ٣ = ٠ هى ....

(أ) (٠ ، ٢) (ب) (٢ ، ٠) (جـ) (٣ ، −١) (د) (١ ، ٣)

(٧) النقطة الواقعة على منحنى الدالة ص = $\frac{١}{س − ٢}$ والتى عندها المماس يوازى المستقيم س + ص = ٠ من النقط التالية هى ....

(أ) (−٢ ، − $\frac{١}{٥}$) (ب) (٤ ، −٤) (جـ) (٤ ، ١) (د) (٢ ، −٢)

(٨) إذا كانت : د دالة خطية وكان دَ (−١١) = ١٧ فإن : دَ (١١) = ...

(أ) −١١ (ب) −١٧ (جـ) ١٧ (د) ١١

(٩) إذا كان المماس لمنحنى الدالة ص = د (س) عند النقطة (٣ ، ٥) يمر بالنقطة (٦ ، −١)
فإن : دَ (٣) = ...

(أ) −٢ (ب) $\frac{-١}{٢}$ (جـ) $\frac{١}{٢}$ (د) ٢

(١٠) معادلة المماس لمنحنى الدالة د : د (س) = $\frac{١}{س + ١}$ عند س = صفر هى ....

(أ) ص = ١ − س (ب) ص = س − ١ (جـ) ص = س + ١ (د) ص = −س − ١

(١١) معادلة المماس للمنحنى ص = طا س + جا ٢ س عندما س = $\frac{\pi}{٤}$ هى ....

(أ) ٢ ص − ٤ س − π = ٠ (ب) ٢ س − ٤ ص + π = ٤

(جـ) ص − ٢ س = ٢ (د) ٢ ص − ٤ س + π = ٤

(١٢) منحنى الدالة د : د (س) = $\frac{١}{٣}$ س^{٣} − س^{٢} + ٣ له مماس أفقى عند س = ...

(أ) صفر (ب) صفر أ، ٣ (جـ) ٢ (د) صفر أ، ٢

(١٣) المماس لمنحنى الدالة ص = $\sqrt[٣]{س}$ عند س = ٠ هو ....

(أ) محور السينات. (ب) محور الصادات.

(جـ) المستقيم ص = س (د) المستقيم س + ص = ٠

(١٤) إذا كانت معادلة العمودى للمنحنى د (س) عند النقطة (٢ ، −١) هى س − ٢ ص = ٤
فإن : دَ (٢) = ...

(أ) ٢ (ب) −٢ (جـ) ١ (د) −١

(١٥) إذا كان المماس لمنحنى الدالة د حيث د (س) = أ س^{٢} + ب س + ٥ عند النقطة (−١ ، ٣) الواقعة عليه يصنع مع الاتجاه الموجب لمحور السينات زاوية موجبة قياسها ٤٥° فإن : أ + ب = ...

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) ٣ (د) ٤

(١٦) إذا كان ميل المماس للمنحنى : ص = أ س^{٢} + ٢ ب س عند نقطة الأصل يساوى ٦ والنقطة (−١ ، −٣) تقع على المنحنى فإن : أ + ب = ...

(أ) ٣ (ب) ٤ (جـ) ٦ (د) ٨

(١٧) إذا كان : ص = $\frac{١}{أ + ب س}$ هى معادلة منحنى يمر بالنقطة (١ ، −١) وميل المماس له عند هذه النقطة يساوى ٢ فإن : ب − أ = ...

(أ) −١ (ب) −٣ (جـ) ٣ (د) ١

(١٨) قياس الزاوية الموجبة التى يصنعها المماس للمنحنى : ص + جا ٢ س = ٠ مع الاتجاه الموجب لمحور السينات عند النقطة ($\frac{\pi}{٣}$ ، $\frac{-\sqrt{٣}}{٢}$) تساوى ....

(أ) ٣٠° (ب) ٤٥° (جـ) ٦٠° (د) ٧٥°

(١٩) ميل المماس للمنحنى ص = $\sqrt[٣]{س^{٢} + س + ٢}$ عند النقطة (٢ ، ٢) يساوى ....

(أ) $\frac{٢}{٣}$ (ب) $\frac{١٢}{٥}$ (جـ) $\frac{٣}{٢}$ (د) $\frac{٥}{١٢}$

(٢٠) ميل العمودى للمنحنى ص = (س − ١) (س^{٢} + ٢) عند س = ١ يساوى ....

(أ) $-\frac{١}{٣}$ (ب) −٣ (جـ) $\frac{١}{٣}$ (د) ٣

(٢١) قياس الزاوية الموجبة التى يصنعها المماس للمنحنى ص = $\sqrt{٢ س^{٢} + ٧}$ عند النقطة (−٣ ، ٥) مع الاتجاه الموجب لمحور السينات = ...

(أ) ٤٨ َ ٣٩° (ب) ١٢ َ ٥٠° (جـ) ٤٨ َ ١٢٩° (د) ١٢ َ ١٤٠°

(٢٢) معادلة العمودى على المنحنى ص = ظا س عند النقطة $\left(\frac{\pi}{٤} ، ١\right)$ الواقعة عليه هى ....

(أ) ص − ٢ س = ١ − $\frac{\pi}{٢}$ (ب) ٨ ص + ٤ س = π + ٨

(جـ) ٤ ص − ٤ س = π + ٤ (د) ٤ ص + ٢ س = π + ٤

(٢٣) النقطة الواقعة على المنحنى ص = س^{٢} والتى عندها ميل المماس يساوى الإحداثى السينى للنقطة هى ....

(أ) (٢ ، ٠) (ب) (٠ ، ٢) (جـ) $\left(-\frac{١}{٢} ، \frac{١}{٢}\right)$ (د) (٠ ، ٠)

(٢٤) النقطة الواقعة على المنحنى ص = س^{٣} − ٢ س + ١ والتى عندها المماس للمنحنى تصنع زاوية قياسها $\frac{\pi}{٤}$ مع الاتجاه الموجب لمحور السينات هى ....

(أ) (١ ، ٠) ، (١ ، ٢) (ب) (٠ ، ١) ، (٢ ، −١)

(جـ) (١ ، ٠) ، (−١ ، ٢) (د) (١ ، ٢) ، (−١ ، ٢)

(٢٥) النقطة الواقعة على المنحنى ص = ٢ س^{٢} − س + ٣ والتى عندها المماس يكون عموديًا على المستقيم س = ١ − ٥ ص هى ....

(أ) (١ ، −٤) (ب) (١ ، ٢)

(جـ) (١ ، −٤) ، (١ ، ٢) (د) (١ ، ٤) ، (−١ ، ٢)

(٢٦) النقط التى تقع على المنحنى ص^{٢} = ٨ س والتى عندها $\frac{ء ص}{ء س} = \frac{ء س}{ء ص}$ هى ....

(أ) (٢ ، ٤) ، (٤ ، −٢) (ب) (٢ ، ٤) ، (٢ ، −٤)

(جـ) (−٢ ، ٤) ، (٢ ، ٤) (د) (٤ ، ٢) ، (٤ ، −٢)

(٢٧) إذا كان المستقيم : ٢ ص − ٤ س + أ = ٠ يمس منحنى الدالة : ص = س^{٢} + ١ عند النقطة (ب ، حـ) فإن : أ + ب + حـ = ...

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) ٣ (د) ٦

(٢٨) إذا كان المماس للمنحنى : ص = س^{٣} − ٣ س^{٢} يصنع زاوية منفرجة مع الاتجاه الموجب لمحور السينات فإن : س ∋ ....

(أ) [٠ ، ٢] (ب)]٠ ، ٢[(جـ) ح − [٠ ، ٢] (د) ح −]٠ ، ٢[

(٢٩) إذا كان ميل المماس للمنحنى ص = س^{٢} + أ س + ب يساوى −١ عند النقطة (٢ ، −٢) فإن : أ × ب = ...

(أ) −١٥ (ب) −٢٠ (جـ) −١ (د) ١٠

(٣٠) المماس للمنحنى ص = حا٢ س عند س = $\frac{\pi}{2}$ يصنع مع الاتجاه الموجب لمحور السينات زاوية موجبة قياسها ....

(أ) $\frac{\pi}{6}$ (ب) $\frac{\pi}{4}$ (جـ) $\frac{\pi}{3}$ (د) $\frac{3\pi}{4}$

(٣١) المماس للمنحنى ص = (٣ س − ٥)^3 عند النقطة (٢ ، ١) يصنع مع الاتجاه الموجب لمحور السينات زاوية موجبة ظلها يساوى ....

(أ) ٢ (ب) ٣ (جـ) ٧ (د) ٩

(٣٢) إذا كان : ص = $\frac{2\ ظا س}{1 - ظا^2 س}$ فإن : ميل المماس للمنحنى ص عند س = $\frac{\pi}{8}$ يساوى ....

(أ) ٢ (ب) ٤ (جـ) ٦ (د) ٨

(٣٣) إذا كان العمودى على منحنى الدالة : ص = د (س) عند النقطة (٣ ، ٤) يصنع زاوية قياسها $\frac{3\pi}{4}$ مع الاتجاه الموجب لمحور السينات فإن : دَ (٣) = ...

(أ) −١ (ب) $\frac{-3}{4}$ (جـ) $\frac{3}{4}$ (د) ١

(٣٤) إذا كان المستقيم ص = ٨ − ٣ س مماسًا لمنحنى الدالة د عند النقطة (٣ ، −١) فإن : دَ (٣) = ...

(أ) −١ (ب) −٣ (جـ) ٣ (د) ٨

(٣٥) ميل العمودى لمنحنى الدالة : ص = |س^3| عند النقطة (−٢ ، ٨) هو ....

(أ) ١٢ (ب) −١٢ (جـ) $\frac{1}{12}$ (د) $\frac{-1}{12}$

(٣٦) إذا كانت د دالة زوجية وقابلة للاشتقاق على ح وكان : دَ (٢) = ٣ فإن ميل المماس للدالة د عند س = −٢ هو ....

(أ) ٣ (ب) −٣ (جـ) $\frac{1}{3}$ (د) $\frac{-1}{3}$

(٣٧) إذا كانت د دالة فردية قابلة للاشتقاق على ح وكان : دَ (٣) = ٥ فإن ميل المماس للدالة د عند س = −٣ هو ....

(أ) ٥ (ب) −٥ (جـ) $\frac{1}{5}$ (د) $\frac{-1}{5}$

(٣٨) المماس لمنحنى يكون عمودى على محور السينات إذا كان ....

(أ) $\frac{ءص}{ءس} = 0$ (ب) $\frac{ءص}{ءس} = 1$ (جـ) $\frac{ءس}{ءص} = 0$ (د) $\frac{ءس}{ءص} = -1$

(٣٩) المماسان للمنحنى ص = س^3 عند س$_1$ = −١ ، س$_2$ = ١ يكونان ....

(أ) متعامدان. (ب) متوازيان.

(جـ) متقاطعان وغير متعامدان. (د) منطبقان.

(٤٠) إذا كان ميل المماس لمنحنى الدالة د حيث د (س) = أ حا^2 س + ب حا^2 س عند النقطة ($\frac{\pi}{3}$ ، ١) يساوى ٦ $\sqrt{3}$ فإن : أ + ب = ...

(أ) −١٢ (ب) −٤ (جـ) ٨ (د) ١٢

(٤١) إذا كان المنحنيان : ص = $س^{٣}$ ، أ ص + $س^{٢}$ = ب يتقاطعان على التعامد عند (١ ، ١)

إذا كان : أ = ...

(أ) −٢ (ب) صفر (جـ) ٣ (د) ٦

(٤٢) إذا كان منحنى الدالة د يمر بالنقطة (٣ ، ٧) وكان ميل المماس عندها يساوى −٢

وكان : ر (س) = (س + ٢) د (س) + ٢ س − ٣ فإن قياس الزاوية التى يصنعها المماس لمنحنى الدالة ر عند س = ٣ يساوى .... مع الاتجاه الموجب لمحور السينات.

(أ) صفر (ب) $\frac{\pi}{٤}$ (جـ) $\frac{\pi}{٢}$ (د) $\frac{٣\pi}{٤}$

(٤٣) إذا كانت د : ح ⟵ ح حيث د (س) = $س^{٣}$ − أ $س^{٢}$ + ب س − ١ والمماس عند س = ١ يصنع زاوية قياسها ١٣٥° مع الاتجاه الموجب لمحور السينات ، بينما المماس عند س = ٢ يوازى محور السينات فإن ٣ أ − ب = ...

(أ) −٨ (ب) −٤ (جـ) صفر (د) ٨

(٤٤) مساحة المثلث المحصور بين المماس للمنحنى ص = $\frac{٤}{س}$ حيث س > ٠ عند أى نقطة عليه ومحورى الإحداثيات تساوى .... وحدة مربعة.

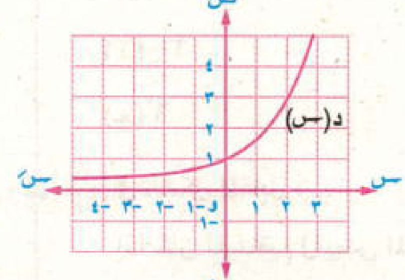
(أ) ٢ (ب) ٤ (جـ) ٨ (د) ١٦

(٤٥) الشكل المقابل يمثل منحنى الدالة د

فإن د̄ (٢) تكون ....

(أ) موجبة. (ب) سالبة.

(جـ) صفر. (د) غير معرفة.



(٤٦) الشكل المقابل يمثل جزء من منحنى الدالة د والمستقيم ل مماس لمنحنى الدالة عند النقطة (٣ ، ٤) ويوازى محور السينات

فإن : د̄ (٣) = ...

(أ) ٤ (ب) صفر

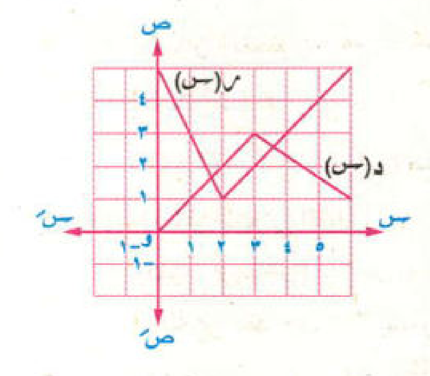
(جـ) $\frac{٤}{٣}$ (د) $\frac{٣}{٤}$

(٤٧) الشكل المقابل يمثل المنحنى ص = د (س) والمستقيم ل يمس المنحنى عند النقطة (٦ ، ٢)

فإن د̄ (٦) = ...

(أ) −$\frac{١}{٢}$ (ب) صفر

(جـ) $\frac{١}{٢}$ (د) ١



(٤٨) في الشكل المقابل :

دَ (١) + رَ (١) = ...

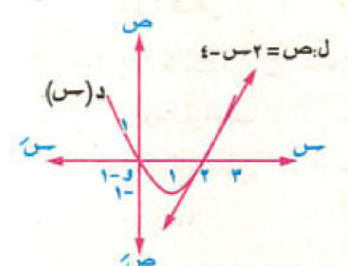
(أ) −٢ (ب) −١

(جـ) ١ (د) ٢

(٤٩) الشكل المقابل يمثل منحنى الدالة د

، المستقيم ل يمس المنحنى عند

النقطة (٢ ، ٠) فإن : دَ (٢) = ...



(أ) صفر (ب) ١

(جـ) ٢ (د) ٣

(٥٠) الشكل المقابل يمثل منحنى الدالة

د : د (س) = أ س − $س^2$ والمستقيم ل

يمس المنحنى عند النقطة (١ ، ك)

فإن : أ = ...

(أ) −٣ (ب) صفر

(جـ) ٦ (د) ٨

(٥١) في الشكل المقابل :

إذا كان المستقيم ل يمس المنحنى ص = د (س)

عند النقطة (٠ ، ٢) ويمس المنحنى ص = ر (س)

عند س = ٣ وكان ٤ دَ (٠) + ٥ رَ (٣) = ٣

فإن : ر (٣) = ...

(أ) ٢ (ب) ٣

(جـ) ٤ (د) ٥

ثانيًا الأسئلة المقالية

١ أوجد ميل المماس لكل من المنحنيات الآتية :

(١) ص = $\frac{١ - ٢س}{س - ٢}$ عند النقطة (١ ، ١) «٣»

(٢) ص = ٥ − جا س عند س = $\frac{\pi}{٤}$ «$-\frac{١}{\sqrt{٢}}$»

(٣) ص = س $\sqrt{جا س}$ عند س = $\frac{\pi}{٢}$ «١»

٢ أوجد ميل العمودى على كل من المنحنيات الآتية :

① ص = ٢ س^٣ − ٣ س^٢ − ١٢ س + ٥ عند النقطة (−٢ ، ١) « $\frac{-١}{٢٤}$ »

② ص = ظا (π − $\frac{٢}{٣}$ س) عند النقطة (π ، $\sqrt{٣}$) « $\frac{٣}{٨}$ »

③ ص = س^٢ (س − $\frac{٢}{س}$) (س + $\frac{٢}{س}$) عند س = ٢ « $\frac{-١}{٣٢}$ »

---

٣ أوجد ميل المماس للمنحنى : ص = (س + ٢) (س^٣ + ١) عند نقط تقاطعه مع محور السينات. « −٧ ، ٣ »

---

٤ أوجد ميل المماس للمنحنى : د (س) = س^٣ − ٢ س^٢ + ٣ س − ١ عند نقطة تقاطعه مع محور الصادات.

« ٣ »

---

٥ أوجد قياس الزاوية الموجبة التى يصنعها المماس لكل من المنحنيات الآتية مع الاتجاه الموجب لمحور السينات عند النقطة المبينة :

① ص = س^٢ + $\frac{١}{س}$ − ١ عند س = ١ « ٤٥° »

② ص = س^٢ |س| − ٢ عند س = −٢ « ٩٤ َ ٤٥ ً ٤٩ »

---

٦ أوجد النقط الواقعة على المنحنى : ص = س^٣ − ٦ س^٢ − ١٥ س + ٢٠ والتى يكون عندها المماس موازيًا لمحور السينات. « (٥ ، −٨٠) ، (−١ ، ٢٨) »

---

٧ أوجد النقط الواقعة على المنحنى : ص = (س − ٣) (س^٢ + ٢) والتى عندها ميل المماس يساوى ١١

« (٣ ، ٠) ، (−١ ، −١٢) »

---

٨ أوجد النقط الواقعة على المنحنى : ص = س^٢ − ٢ س + ٣ والتى عندها يكون المماس للمنحنى :

① موازيًا محور السينات.

② عموديًا على المستقيم س − ٤ ص + ١ = ٠ « (١ ، ٢) ، (−١ ، ٦) »

---

٩ أوجد النقط الواقعة على المنحنى : ص = س^٣ − ٣ س^٢ − ٥ س + ١٢ والتى يكون عندها المماس للمنحنى موازيًا المستقيم المار بالنقطتين (٣ ، ١) ، (٥ ، ٩) « (٣ ، −٣) ، (−١ ، ١٣) »

---

١٠ أوجد النقط الواقعة على المنحنى : ص = $\frac{س − ٢}{س + ٢}$ والتى يصنع المماس عندها زاوية موجبة قياسها $\frac{π}{٤}$ مع الاتجاه الموجب لمحور السينات. « (٠ ، −١) ، (−٤ ، ٣) »

---

١١ أوجد النقط الواقعة على المنحنى : ص = ٣ س^٢ − ١١ س + ٥ والتى يكون عندها المماس :

① موازيًا المستقيم ٢ س + ص − ٥ = ٠ ② عموديًا على المستقيم ٢٥ ص + س = ٦

③ يصنع زاوية موجبة مع الاتجاه الموجب لمحور السينات ظلها = −١١

١٢ أوجد معادلة المماس لكل من المنحنيات الآتية عند النقطة المبينة أمام كل منها :

① ص = ٣ س^{٣} − ٧ س^{٢} + س − ٢ عند النقطة (١ ، −٥)

② ص = $\sqrt{س}$ + $\frac{٤}{\sqrt{س}}$ عند النقطة (٤ ، ٤)

③ ص = ٢ جا س + جتا س عند النقطة (٠ ، ١)

④ ص = ٢ س جا س جتا س عند س = π

⑤ د (س) = ٤ س − ظا س عند النقطة ($\frac{π}{٤}$ ، د ($\frac{π}{٤}$))

---

١٣ أوجد معادلة العمودى على كل من المنحنيات الآتية عند النقطة المبينة أمام كل منها :

① ص = س^{٥} − ٤ س^{٣} + ٢ عند س = −١

② ص = $\frac{س^{٢} - ١}{٢ - س^{٢}}$ عند س = ٠

---

١٤ أوجد معادلة كل من المماس والعمودى عليه لكل من المنحنيات الآتية عند النقطة المبينة أمام كل منها :

① ص = جا س ظا ٦ س عند س = $\frac{π}{٦}$

② ص = س جا ٢ س عند النقطة ($\frac{π}{٤}$ ، $\frac{π}{٤}$)

③ ص = $\sqrt{جا س + جتا س}$ عند س = $\frac{π}{٢}$

---

١٥ أوجد معادلتى المماس والعمودى للمنحنى : ص = $\frac{س + ٣}{س + ١}$ عند النقطة الواقعة على المنحنى والتى إحداثيها السينى = ١ هل النقطة أ (−٣ ، ٤) تقع على المماس ؟ فسر إجابتك.

---

١٦ أوجد معادلة المماس للمنحنى : ص = ٢ س^{٣} + ٦ س^{٢} + ٥ س الذى يصنع زاوية موجبة قياسها ١٣٥° مع الاتجاه الموجب لمحور السينات. « ص + س + ٢ = ٠ »

---

١٧ أوجد معادلة المماس للمنحنى : ص^{٢} = س − ١ إذا كان ميل المماس = $\frac{١}{٢}$ « ٢ ص + س = ٠ »

---

١٨ أوجد معادلة المماس لمنحنى الدالة : ص = (س − ٢) (س + ١) عند كل من نقطتى تقاطعه مع محور السينات. « ص − ٣ س + ٦ = ٠ ، ص + ٣ س + ٣ = ٠ »

---

١٩ إذا كان المنحنى ص = أ س^{٣} + ب س^{٢} يمس المستقيم ص = ٨ س + ٥ عند النقطة (−١ ، −٣) فأوجد قيمتى : أ ، ب « ٢ ، −١ »

---

٢٠ إذا كان المنحنى ص = (س^{٢} − ٢ س) (أ س + ب) يمس محور السينات عند النقطة (٢ ، ٠)، ويمس المستقيم ص = ٢ س عند نقطة الأصل فأوجد قيمتى : أ ، ب « $\frac{١}{٢}$ ، −١ »

٢١ إذا كانت : $س \in]٠ ، \pi[$ فأوجد النقط الواقعة على المنحنى : $ص = جا ٢ س$ وعندها يكون المماس موازيًا المستقيم : $ص = ٨ + س$ « $(\frac{\pi}{٦} ، \frac{\sqrt{٣}}{٢})$ ، $(\frac{٥\pi}{٦} ، \frac{-\sqrt{٣}}{٢})$ »

---

٢٢ أثبت أن المماس للمنحنى : $ص = س^٣ + ٣ س - ٢$ عند أى نقطة عليه يميل بزاوية حادة على محور السينات ثم أوجد معادلة العمودى للمنحنى عند النقطة (١ ، ٢) الواقعة على المنحنى. « $س + ٦ ص - ١٣ = ٠$ »

---

٢٣ أثبت أن المماس المرسوم للمنحنى : $ص = س^٢ + س - ١$ عند النقطة (١ ، ١) يكون عموديًا على المماس المرسوم للمنحنى $ص = ٢ - \sqrt[٣]{س}$ عند نفس النقطة.

---

٢٤ أوجد ميل المماس للمنحنى : $٤ ص = ١٢ س - ٤ - س^٢$ عندما $س = ٢$ وأثبت أنه ضعف ميل المماس للمنحنى عندما $س = ٤$

أوجد أيضًا النقطة الواقعة على المنحنى ويكون ميل المماس للمنحنى عندها $= -١$ « (٨ ، ٧) »

---

٢٥ أثبت أن المماس للمنحنى : $ص = ٣ س^٢ - ٥ س + ٢$ عند النقطة (١ ، ٠) يصنع زاوية موجبة مع الاتجاه الموجب لمحور السينات قياسها $\frac{\pi}{٤}$ ثم أوجد معادلة هذا المماس. « $ص = س - ١$ »

---

٢٦ أثبت أن المماس لمنحنى الدالة : $ص = جا س + جتا س$ عند النقطة $(\frac{\pi}{٤} ، \sqrt{٢})$ يوازى محور السينات ثم أوجد معادلته. « $ص = \sqrt{٢}$ »

---

٢٧ أوجد معادلتى المماسين للمنحنى : $ص = س^٣ - ٣ س + ٥$ العموديين على المستقيم : $س + ٩ ص = ١$ « $ص - ٩ س + ١١ = ٠$ ، $ص - ٩ س - ٢١ = ٠$ »

---

٢٨ أوجد معادلة المماس للمنحنى : $ص = س^٢ - ٢ س + ٣$ عند النقطة (س ، ٣) الواقعة عليه (وضح وجود إجابتين) « $ص + ٢ س - ٣ = ٠$ ، $ص - ٢ س + ١ = ٠$ »

---

٢٩ أوجد معادلة المماس للمنحنى : $ص = ٥ س - ٢ س^٢ - ٤$ عند النقطة (١ ، -١) الواقعة عليه وإذا قطع هذا المماس محور الصادات فى النقطة أ وقطع محور السينات فى النقطة ب أوجد مساحة Δ و أ ب حيث و (٠ ، ٠) « $ص = س - ٢$ ، ٢ وحدة مربعة »

---

٣٠ أوجد معادلة المماس للمنحنى : $ص = \sqrt{٢٥ - س^٢}$ عند النقطة أ (٣ ، ٤) الواقعة عليه وإذا قطع هذا المماس محور السينات عند النقطة ب أوجد مساحة Δ أ ب و حيث و هى نقطة الأصل.

« $٤ ص + ٣ س = ٢٥$ ، $\frac{٥٠}{٣}$ وحدة مربعة »

---

٣١ أثبت أن مساحة المثلث المحصور بين المماس للمنحنى $ص = \frac{١}{س}$ حيث $س > $ صفر عند أى نقطة عليه ومحورى الإحداثيات تساوى ٢ وحدة مربعة.

ثالثاً مسائل تقيس مهارات التفكير

١ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

① معدل تغير ميل المماس للدالة د : د (س) = ٢ س^{٣} عند س = ٣ يساوى ....

(أ) ٣٠ (ب) ٣٢ (جـ) ٣٤ (د) ٣٦

② فى الشكل المقابل :

إذا كان المستقيم ل مماسًا لمنحنى الدالة د عند النقطة حـ

، يقطع محور السينات فى النقطة أ (–٤ ، ٠) وكانت ب (٤ ، ٠)

وكان د (٤) + دَ (٤) = ٩

فإن مساحة △ أ ب حـ = ... وحدة مربعة.

(أ) ٣٠ (ب) ٣٢

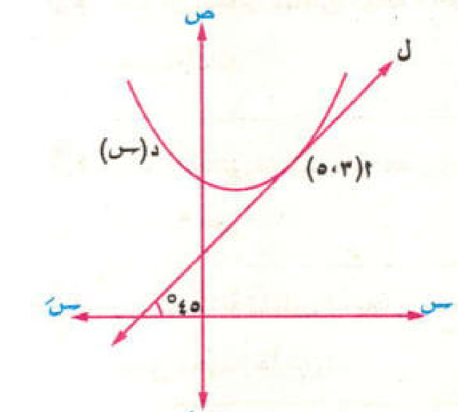
(جـ) ٣٦ (د) ٤٢

③ الشكل المقابل يمثل منحنى الدالة د

والمستقيم ل يمس منحنى الدالة عند النقطة

أ (٣ ، ٥) وكان هـ (س) = س . د (س)

فإن : هـَ (٣) = ...



(أ) ٣ (ب) ١

(جـ) ٥ (د) ٨

④ إذا كان منحنيا الدالتين د ، ر متماسان عند النقطة (٢ ، ٣)

وكانت ع (س) = س د (س) – ٢ ر (س) فإن : عَ (٢) = ...

(أ) –٣ (ب) –٢ (جـ) ٢ (د) ٣

---

٢ أوجد مساحة سطح المثلث المكون من محور السينات والمماس والعمودى عليه للمنحنى ص = س^{٢} – ٦ س + ١٣ عند النقطة (٤ ، ٥) الواقعة عليه.

« ٣١,٢٥ وحدة مربعة »

---

٣ أوجد معادلة المماس للمنحنى : ص + $\sqrt{س}$ = ١٢ عند نقطة تقاطع المنحنى مع المستقيم ص = س

« س + ٦ ص – ٦٣ = ٠ »

٤ إذا كان المماس للمنحنى : ص = $\frac{-س}{أ + ب س}$ المرسوم عند النقطة (-١ ، ١) الواقعة على المنحنى يصنع مع الاتجاه الموجب لمحور السينات زاوية موجبة قياسها هـ حيث : جا هـ = $\frac{-1}{\sqrt{10}}$

فأوجد قيمتى : أ ، ب «٣ ، ٢»

---

٥ أثبت أن المنحنيين : ص = ٣ س^{2} - ٥ س - ٢ ، ص = س^{2} - ٣ س - ٢ يتقاطعان على التعامد عند النقطة (١ ، -٤)

---

٦ إذا كانت : س ∈ [٠ ، π] أوجد قياس الزاوية الحادة بين المماسين للمنحنيين :

ص = جا س ، ص = جتا س عند نقطة تقاطعهما. «٤٤ ٣١ ٧٠°»

---

٧ أوجد بدلالة النسبة التقريبية π معادلة المماس للمنحنى : ص = جتا (س + ص) والذى ميله = $-\frac{1}{2}$ حيث

س ∈ [٠ ، π] «٢ س + ٤ ص - π = ٠»

---

٨ أوجد النقط الواقعة على منحنى الدالة : ص = $\frac{1}{3}$ س^{3} - $\frac{3}{2}$ س^{2} + س + ١ والتى يصنع المماس والعمودى على المماس عندها مع محور السينات مثلثًا متساوى الساقين.

---

٩ إذا كان المماس للمنحنى : ص = س^{2} يمر بالنقطة (٣ ، ٥) فأوجد معادلة هذا المماس.

«ص - ٢ س + ١ = ٠ أ، ص - ١٠ س + ٢٥ = ٠»



الدرس 7

التكامل

درسنا فيما سبق كيفية الحصول على الدالة المشتقة دَ من الدالة الأصلية د وهو ما يسمى بالتفاضل أو الاشتقاق ولكن قد يكون المطلوب فى بعض التطبيقات الحصول على الدالة د إذا علمت الدالة المشتقة دَ ولذلك نلجأ لإجراء عملية عكسية لعملية التفاضل تسمى عملية التكامل

الدالة د ← عملية تفاضل ← الدالة دَ
الدالة دَ ← عملية تكامل ← الدالة د

وتسمى الدالة الناتجة بالمشتقة العكسية أو الدالة الأصلية المقابلة للدالة.

تعريف

يقال إن الدالة ت مشتقة عكسية للدالة د إذا كانت تَ (س) = د (س) لكل س فى مجال د

فمثلاً : إذا كانت : د (س) = $س^{٢}$ فإن : دَ (س) = ٢ س

وحسب التعريف السابق تكون $س^{٢}$ هى مشتقة عكسية أو دالة أصلية مقابلة للدالة ٢ س إلا أننا نلاحظ أن الدوال $س^{٢}$ ، $س^{٢} + ٣$ ، $س^{٢} - ٥$ ، .... ، $س^{٢} +$ ث

(حيث ث ثابت) جميعها لها نفس المشتقة ٢ س وهذا معناه أن المشتقة العكسية أو الدالة الأصلية المقابلة للدالة ٢ س ليست وحيدة.

ملاحظة

إذا كان : كل من $د_{١}$ ، $د_{٢}$ مشتقة عكسية للدالة د فإن : $د_{١}$ (س) = $د_{٢}$ (س) + ث

التكامل غير المحدد

مجموعة المشتقات العكسية للدالة د تسمى التكامل غير المحدد لهذه الدالة ويرمز لها بالرمز [$\int$ د (س) ء س]

ويقرأ [تكامل دالة س بالنسبة إلى س]

تعريـــف

إذا كان : $ت'(س) = د(س)$ فإن : $\int د(س)\, ءس = ت(س) + ث$

حيث ث ثابت اختيارى (ثابت التكامل)

فمثلًا : إذا كان : $\frac{ء}{ءس}(س^٣) = ٣س^٢$ ∴ $\int ٣س^٢\, ءس = س^٣ + ث$

، إذا كان : $\frac{ء}{ءس}(٣س^٥ + ١) = ١٥س^٤$ ∴ $\int ١٥س^٤\, ءس = ٣س^٥ + ث$

* لتعيين قيمة الثابت ث يلزم معرفة قيمة التكامل عند قيمة معينة للمتغير المستقل س وهذا خارج نطاق دراستك.

مثال ١

أثبت أن : [١] الدالة ت : $ت(س) = \frac{١}{٢}س^٨$ هى مشتقة عكسية للدالة د : $د(س) = ٤س^٧$

[٢] $\int \frac{س}{\sqrt{١ + س^٢}}\, ءس = \sqrt{١ + س^٢} + ث$

الحـــل

[١] ∵ $ت(س) = \frac{١}{٢}س^٨$ ∴ $ت'(س) = \frac{١}{٢} \times ٨س^٧ = ٤س^٧$

∴ $ت'(س) = د(س)$ ∴ الدالة ت مشتقة عكسية للدالة د

[٢] ∵ $\frac{ء}{ءس}\left[\sqrt{١ + س^٢} + ث\right] = \frac{١ \times ٢س}{٢\sqrt{١ + س^٢}} + صفر = \frac{س}{\sqrt{١ + س^٢}}$

∴ $\int \frac{س}{\sqrt{١ + س^٢}}\, ءس = \sqrt{١ + س^٢} + ث$

قاعدة

$\int س^ن\, ءس = \frac{س^{ن+١}}{ن + ١} + ث$ حيث ث ثابت ، $ن \neq -١$

فمثلًا : * $\int س^٥\, ءس = \frac{س^٦}{٦} + ث = \frac{١}{٦}س^٦ + ث$

* $\int س^{\frac{٣}{٤}}\, ءس = \frac{س^{\frac{٧}{٤}}}{\frac{٧}{٤}} + ث = \frac{٤}{٧}س^{\frac{٧}{٤}} + ث$

* $\int \frac{١}{ص^٤}\, ءص = \int ص^{-٤}\, ءص = \frac{ص^{-٣}}{-٣} + ث = \frac{-١}{٣ص^٣} + ث$

* $\int \frac{١}{\sqrt[٣]{ن}}\, ءن = \int ن^{-\frac{١}{٣}}\, ءن = \frac{ن^{\frac{٢}{٣}}}{\frac{٢}{٣}} + ث = \frac{٣}{٢}\sqrt[٣]{ن^٢} + ث$

لاحظ أن : القاعدة السابقة تعنى أنه عند إيجاد التكامل نقوم بزيادة الأس واحد ونقسم على الأس الجديد.

* لاحظ أن برهان القاعدة السابقة ينتج مباشرة بمفاضلة الطرف الأيسر كما يلى :

$\frac{ء}{ءس}\left(\frac{س^{ن+١}}{ن+١} + ث\right) = \frac{(ن+١)س^ن}{(ن+١)} + صفر = س^ن$ ∴ $\int س^ن\, ءس = \frac{س^{ن+١}}{ن+١} + ث$

خواص التكامل

إذا كانت د ، ر دالتين قابلتين للاشتقاق على فترة ما فإن :

١ $\int$ أ د (س) ء س = أ $\int$ د (س) ء س حيث : أ ثابت ≠ صفر

فمثلًا : $\int$ ٦ س^{٢} ء س = ٦ $\int$ س^{٢} ء س = ٦ × $\frac{س^{٣}}{٣}$ + ث = ٢ س^{٣} + ث

٢ $\int$ [د (س) ± ر (س)] ء س = $\int$ د (س) ء س ± $\int$ ر (س) ء س

فمثلًا : $\int$ (٢ س^{٣} + ٤ س) ء س = $\int$ ٢ س^{٣} ء س + $\int$ ٤ س ء س

= $\left(\frac{٢ س^{٤}}{٤} + ث_{١}\right) + \left(\frac{٤ س^{٢}}{٢} + ث_{٢}\right)$

= $\frac{١}{٢}$ س^{٤} + ٢ س^{٢} + ث$_{١}$ + ث$_{٢}$

= $\frac{١}{٢}$ س^{٤} + ٢ س^{٢} + ث (حيث ث = ث$_{١}$ + ث$_{٢}$)

* لا داعى لإضافة ثابت لكل مشتقة عكسية ونكتفى بإضافة ثابت واحد يساوى مجموع الثوابت الناتجة كما يلى :

$\int$ (٢ س^{٣} + ٤ س) ء س = $\frac{١}{٢}$ س^{٤} + ٢ س^{٢} + ث

ملاحظتان

* يمكن تعميم الخاصية **٢** السابقة على أى عدد محدود من الدوال أى أن :

$\int$ (د$_{١}$ (س) ± د$_{٢}$ (س) ± ... ± د$_{ن}$ (س)) ء س

= $\int$ د$_{١}$ (س) ء س ± $\int$ د$_{٢}$ (س) ء س ± ... ± $\int$ د$_{ن}$ (س) ء س

* $\int$ أ ء س = أ س + ث حيث أ ثابت ومنها نجد أن : $\int$ ء س = س + ث ، $\int$ صفر ء س = ث

مثال ٢

أوجد : **١** $\int \frac{٣}{٢ س^{٢}}$ ء س　　**٢** $\int$ ٥ ف $\sqrt{ف}$ ء ف

٣ $\int \frac{٤}{\sqrt[٥]{س^{٣}}}$ ء س　　**٤** $\int \frac{١}{س^{٣} \sqrt{س}}$ ء س

الحل

١ $\int \frac{٣}{٢ س^{٢}}$ ء س = $\int \frac{٣}{٢}$ س$^{-٢}$ ء س = $\frac{٣}{٢} \int$ س$^{-٢}$ ء س = $\frac{٣}{٢}$ × $\frac{س^{-١}}{-١}$ + ث = $\frac{-٣}{٢ س}$ + ث

٢ $\int$ ٥ ف $\sqrt{ف}$ ء ف = $\int$ ٥ ف × ف$^{\frac{١}{٢}}$ ء ف = ٥ $\int$ ف$^{\frac{٣}{٢}}$ ء ف = $\frac{٥ × ٢ ف^{\frac{٥}{٢}}}{٥}$ + ث = ٢ $\sqrt{ف^{٥}}$ + ث

٣ $\int \frac{٤}{\sqrt[٥]{س^{٣}}}$ ء س = $\int$ ٤ س$^{-\frac{٣}{٥}}$ ء س = $\frac{٤ س^{\frac{٢}{٥}}}{\frac{٢}{٥}}$ + ث = ١٠ س$^{\frac{٢}{٥}}$ + ث

٤ $\int \frac{١}{س^{٣} \sqrt{س}}$ ء س = $\int$ س$^{-٣}$ × س$^{-\frac{١}{٢}}$ ء س = $\int$ س$^{\frac{-٧}{٢}}$ ء س = $\frac{س^{\frac{-٥}{٢}}}{\frac{-٥}{٢}}$ + ث = $\frac{-٢}{٥ \sqrt{س^{٥}}}$ + ث

مثال ٣

أوجد :

١ $\int (٣س^{٢} - ٤س + ٥)\, ءس$

٢ $\int \left(٨ + \sqrt{س} + \frac{١}{\sqrt{س}}\right) ءس$

٣ $\int \left(٢س\sqrt{س} - \frac{٤}{٣\sqrt{س}} + ٨س^{-\frac{٧}{٤}} - ١\right) ءس$

الحل

١ $\int (٣س^{٢} - ٤س + ٥)\, ءس = \frac{٣س^{٣}}{٣} - \frac{٤س^{٢}}{٢} + ٥س + ث = س^{٣} - ٢س^{٢} + ٥س + ث$

٢ $\int \left(٨ + \sqrt{س} + \frac{١}{\sqrt{س}}\right) ءس = \int (٨ + س^{\frac{١}{٢}} + س^{-\frac{١}{٢}})\, ءس = ٨س + \frac{س^{\frac{٣}{٢}}}{\frac{٣}{٢}} + \frac{س^{\frac{١}{٢}}}{\frac{١}{٢}} + ث$

$= ٨س + \frac{٢}{٣}س^{\frac{٣}{٢}} + ٢س^{\frac{١}{٢}} + ث$

٣ $\int \left(٢س\sqrt{س} - \frac{٤}{٣\sqrt{س}} + ٨س^{-\frac{٧}{٤}} - ١\right) ءس = \int \left(٢س^{\frac{٣}{٢}} - \frac{٤}{٣}س^{-\frac{١}{٢}} + ٨س^{-\frac{٧}{٤}} - ١\right) ءس$

$= \frac{٢س^{\frac{٥}{٢}}}{\frac{٥}{٢}} - \frac{٤س^{\frac{١}{٢}}}{٣ \times \frac{١}{٢}} + \frac{٨س^{-\frac{٧}{٤}+١}}{-\frac{٧}{٤}+١} - س + ث$

$= \frac{٤}{٥}س^{\frac{٥}{٢}} - \frac{٨}{٣}س^{\frac{١}{٢}} - \frac{٣٢}{٣}س^{\frac{-٣}{٤}} - س + ث$

مثال ٤

أوجد :

١ $\int (س - ٢)(س + ١)\, ءس$

٢ $\int س(٢س - ٣)^{٢}\, ءس$

٣ $\int \left(س - \frac{١}{س}\right)^{٢} ءس$

٤ $\int \frac{س^{٤} - ٢س^{٢} + ٦}{س^{٢}}\, ءس$

٥ $\int \frac{س^{٢} - ٥س - ٦}{س + ١}\, ءس$

٦ $\int \frac{س^{٣} - ٨}{س - ٢}\, ءس$

الحل

١ $\int (س - ٢)(س + ١)\, ءس = \int (س^{٢} - س - ٢)\, ءس = \frac{١}{٣}س^{٣} - \frac{١}{٢}س^{٢} - ٢س + ث$

٢ $\int س(٢س - ٣)^{٢}\, ءس = \int س(٤س^{٢} - ١٢س + ٩)\, ءس = \int (٤س^{٣} - ١٢س^{٢} + ٩س)\, ءس$

$= س^{٤} - ٤س^{٣} + \frac{٩}{٢}س^{٢} + ث$

٣ $\int \left(س - \frac{١}{س}\right)^{٢} ءس = \int \left(س^{٢} - ٢ + \frac{١}{س^{٢}}\right) ءس$

$= \int (س^{٢} - ٢ + س^{-٢})\, ءس$

$= \frac{١}{٣}س^{٣} - ٢س - \frac{١}{س} + ث$

٤ $\int \frac{س^{٤} - ٢س^{٢} + ٦}{س^{٢}}\, ءس = \int (س^{٢} - ٢ + ٦س^{-٢})\, ءس$

$= \frac{١}{٣}س^{٣} - ٢س + \frac{٦س^{-١}}{-١} + ث$

$= \frac{١}{٣}س^{٣} - ٢س - \frac{٦}{س} + ث$

> **لاحظ أنه :**
> لا توجد قاعدة عامة لإيجاد تكامل حاصل ضرب دالتين أو خارج قسمتهما لذلك نلجأ إلى إجراء عملية الضرب أو القسمة أولًا قبل إجراء عملية التكامل.

5 $\int \frac{س^2 - 5س - 6}{س + 1} \, ءس = \int \frac{(س + 1)(س - 6)}{(س + 1)} \, ءس = \int (س - 6) \, ءس = \frac{س^2}{2} - 6س + ث$

6 $\int \frac{س^3 - 8}{س - 2} \, ءس = \int \frac{(س - 2)(س^2 + 2س + 4)}{(س - 2)} \, ءس$

$= \int (س^2 + 2س + 4) \, ءس = \frac{س^3}{3} + \frac{2س^2}{2} + 4س + ث$

$= \frac{1}{3} س^3 + س^2 + 4س + ث$

بعض قواعد التكامل

1 $\int (أس + ب)^ن \, ءس = \frac{1}{أ} \times \frac{(أس + ب)^{ن+1}}{ن + 1} + ث$

2 $\int (د(س))^ن \, د'(س) \, ءس = \frac{(د(س))^{ن+1}}{ن + 1} + ث$ حيث ث ثابت ، $ن \neq -1$

مثال 5

أوجد :

1 $\int (2س + 5)^3 \, ءس$

2 $\int [(7 - 3س)^6 + 9] \, ءس$

3 $\int \frac{8}{(3 - 2س)^5} \, ءس$

4 $\int \sqrt{4س + 1} \, ءس$

5 $\int \frac{ءس}{\sqrt{4س + 1}}$

6 $\int \sqrt{س - 4} \, (س - 4)^7 \, ءس$

الحل

1 $\int (2س + 5)^3 \, ءس = \frac{(2س + 5)^4}{4 \times 2} + ث = \frac{1}{8} (2س + 5)^4 + ث$

2 $\int [(7 - 3س)^6 + 9] \, ءس = \frac{(7 - 3س)^7}{7 \times -3} + 9س + ث = \frac{-1}{21} (7 - 3س)^7 + 9س + ث$

3 $\int \frac{8}{(3 - 2س)^5} \, ءس = \int 8 (3 - 2س)^{-5} \, ءس = \frac{8 (3 - 2س)^{-4}}{-4 \times -2} + ث = (3 - 2س)^{-4} + ث$

4 $\int \sqrt{4س + 1} \, ءس = \int (4س + 1)^{\frac{1}{2}} \, ءس = \frac{(4س + 1)^{\frac{3}{2}}}{4 \times \frac{3}{2}} + ث = \frac{1}{6} (4س + 1)^{\frac{3}{2}} + ث$

5 $\int \frac{ءس}{\sqrt{4س + 1}} = \int (4س + 1)^{-\frac{1}{2}} \, ءس = \frac{(4س + 1)^{\frac{1}{2}}}{4 \times \frac{1}{2}} + ث = \frac{1}{2} (4س + 1)^{\frac{1}{2}} + ث$

6 $\int \sqrt{س - 4} \, (س - 4)^7 \, ءس = \int (س - 4)^{\frac{1}{2}} (س - 4)^7 \, ءس = \int (س - 4)^{7.5} \, ءس$

$= \frac{(س - 4)^{8.5}}{8.5} + ث$

مثال ٦

أوجد : ١ $\int$ س (س^{٢} + ٥)^{٧} ء س

٢ $\int$ (٢ س^{٣} − ١٠ س + ١)^{٩} (٣ س^{٢} − ٥) ء س

٣ $\int \frac{\text{س}^{٤}}{(\text{س}^{٥} + ١)^{٧}}$ ء س

٤ $\int \frac{\text{س}^{٢} + ١}{(\text{س}^{٣} + ٣\text{س})^{٦}}$ ء س

٥ $\int$ س (٦ س^{٣} − ٣ س^{٢} + ٧)^{٧} (٣ س − ١) ء س

الحـــل

١ بفرض أن : د (س) = س^{٢} + ٥ ∴ دَ (س) = ٢ س

∴ $\int$ س (س^{٢} + ٥)^{٧} ء س = $\frac{١}{٢}$ $\int$ (٢ س) (س^{٢} + ٥)^{٧} ء س = $\frac{١}{٢}$ × $\frac{(\text{س}^{٢} + ٥)^{٨}}{٨}$ + ث

= $\frac{١}{١٦}$ (س^{٢} + ٥)^{٨} + ث

٢ بفرض أن د (س) = ٢ س^{٣} − ١٠ س + ١ ∴ دَ (س) = ٦ س^{٢} − ١٠ = ٢ (٣ س^{٢} − ٥)

∴ $\int$ (٢ س^{٣} − ١٠ س + ١)^{٩} (٣ س^{٢} − ٥) ء س

= $\frac{١}{٢}$ $\int$ (٢ س^{٣} − ١٠ س + ١)^{٩} × ٢ (٣ س^{٢} − ٥) ء س

= $\frac{١}{٢}$ × $\frac{(٢\text{س}^{٣} - ١٠\text{س} + ١)^{١٠}}{١٠}$ + ث = $\frac{١}{٢٠}$ (٢ س^{٣} − ١٠ س + ١)^{١٠} + ث

٣ بفرض أن : د (س) = س^{٥} + ١ ∴ دَ (س) = ٥ س^{٤}

∴ $\int \frac{\text{س}^{٤}}{(\text{س}^{٥} + ١)^{٧}}$ ء س = $\int$ س^{٤} (س^{٥} + ١)$^{-٧}$ ء س = $\frac{١}{٥}$ $\int$ ٥ س^{٤} (س^{٥} + ١)$^{-٧}$ ء س

= $\frac{١}{٥}$ × $\frac{(\text{س}^{٥} + ١)^{-٦}}{-٦}$ + ث

= $\frac{-١}{٣٠}$ (س^{٥} + ١)$^{-٦}$ + ث

٤ بفرض أن : د (س) = س^{٣} + ٣ س ∴ دَ (س) = ٣ س^{٢} + ٣ = ٣ (س^{٢} + ١)

∴ $\int \frac{\text{س}^{٢} + ١}{(\text{س}^{٣} + ٣\text{س})^{٦}}$ ء س = $\int$ (س^{٢} + ١) (س^{٣} + ٣ س)$^{-٦}$ ء س

= $\frac{١}{٣}$ $\int$ ٣ (س^{٢} + ١) (س^{٣} + ٣ س)$^{-٦}$ ء س

= $\frac{١}{٣}$ × $\frac{(\text{س}^{٣} + ٣\text{س})^{-٥}}{-٥}$ + ث = $\frac{-١}{١٥}$ (س^{٣} + ٣ س)$^{-٥}$ + ث

٥ بفرض أن : د (س) = ٦ س^{٣} − ٣ س^{٢} + ٧ ∴ دَ (س) = ١٨ س^{٢} − ٦ س = ٦ س (٣ س − ١)

∴ $\int$ س (٦ س^{٣} − ٣ س^{٢} + ٧)^{٧} (٣ س − ١) ء س

= $\frac{١}{٦}$ $\int$ (٦ س^{٣} − ٣ س^{٢} + ٧)^{٧} × ٦ س (٣ س − ١) ء س

= $\frac{١}{٦}$ × $\frac{(٦\text{س}^{٣} - ٣\text{س}^{٢} + ٧)^{٨}}{٨}$ + ث = $\frac{١}{٤٨}$ (٦ س^{٣} − ٣ س^{٢} + ٧)^{٨} + ث

مثال ٧

أوجد :

١ $\int \text{س}^{٦} \left(٣ - \frac{٢}{\text{س}}\right)^{٦} \text{ء س}$

٢ $\int \left(\text{س} \sqrt{\frac{٣}{\text{س}} - \frac{٢}{\text{س}^{٢}}}\right) \text{ء س}$

٣ $\int \text{س} (\text{س} + ٤)^{٨} \text{ء س}$

٤ $\int \text{س}^{١٠} \left(\frac{١}{\text{س}} + \frac{١}{\text{س}^{٢}}\right)^{٧} \text{ء س}$

٥ $\int \frac{\text{س} + ٣}{\sqrt{\text{س} - ١}} \text{ء س}$

٦ $\int \frac{٢\text{س} - ١}{(٢\text{س} + ٣)^{٤}} \text{ء س}$

الحل

١ $\int \text{س}^{٦} \left(٣ - \frac{٢}{\text{س}}\right)^{٦} \text{ء س} = \int \left(\text{س}\left(٣ - \frac{٢}{\text{س}}\right)\right)^{٦} \text{ء س} = \int (٣\text{س} - ٢)^{٦} \text{ء س}$

$= \frac{(٣\text{س} - ٢)^{٧}}{٧ \times ٣} + \text{ث}$

$= \frac{١}{٢١} (٣\text{س} - ٢)^{٧} + \text{ث}$

٢ $\int \left(\text{س} \sqrt{\frac{٣}{\text{س}} - \frac{٢}{\text{س}^{٢}}}\right) \text{ء س} = \int \sqrt{\text{س}^{٢} \left(\frac{٣}{\text{س}} - \frac{٢}{\text{س}^{٢}}\right)} \text{ء س} = \int \sqrt{٣\text{س} - ٢} \text{ ء س}$

$= \int (٣\text{س} - ٢)^{\frac{١}{٢}} \text{ء س} = \frac{(٣\text{س} - ٢)^{\frac{٣}{٢}}}{\frac{٣}{٢} \times ٣} + \text{ث}$

$= \frac{٢}{٩} (٣\text{س} - ٢)^{\frac{٣}{٢}} + \text{ث}$

٣ $\int \text{س} (\text{س} + ٤)^{٨} \text{ء س} = \int (\text{س} + ٤ - ٤)(\text{س} + ٤)^{٨} \text{ء س}$

$= \int (\text{س} + ٤)^{٩} \text{ء س} - ٤ \int (\text{س} + ٤)^{٨} \text{ء س}$

$= \frac{(\text{س} + ٤)^{١٠}}{١٠} - ٤ \times \frac{(\text{س} + ٤)^{٩}}{٩} + \text{ث}$

$= \frac{١}{١٠} (\text{س} + ٤)^{١٠} - \frac{٤}{٩} (\text{س} + ٤)^{٩} + \text{ث}$

٤ $\int \text{س}^{١٠} \left(\frac{١}{\text{س}} + \frac{١}{\text{س}^{٢}}\right)^{٧} \text{ء س} = \int \text{س} \times \text{س}^{١٤} \left(\frac{١}{\text{س}} + \frac{١}{\text{س}^{٢}}\right)^{٧} \text{ء س}$

$= \int \text{س} \left[\text{س}^{٢} \left(\frac{١}{\text{س}} + \frac{١}{\text{س}^{٢}}\right)\right]^{٧} \text{ء س}$

$= \int \text{س} (\text{س} + ١)^{٧} \text{ء س}$

$= \int (\text{س} + ١ - ١)(\text{س} + ١)^{٧} \text{ء س}$

$= \int (\text{س} + ١)^{٨} \text{ء س} - \int (\text{س} + ١)^{٧} \text{ء س}$

$= \frac{١}{٩} (\text{س} + ١)^{٩} - \frac{١}{٨} (\text{س} + ١)^{٨} + \text{ث}$

٥ $\int \frac{س + ٣}{\sqrt{س - ١}} ءس = \int (س + ٣)(س - ١)^{-\frac{١}{٢}} ءس$

$= \int (س - ١ + ٤)(س - ١)^{-\frac{١}{٢}} ءس$

$= \int (س - ١)^{\frac{١}{٢}} ءس + ٤ \int (س - ١)^{-\frac{١}{٢}} ءس$

$= \frac{(س - ١)^{\frac{٣}{٢}}}{\frac{٣}{٢}} + ٤ \times \frac{(س - ١)^{\frac{١}{٢}}}{\frac{١}{٢}} + ث$

$= \frac{٢}{٣} (س - ١)^{\frac{٣}{٢}} + ٨ (س - ١)^{\frac{١}{٢}} + ث$

٦ $\int \frac{٢س - ١}{(٢س + ٣)^{٤}} ءس = \int (٢س - ١)(٢س + ٣)^{-٤} ءس$

$= \int (٢س + ٣ - ٤)(٢س + ٣)^{-٤} ءس$

$= \int (٢س + ٣)^{-٣} ءس - ٤ \int (٢س + ٣)^{-٤} ءس$

$= \frac{(٢س + ٣)^{-٢}}{-٢ \times ٢} - ٤ \times \frac{(٢س + ٣)^{-٣}}{-٣ \times ٢} + ث$

$= -\frac{١}{٤} (٢س + ٣)^{-٢} + \frac{٢}{٣} (٢س + ٣)^{-٣} + ث$

ملاحظة

* $\frac{ء}{ءس} \int د(س) ءس = د(س)$ بينما $\int \frac{ء}{ءس} [د(س)] ءس = د(س) + ث$

فمثلًا : $\frac{ء}{ءس} \int س^{٥} ءس = س^{٥}$ بينما $\int \frac{ء}{ءس} (س^{٥}) ءس = س^{٥} + ث$

تكامل بعض الدوال المثلثية

علمنا من دراستنا السابقة لاشتقاق الدوال المثلثية أنه :

* إذا كانت $ص = جتا س$ فإن : $\frac{ءص}{ءس} = - جا س$

* إذا كانت $ص = جا س$ فإن : $\frac{ءص}{ءس} = جتا س$

* إذا كانت $ص = ظا س$ فإن : $\frac{ءص}{ءس} = قا^{٢} س$

وحيث إن عملية التكامل هي عملية الحصول على الدالة الأصلية من مشتقتها فإنه يمكن استنتاج التكاملات الآتية :

١ $\int جا س ءس = - جتا س + ث$

٢ $\int جتا س ءس = جا س + ث$ حيث ث ثابت اختيارى

٣ $\int قا^{٢} س ءس = ظا س + ث$

وبالمثل يمكن استنتاج النتائج التالية

نتائج هامة

١ $\int \text{جا}(\text{أ}\text{س}+\text{ب})\,\text{ء}\text{س} = -\frac{1}{\text{أ}}\,\text{جتا}(\text{أ}\text{س}+\text{ب}) + \text{ث}$

٢ $\int \text{جتا}(\text{أ}\text{س}+\text{ب})\,\text{ء}\text{س} = \frac{1}{\text{أ}}\,\text{جا}(\text{أ}\text{س}+\text{ب}) + \text{ث}$

٣ $\int \text{قا}^2(\text{أ}\text{س}+\text{ب})\,\text{ء}\text{س} = \frac{1}{\text{أ}}\,\text{ظا}(\text{أ}\text{س}+\text{ب}) + \text{ث}$

حيث ث ثابت اختيارى

وبرهان كل من الحالات السابقة ينتج مباشرة بمفاضلة الطرف الأيسر.

مثال ٨

أوجد :

١ $\int \text{جتا}(5\text{س}+6)\,\text{ء}\text{س}$

٢ $\int \text{جا}\left(\frac{\text{س}}{2}+3\right)\text{ء}\text{س}$

٣ $\int \left(5\,\text{جتا}\,\text{س} - 7\,\text{جا}\,\frac{\text{س}}{2}\right)\text{ء}\text{س}$

٤ $\int \left(3 - \text{س} + \text{قا}^2\,\frac{1}{4}\text{س}\right)\text{ء}\text{س}$

٥ $\int \left(3\text{س}^2 + \frac{1}{\text{جتا}^2\text{س}} + \text{جا}\,\frac{\pi}{6}\right)\text{ء}\text{س}$

٦ $\int (1+\text{قا}\,\text{س})(1-\text{قا}\,\text{س})\,\text{ء}\text{س}$

الحل

١ $\int \text{جتا}(5\text{س}+6)\,\text{ء}\text{س} = \frac{1}{5}\,\text{جا}(5\text{س}+6) + \text{ث}$

٢ $\int \text{جا}\left(\frac{\text{س}}{2}+3\right)\text{ء}\text{س} = -\frac{1}{\frac{1}{2}}\,\text{جتا}\left(\frac{\text{س}}{2}+3\right) + \text{ث} = -2\,\text{جتا}\left(\frac{\text{س}}{2}+3\right) + \text{ث}$

٣ $\int \left(5\,\text{جتا}\,\text{س} - 7\,\text{جا}\,\frac{\text{س}}{2}\right)\text{ء}\text{س} = 5\,\text{جا}\,\text{س} + 14\,\text{جتا}\,\frac{\text{س}}{2} + \text{ث}$

٤ $\int \left(3 - \text{س} + \text{قا}^2\,\frac{1}{4}\text{س}\right)\text{ء}\text{س} = 3\text{س} - \frac{1}{2}\text{س}^2 + 4\,\text{ظا}\,\frac{1}{4}\text{س} + \text{ث}$

٥ $\int \left(3\text{س}^2 + \frac{1}{\text{جتا}^2\text{س}} + \text{جا}\,\frac{\pi}{6}\right)\text{ء}\text{س}$

$= \int \left(3\text{س}^2 + \text{قا}^2\text{س} + \frac{1}{2}\right)\text{ء}\text{س}$

$= \text{س}^3 + \text{ظا}\,\text{س} + \frac{1}{2}\text{س} + \text{ث}$

> **لاحظ أن :**
> $\text{جا}\,\frac{\pi}{6} = \text{جا}\,30^\circ = \frac{1}{2}$ (مقدار ثابت)

٦ $\int (1+\text{قا}\,\text{س})(1-\text{قا}\,\text{س})\,\text{ء}\text{س} = \int (1-\text{قا}^2\text{س})\,\text{ء}\text{س} = \text{س} - \text{ظا}\,\text{س} + \text{ث}$

مثال ٩

أوجد :

١ $\int \left(\text{قا}^2\,\frac{\text{س}}{4} + \text{قا}^2\,\frac{\pi}{4}\right)\text{ء}\text{س}$

٢ $\int (5 + \text{ظا}^2\text{س})\,\text{ء}\text{س}$

٣ $\int (\text{جا}\,\text{س} + \text{جتا}\,\text{س})^2\,\text{ء}\text{س}$

٤ $\int \text{جا}^2\text{س}\,\text{ء}\text{س}$

٥ $\int (1 + \text{جتا}\,\text{س})^2\,\text{ء}\text{س}$

٦ $\int \left(\text{جتا}\,\text{س}\,\text{جتا}\,\frac{\pi}{3} + \text{جا}\,\text{س}\,\text{جا}\,\frac{\pi}{3}\right)\text{ء}\text{س}$

الحـــل

١ $\int (قا^2 \frac{س}{4} + قا^2 \frac{\pi}{4})\, ء س$

$= \frac{1}{\frac{1}{4}} طا \frac{س}{4} + س\, قا^2 \frac{\pi}{4} + ث$

$= 4\, طا \frac{س}{4} + 2\, س + ث$

لاحظ أن :

$قا^2 \frac{\pi}{4} = قا^2 45° = (\sqrt{2})^2 = 2$ (مقدار ثابت)

٢ $\int (5 + طا^2 س)\, ء س = \int [4 + (1 + طا^2 س)]\, ء س$

$= \int (4 + قا^2 س)\, ء س$

$= 4\, س + طا س + ث$

تذكر أن

* $1 + طا^2 س = قا^2 س$
* $1 + طتا^2 س = قتا^2 س$

٣ $\int (حا س + حتا س)^2\, ء س = \int (حا^2 س + حتا^2 س + 2\, حا س\, حتا س)\, ء س$

$= \int (1 + حا 2 س)\, ء س$

$= س - \frac{1}{2} حتا 2 س + ث$

تذكر أن

* $حا^2 س + حتا^2 س = 1$
* $حا 2 س = 2\, حا س\, حتا س$

٤ $\int حا^2 س\, ء س = \int (\frac{1}{2} - \frac{1}{2} حتا 2 س)\, ء س$

$= \frac{1}{2} س - \frac{1}{4} حا 2 س + ث$

تذكر أن

$حتا 2 س = 1 - 2\, حا^2 س$

ومنها

$حا^2 س = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} حتا 2 س$

، $حتا 2 س = 2\, حتا^2 س - 1$

ومنها

$حتا^2 س = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} حتا 2 س$

٥ $\int (1 + حتا س)^2\, ء س = \int (1 + 2\, حتا س + حتا^2 س)\, ء س$

$= \int (1 + 2\, حتا س + \frac{1}{2}$

$+ \frac{1}{2} حتا 2 س)\, ء س$

$= \int (\frac{3}{2} + 2\, حتا س + \frac{1}{2} حتا 2 س)\, ء س$

$= \frac{3}{2} س + 2\, حا س + \frac{1}{4} حا 2 س + ث$

٦ $\int (حتا س\, حتا \frac{\pi}{3} + حا س\, حا \frac{\pi}{3})\, ء س$

$= \int حتا (س - \frac{\pi}{3})\, ء س$

$= حا (س - \frac{\pi}{3}) + ث$

تذكر أن

* $حتا (س \pm ص) = حتا س\, حتا ص \mp حا س\, حا ص$
* $حا (س \pm ص) = حا س\, حتا ص \pm حتا س\, حا ص$

مثال ١٠

أوجد :

١ $\int (\text{١} + \text{ظا}^{٢}\text{ س})\ \text{جتا}^{٢}\text{ س}\ \text{ءس}$

٢ $\int \text{جتا}^{٥}\text{ س جا س ءس}$

٣ $\int \text{٤ ظا س قا}^{٢}\text{ س ءس}$

٤ $\int (\text{جا س} + \text{ظا س})^{٨}\ (\text{جتا س} + \text{قا}^{٢}\text{ س})\ \text{ءس}$

الحل

١ $\int (\text{١} + \text{ظا}^{٢}\text{ س})\ \text{جتا}^{٢}\text{ س ءس} = \int \text{قا}^{٢}\text{ س جتا}^{٢}\text{ س ءس}$

$= \int (\text{قا س جتا س})^{٢}\ \text{ءس}$

$= \int \text{١ ءس} = \text{س} + \text{ث}$

٢ بوضع $\text{د (س)} = \text{جتا س}$ $\quad \therefore \text{دَ (س)} = -\text{ جا س}$

$\therefore \int \text{جتا}^{٥}\text{ س جا س ءس}$

$= -\int (\text{جتا س})^{٥}\ (-\text{ جا س})\ \text{ءس}$

$= -\dfrac{(\text{جتا س})^{٦}}{\text{٦}} + \text{ث}$

$= -\dfrac{\text{١}}{\text{٦}}\ \text{جتا}^{٦}\text{ س} + \text{ث}$

تذكر أن

$\int [\text{د (س)}]^{\text{ن}} \times \text{دَ (س) ءس} = \dfrac{[\text{د (س)}]^{\text{ن}+\text{١}}}{\text{ن} + \text{١}} + \text{ث}$

٣ بوضع $\text{د (س)} = \text{ظا س}$ $\quad \therefore \text{دَ (س)} = \text{قا}^{٢}\text{ س}$

$\therefore \int \text{٤ ظا س قا}^{٢}\text{ س ءس} = \text{٤} \int (\text{ظا س}) \times \text{قا}^{٢}\text{ س ءس}$

$= \text{٤} \times \dfrac{\text{ظا}^{٢}\text{ س}}{\text{٢}} + \text{ث} = \text{٢ ظا}^{٢}\text{ س} + \text{ث}$

٤ بوضع $\text{د (س)} = \text{جا س} + \text{ظا س}$ $\quad \therefore \text{دَ (س)} = \text{جتا س} + \text{قا}^{٢}\text{ س}$

$\therefore \int (\text{جا س} + \text{ظا س})^{٨}\ (\text{جتا س} + \text{قا}^{٢}\text{ س})\ \text{ءس} = \dfrac{\text{١}}{\text{٩}}\ (\text{جا س} + \text{ظا س})^{٩} + \text{ث}$



تمارين 15

على التكامل

📖 من أسئلة الكتاب المدرسي • فهم • تطبيق • مستويات عليا

أولًا أسئلة الاختيار من متعدد

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

تكامل بعض الدوال الجبرية

① $\int \text{س}\ \text{ء}\text{س} = \text{.............} + \text{ث}$

(أ) $\text{س}^{٢}$ (ب) $\frac{١}{٢}\ \text{س}$ (جـ) $\frac{١}{٢}\ \text{س}^{٢}$ (د) ١

② $\int \text{ص}^{٨}\ \text{ء}\text{ص} = \text{.............} + \text{ث}$

(أ) $٨\ \text{ص}^{٧}$ (ب) $\frac{١}{٩}\ \text{ص}^{٩}$ (جـ) صفر (د) $\text{ص}^{٩}$

③ $\int (\text{س} + ٢)\ \text{ء}\text{س} = \text{.............} + \text{ث}$

(أ) $٢\ \text{س}^{٢} + ٢\ \text{س}$ (ب) $\text{س}^{٢} + ٢\ \text{س}$ (جـ) $\frac{١}{٢}\ \text{س}^{٢} + ٢\ \text{س}$ (د) $(\text{س} + ٢)^{٢}$

④ $\int (-٣)\ \text{ء}\text{س} = \text{.............} + \text{ث}$

(أ) $-٣\ \text{س}$ (ب) س (جـ) $\frac{(-٣)^{٢}}{٢}$ (د) $\frac{-٣}{٢}\ \text{س}$

⑤ 📖 المشتقة العكسية للدالة د : $\text{د}(\text{س}) = ٣\ \text{س}^{٢} - ٢\ \text{س} + ٥$ هي ....

(أ) $٦\ \text{س} - ٢$ (ب) $٣\ \text{س}^{٢} - ٢\ \text{س} + ٥$

(جـ) $\text{س}^{٣} - \text{س}^{٢} + ٥\ \text{س} + \text{ث}$ (د) $\frac{١}{٣}\ \text{س}^{٣} - \frac{١}{٢}\ \text{س}^{٢} + ٥\ \text{س} + \text{ث}$

⑥ $\int ٦\ \text{س}^{-٣}\ \text{ء}\text{س} = \text{.............} + \text{ث}$

(أ) $-٣\ \text{س}$ (ب) $-٣\ \text{س}^{-١}$ (جـ) $-٣\ \text{س}^{-٢}$ (د) $-١٨\ \text{س}^{-٤}$

⑦ $\int \text{س}^{\frac{٢}{٣}}\ \text{ء}\text{س} = \text{.............} + \text{ث}$

(أ) $\frac{٣}{٥}\ \text{س}^{\frac{٥}{٣}}$ (ب) $\frac{٥}{٣}\ \text{س}^{\frac{٥}{٣}}$ (جـ) $\frac{٢}{٣}\ \text{س}^{-\frac{١}{٣}}$ (د) $\text{س}^{\frac{٥}{٣}}$

⑧ $\int \frac{\text{ء}\text{س}}{٥\ \text{س}^{٤}} = \text{.............} + \text{ث}$

(أ) $\frac{٥}{\text{س}^{٥}}$ (ب) $\frac{-١}{٥\ \text{س}^{٣}}$ (جـ) $\frac{-١}{١٥\ \text{س}^{٣}}$ (د) $٥\ \text{س}^{٣}$

⑨ 📖 $\int \sqrt[٧]{\text{س}^{٥}}\ \text{ء}\text{س} = \text{.............} + \text{ث}$

(أ) $\frac{١٢}{٧}\ \text{س}^{\frac{١٢}{٧}}$ (ب) $\sqrt[٧]{\frac{\text{س}^{٦}}{٦}}$ (جـ) $\frac{١}{٦}\ \text{س}^{٦}$ (د) $\frac{٧}{١٢}\ \text{س}^{\frac{١٢}{٧}}$

(١٠) $\int ٥ \sqrt{س^٣}\ ءس =$ ....

(أ) $٢\sqrt{س^٥}$ (ب) $\frac{٥}{٢}\sqrt{س^٤}$ (جـ) $٥ س^{\frac{٥}{٢}}$ (د) $\frac{٥}{٢} س^٢$

(١١) $\int \frac{س}{\sqrt{س}}\ ءس =$ .... + ث

(أ) $\frac{١}{٢} س^{\frac{١}{٢}}$ (ب) $\frac{٢}{٣} س^{\frac{٣}{٢}}$ (جـ) $٢ س^{-\frac{١}{٢}}$ (د) $\frac{٢}{٣} س^{-\frac{٣}{٤}}$

(١٢) $\int \left(\frac{٢}{ص^٣} - \frac{٤}{ص^٥}\right) ءص =$ .... + ث

(أ) $- ص^٢ + ص^٤$ (ب) $- ص^{-٢} + ص^{-٤}$

(جـ) $\frac{٢}{٣} ص^{-٣} - \frac{٤}{٥} ص^{-٥}$ (د) $-٢ ص^{-٢} + ٤ ص^{-٤}$

(١٣) $\int (س^٢ - ٣س - ١)\ ءس =$ .... + ث

(أ) $\frac{١}{٣} س^٣ + ٣س - س$ (ب) $\frac{١}{٣} س^٣ - \frac{٣}{٢} س^٢ - س$

(جـ) $س^٣ - ٣ س^٢ - س$ (د) $\frac{١}{٣} (س^٢ - ٣س - ١)^٣$

(١٤) $\int ٢ (٣ ع^٢ - ٥)\ ءع =$ .... + ث

(أ) $(٣ ع^٢ - ٥)^٢$ (ب) $٦ ع^٢ - ١٠$ (جـ) $٢ ع^٣ - ١٠ع$ (د) $ع^٢ - ٥ ع$

(١٥) $\int (٢\sqrt{س} - ٦ س^٢)\ ءس =$ .... + ث

(أ) $\frac{٤}{٣} س^{\frac{٣}{٢}} - ٢ س^٣$ (ب) $\frac{٤}{٣} س^{٢\frac{١}{٢}} - ٢ س^٣$

(جـ) $س^{\frac{٣}{٢}} - ٣ س$ (د) $س^{-\frac{١}{٢}} - ١٢ س$

(١٦) $\int \left(٣ - \frac{١}{\sqrt{س}}\right) ءس =$ .... + ث

(أ) $٣ س - \frac{١}{٢} س^{\frac{١}{٢}}$ (ب) $\frac{٣}{٢} س^٢ - \frac{١}{س}$

(جـ) $٣ س - \frac{١}{٢ س}$ (د) $٣ س - ٢ س^{\frac{١}{٢}}$

(١٧) $\int س (س + ٣)\ ءس =$ .... + ث

(أ) $\frac{١}{٢} (س + ٣)^٢$ (ب) $\frac{١}{٣} س^٣ + \frac{٣}{٢} س^٢$

(جـ) $س^٢ + ٣ س$ (د) $س^٣ + ٣ س$

(١٨) $\int (س - ٥)(س + ١)\ ءس =$ .... + ث

(أ) $\frac{١}{٣} س^٣ - ٢ س^٢ - ٥ س$ (ب) $س^٣ - ٢ س^٢ - ٥ س$

(جـ) $\frac{٢}{٣} س^٣ - ٢ س^٢ + ٥ س$ (د) $\frac{١}{٣} س^٣ - ٢ س^٢ + ٥ س$

(١٩) $\int (س + ٢)(س - ٢)\ ءس =$ ....

(أ) $س + ٤ + ث$ (ب) $\frac{١}{٣} س^٣ - ٤ س + ث$

(جـ) $س^٣ - ٤ س + ث$ (د) $(س^٢ - ٤)^٢ + ث$

(٢٠) $\int \frac{س^{٢} + ٣ س}{س} ءس =$ ....

(أ) $س + ٣$ (ب) $\frac{١}{٢} س^{٢} + ٣ س + ث$

(جـ) $س^{٢} + ٣ س + ث$ (د) $\frac{س^{٣} + ٣ س^{٢}}{س^{٢}}$

(٢١) $\int (س^{٢} - ٢)^{٢} ءس =$ .... $+ ث$

(أ) $\frac{١}{٣} (س^{٢} - ٢)^{٣}$ (ب) $٢ (س^{٢} - ٢) (٢ س)$

(جـ) $\frac{١}{٥} س^{٥} - \frac{٤}{٣} س^{٣} + ٤ س$ (د) $س^{٤} - ٤ س^{٢} + ٤$

(٢٢) $\int (\sqrt{س} - ١)^{٢} ءس =$ .... $+ ث$

(أ) $\frac{١}{٣} (\sqrt{س} - ١)$ (ب) $\frac{١}{٢} س^{٢} - \frac{٤}{٣} س^{\frac{٣}{٢}} + س$

(جـ) $\frac{١}{٣} (\sqrt{س} - ١)^{٣}$ (د) $\frac{١}{٢} س^{٢} + \frac{٤}{٣} س^{\frac{٣}{٢}}$

(٢٣) $\int (س - \frac{١}{س}) (س + \frac{١}{س}) (س^{٢} + \frac{١}{س^{٢}}) ءس =$ .... $+ ث$

(أ) $س^{٥} + س^{-٣}$ (ب) $س^{٤} - \frac{١}{س^{٤}}$

(جـ) $\frac{١}{٥} س^{٥} + \frac{١}{٣} س^{-٣}$ (د) $س^{٥} + \frac{١}{٣} س^{-٣}$

(٢٤) $\int \frac{٢ س^{٢} + ٣}{س^{٢}} ءس =$ .... $+ ث$

(أ) $٢ س - ٣$ (ب) $\frac{١}{٢} س^{٢} - ٣ س^{-١}$

(جـ) $س^{٢} - ٣ س$ (د) $٢ س - ٣ س^{-١}$

(٢٥) $\int \frac{س^{٢} - ١}{س - ١} ءس =$ .... $+ ث$

(أ) $س + ١$ (ب) $\frac{١}{٢} س^{٢} + س$ (جـ) $س^{٢} + س$ (د) $س^{٢} + ٢ س$

(٢٦) $\int \frac{س^{٣} - س}{س^{٢} + س} ءس =$ .... $+ ث$

(أ) $\frac{١}{٢} س^{٢} - س$ (ب) $س^{٢} - س$ (جـ) $\frac{٣}{٢} س^{٢} - \frac{١}{٢} س$ (د) $٢ س^{٢} + ١$

(٢٧) $\int \frac{س^{٣} + ٨}{س^{٢} - ٢ س + ٤} ءس =$ .... $+ ث$

(أ) $\frac{١}{٤} (س + ٢)^{٤}$ (ب) $س + ٢$ (جـ) $\frac{١}{٢} س^{٢} + ٢ س$ (د) $\frac{١}{٢} (س + ٢)^{٢}$

(٢٨) $\int (٨ - ٣ س)^{٤} ءس =$ .... $+ ث$

(أ) $\frac{١}{١٥} (٨ - ٣ س)^{٥}$ (ب) $\frac{١}{٥} (٨ - ٣ س)^{٥}$

(جـ) $-\frac{١}{٥} (٨ - ٣ س)^{٥}$ (د) $-\frac{١}{١٥} (٨ - ٣ س)^{٥}$

(٢٩) $\int$ (٢ س + ١)^{٥} ءس = ... + ث

(أ) (٢ س + ١)^{٦} (ب) $\frac{١}{٢}$ (٢ س + ١)^{٦}

(جـ) $\frac{١}{١٢}$ (٢ س + ١)^{٦} (د) $\frac{١}{٦}$ (٢ س + ١)^{٦}

(٣٠) $\int$ د (س) . دَ (س) ءس = ... + ث

(أ) د (س) (ب) $\frac{١}{٢}$ [د (س)]^{٢} (جـ) $\frac{١}{٢}$ د (س) (د) (د (س))^{٢}

(٣١) $\int$ (س − ٢) (س^{٢} + ٢ س + ٤) ءس = ... + ث

(أ) $\frac{١}{٤}$ س^{٤} − ٤ س^{٢} − ٨ س (ب) $\frac{١}{٣}$ س^{٣} + س^{٢} + ٤ س

(جـ) $\frac{١}{٤}$ س^{٤} − ٨ س (د) س^{٣} − ٨

(٣٢) $\int$ (س − ١) (س^{٢} − ٢ س + ١) ءس = ... + ث

(أ) $\frac{١}{٤}$ (س − ١)^{٤} (ب) $\frac{١}{٣}$ س^{٣} − س^{٢} + س

(جـ) $\frac{١}{٤}$ س^{٤} − س (د) س^{٤} − ٤ س

(٣٣) $\int \frac{١٢}{(٢ س − ٥)^{٤}}$ ءس = ... + ث

(أ) $\frac{-١}{(٢ س − ٥)^{٣}}$ (ب) $\frac{٦}{(٢ س − ٥)^{٣}}$ (جـ) $\frac{٢}{(٢ س − ٥)^{٣}}$ (د) $\frac{-٢}{(٢ س − ٥)^{٣}}$

(٣٤) $\int$ س^{٥} (١ + $\frac{٣}{س}$)^{٥} ءس = ... + ث

(أ) (س + ٣)^{٥} (ب) $\frac{١}{٦}$ (س + ٣)^{٦}

(جـ) $\frac{١}{٦}$ (١ + $\frac{٣}{س}$)^{٦} (د) $\frac{١}{٣٦}$ س^{٦} (١ + $\frac{٣}{س}$)^{٦}

(٣٥) $\int$ س^{٥} $\sqrt[٥]{\frac{٦}{س^{٤}} + \frac{٣}{س^{٥}}}$ ءس = ... + ث

(أ) $\frac{٥}{٣٦}$ (٦ س + ٣)$^{\frac{٦}{٥}}$ (ب) $\sqrt{٦ س + ٣}$

(جـ) ٤ (٦ س + ٣)$^{\frac{٢}{٣}}$ (د) $\frac{٧}{٣٦}$ (٦ س + ٣)$^{\frac{٥}{٩}}$

(٣٦) $\int$ ٤ س (٢ س^{٢} − ١)^{٣} ءس = ... + ث

(أ) $\frac{١}{٢}$ س^{٢} (٢ س^{٢} − ١)^{٤} (ب) $\frac{١}{٤}$ (٢ س^{٢} − ١)^{٤}

(جـ) س^{٢} (٢ س^{٢} − ١)^{٤} (د) $\frac{١}{٤}$ (٢ س − ١)^{٤}

(٣٧) $\int$ (٣ س^{٢} + ١) (س^{٣} + س + ٨)^{٥} ءس = ... + ث

(أ) $\frac{١}{٢}$ (س^{٣} + س + ٨)^{٦} (ب) (٣ س^{٢} + ١)^{٢} (س^{٣} + س + ٨)^{٦}

(جـ) $\frac{١}{٦}$ (س^{٣} + س + ٨)^{٦} (د) $\frac{١}{٥}$ (س^{٣} + س + ٨)^{٦}

(٣٨) $\int$ س^{٢} (٢ س^{٣} + ٨)^{٤} ءس = ... + ث

(أ) $\frac{١}{٣٠}$ (٢ س^{٣} + ٨)^{٥}
(ب) $\frac{١}{٦}$ (٢ س^{٣} + ٨)^{٥}
(جـ) (٢ س^{٣} + ٨)^{٥}
(د) $\frac{١}{٢٠}$ س^{٤} (٢ س^{٣} + ٨)^{٥}

(٣٩) $\int \frac{\text{س} - \frac{١}{٢}}{\sqrt{\text{س}^{٢} - \text{س}}}$ ءس = ... + ث

(أ) $\frac{١}{٦}$ $\sqrt{\text{٢س} - ١}$
(ب) $\frac{١}{٦}$ $\sqrt{(\text{٢س} - ١)^{٣}}$
(جـ) $\frac{١}{٦\sqrt{\text{٢س} - ١}}$
(د) $\frac{١}{٢}$ $\sqrt{(\text{٢س} - ١)^{٣}}$

(٤٠) $\int \frac{ء}{\text{ءس}}$ [د (س)] ءس = ...

(أ) د (س)
(ب) د (س) + ث
(جـ) $\frac{ء}{\text{ءس}}$ [د (س)]
(د) $\int$ د (س) ءس

(٤١) إذا كان : $\int$ س^{ك} ءس = $\frac{١}{٣}$ س^{٣} + ث فإن : ك = ...

(أ) -١ (ب) ١ (جـ) ٢ (د) ٣

(٤٢) إذا كان : $\int$ س^{٣} ءس = أ س^{٤} + ث فإن : أ = ...

(أ) ٤ (ب) ٣ (جـ) $\frac{١}{٣}$ (د) $\frac{١}{٤}$

(٤٣) إذا كان : $\int$ س $\sqrt{\text{س}^{٢} - ١٥}$ ءس = أ $\sqrt{(\text{س}^{٢} - ١٥)^{٣}}$ + ث فإن : أ = ...

(أ) $\frac{١}{٣}$ (ب) ٣ (جـ) $\frac{٣}{٢}$ (د) $\frac{١}{٢}$

(٤٤) $\int$ (س^{٢} + ٤ س + ٤)^{٥} ءس = ... + ث

(أ) $\frac{١}{٦}$ (س^{٢} + ٤ س + ٤)^{٦}
(ب) ٦ (س^{٢} + ٤ س + ٤)^{٥}
(جـ) $\frac{١}{١١}$ (س + ٢)^{١١}
(د) ١١ (س + ٢)^{١١}

(٤٥) $\int$ س (س + ٣)^{٥} ءس = ... + ث

(أ) $\frac{١}{٦}$ (س + ٣)^{٦}
(ب) $\frac{١}{١٨}$ (س + ٣)^{٦}
(جـ) $\frac{١}{٧}$ (س + ٣)^{٧} - $\frac{١}{٢}$ (س + ٣)^{٦}
(د) $\frac{١}{٦}$ (س + ٣)^{٦} - $\frac{١}{٥}$ (س + ٣)^{٥}

(٤٦) $\int$ (س - ١) (س + ٤)^{٨} ءس = ... + ث

(أ) $\frac{١}{١٠}$ (س + ٤)^{١٠} - $\frac{٥}{٩}$ (س + ٤)^{٩}
(ب) - $\frac{١}{١٠}$ (س + ٤)^{٩} - $\frac{٣}{٤}$ (س + ٤)^{٨}
(جـ) $\frac{١}{٢}$ (س - ١)^{٢} + $\frac{١}{٩}$ (س + ٤)^{٩}
(د) (س + ٤)^{٩} - ٥ (س + ٤)^{٣}

(٤٧) $\int$ س $\sqrt{\text{س} - ٢}$ ءس = ... + ث

(أ) $\frac{٣}{٢}$ س^{٢} (س - ٢)$^{\frac{٣}{٢}}$
(ب) $\frac{٢}{٥}$ (س - ٢)$^{\frac{٥}{٢}}$ + $\frac{٤}{٣}$ (س - ٢)$^{\frac{٣}{٢}}$
(جـ) $\frac{٥}{٢}$ (س - ٢)$^{\frac{٥}{٢}}$ + $\frac{٣}{٤}$ (س - ٢)$^{\frac{٣}{٢}}$
(د) $\frac{٢}{٣}$ س^{٢} (س - ٢)$^{\frac{٣}{٢}}$

(٤٨) $\int \frac{س + ٣}{\sqrt{س - ١}}$ ؤس = ... + ث

(أ) $\frac{٢}{٣}$ (س − ١)$^{\frac{٣}{٢}}$ + ٨ (س − ١)$^{\frac{١}{٢}}$
(ب) $\frac{١}{٢}$ (س + ٣)^{٢} − $\frac{٣}{٢}$ (س − ١)$^{-\frac{٣}{٢}}$
(جـ) $\frac{-٢}{٣}$ (س − ١)$^{\frac{٣}{٢}}$ + ٨ (س − ١)$^{\frac{١}{٢}}$
(د) $\frac{٣}{٢}$ (س − ١)$^{\frac{٣}{٢}}$ + ٨ (س − ١)$^{\frac{١}{٢}}$

تكامل بعض الدوال المثلثية

(٤٩) $\int$ حتا ٤ س ؤس = ... + ث

(أ) $\frac{١}{٤}$ حا ٤ س
(ب) $\frac{١}{٢}$ حتا ٢ س
(جـ) $\frac{١}{٤}$ حتا^{٢} ٤ س
(د) ٤ حا ٤ س

(٥٠) $\int$ حا ٣ س ؤس = ... + ث

(أ) $\frac{١}{٣}$ قا^{٢} ٣ س
(ب) $\frac{-١}{٣}$ حتا ٣ س
(جـ) $\frac{١}{٣}$ حتا ٣ س
(د) $\frac{١}{٣}$ حا ٣ س

(٥١) $\int$ قا^{٢} (٥ س) ؤس = ... + ث

(أ) $\frac{١}{١٥}$ قا^{٣} ٥ س
(ب) $\frac{١}{٢}$ طا^{٢} ٢ س
(جـ) $\frac{١}{٥}$ طا ٥ س
(د) $\frac{١}{٥}$ طتا ٥ س

(٥٢) $\int$ (حا^{٢} س + حتا^{٢} س)^{٧} ؤس = ... + ث

(أ) س
(ب) ٢ حا ٢ س
(جـ) $\frac{١}{٨}$ س^{٨}
(د) $\frac{١}{٣}$ حا^{٣} س + $\frac{١}{٣}$ حتا^{٣} س

(٥٣) 📖 $\int$ حا (٣ س − ٥) ؤس = ... + ث

(أ) − حتا (٣ س − ٥)
(ب) −٣ حتا (٣ س − ٥)
(جـ) − $\frac{١}{٣}$ حتا (٣ س − ٥)
(د) − $\frac{٢}{٣}$ حتا (٣ س − ٥)

(٥٤) 📖 $\int$ (س − حاس) ؤس = ... + ث

(أ) ٣ حا ($\frac{س}{٢}$ − ٢)
(ب) $\frac{١}{٢}$ س^{٢} + حتاس
(جـ) $\frac{١}{٢}$ س^{٢} − حتاس
(د) ١ + حتاس

(٥٥) 📖 $\int$ حا ($\frac{س}{٤}$ + $\frac{\pi}{٣}$) ؤس = ... + ث

(أ) −٤ حتا ($\frac{س}{٤}$ + $\frac{\pi}{٣}$)
(ب) حتا ($\frac{س}{٤}$ + $\frac{\pi}{٣}$)
(جـ) $\frac{١}{٢}$ حتا ($\frac{س}{٤}$ + $\frac{\pi}{٣}$)
(د) −٤ حتا ($\frac{س}{٢}$ + $\frac{\pi}{٣}$)

(٥٦) $\int$ حتا ($\frac{\pi}{٢}$ + س) ؤس = ... + ث

(أ) حاس
(ب) حتاس
(جـ) − حاس
(د) − حتاس

(٥٧) $\int$ ٢ حاس حتاس ؤس = ... + ث

(أ) $\frac{١}{٢}$ حا ٢ س
(ب) $\frac{-١}{٢}$ حتا ٢ س
(جـ) − حتا ٢ س
(د) حا ٢ س

(٥٨) $\int$ (قا² $(\frac{\pi}{4})$) ء س = ... + ث

(أ) س (ب) ٢ س (جـ) طا س (د) طا $\frac{\pi}{4}$

(٥٩) $\int$ (حا س قتا س + حتا س قا س + طا س طتا س) ء س = ... + ث

(أ) ٣ (ب) ٣ س

(جـ) حتا س − حا س + قا² س (د) $\frac{1}{2}$ حا² س + $\frac{1}{2}$ حتا² س + $\frac{1}{2}$ قا² س

(٦٠) إذا كان : $\int$ حا س ء س = د (س) فإن : دَ (س) = ...

(أ) حا س (ب) − حا س (جـ) حتا س (د) − حتا س

(٦١) 📖 $\int$ (حتا² س − حا² س) ء س = ... + ث

(أ) $\frac{1}{3}$ حتا³ س − $\frac{1}{3}$ حا³ س (ب) حتا ٢ س

(جـ) $\frac{1}{2}$ حا ٢ س (د) ٢ حا ٢ س

(٦٢) $\int$ حا ٣ س حتا ٣ س ء س = ... + ث

(أ) حا ٣ س (ب) $\frac{1}{2}$ حا ٦ س (جـ) $\frac{1}{2}$ حا² ٣ س (د) − $\frac{1}{12}$ حتا ٦ س

(٦٣) إذا كان : $\int$ حتا (٣ س + ١) ء س = أ حا (٣ س + ١) + ث فإن : أ = ...

(أ) ٣ (ب) $\frac{1}{3}$ (جـ) ١ (د) $\frac{1}{9}$

(٦٤) $\int$ $\left(\frac{\text{طا س}}{\text{طتا س}} + 1\right)$ ء س = ... + ث

(أ) طتا س (ب) − طا س (جـ) طا س (د) − طتا س

(٦٥) $\int$ (٢ + طا² س) ء س = ... + ث

(أ) س − طا س (ب) س + طتا س (جـ) − س + طا س (د) س + طا س

(٦٦) $\int$ طتا س حا س ء س = ... + ث

(أ) − حا س (ب) حا س (جـ) حتا س (د) − حتا س

(٦٧) $\int$ (حا س + حتا س)² ء س = ... + ث

(أ) س − $\frac{1}{2}$ حتا ٢ س (ب) س + $\frac{1}{2}$ حتا² س − $\frac{1}{2}$ حا² س

(جـ) س + حا² س (د) س − حتا² س

(٦٨) $\int$ (حا² ٥ س + حتا² ٥ س + طا² ٥ س) ء س = ... + ث

(أ) $\frac{1}{5}$ قا² ٥ س (ب) س + $\frac{1}{5}$ طا ٥ س (جـ) ١ + $\frac{1}{5}$ قا² ٥ س (د) $\frac{1}{5}$ طا ٥ س

(٦٩) $\int$ (١ + طا² س) حتا³ س ء س = ... + ث

(أ) حتا س (ب) حا س (جـ) − حتا س (د) − حا س

(٧٠) $\int \frac{\text{جا س + جتا س}}{\text{١ + ظتا س}}$ ءس = ... + ث

(أ) جتا س (ب) − جتا س (جـ) جا س (د) − جا س

(٧١) $\int \frac{\text{١ − جتا}^{٢}\text{ س}}{\text{جا س}}$ ءس = ... + ث

(أ) جا س (ب) − جا س (جـ) جتا س (د) − جتا س

(٧٢) $\int \frac{\text{ء}}{\text{ءس}}$ (٥ + جا س) ءس = ...

(أ) ٥ س − جتا س (ب) ٥ س + جا س + ث

(جـ) جا س + ث (د) ٥ س − جتا س + ث

(٧٣) $\int \frac{\text{٥ + قا س}}{\text{قا س}}$ ءس = ... + ث

(أ) ٥ جا س − س (ب) −٥ جا س − س (جـ) ٢ جا س − س (د) ٥ جا س + س

(٧٤) $\int \frac{\text{جتا}^{٢}\text{ س + ٢}}{\text{جتا}^{٢}\text{ س}}$ ءس = ... + ث

(أ) س + ظا س (ب) ٢ س + ظا س (جـ) س + ٢ ظا س (د) س − ٢ ظتا س

(٧٥) $\int$ ظا^{٩} س ظتا^{٩} س ءس = ... + ث

(أ) − س + ظا س (ب) س + ظا س (جـ) س (د) − س + ظتا س

(٧٦) $\int \frac{\text{١}}{\text{جتا}^{٢}\text{ س}}$ ءس = ... + ث

(أ) ظتا س (ب) ظا س (جـ) قا^{٢} س (د) قتا^{٢} س

(٧٧) $\int$ جا^{٢} س ءس = ... + ث

(أ) $\frac{١}{٢}$ س − $\frac{١}{٤}$ جا ٢ س (ب) س − $\frac{١}{٢}$ جا ٢ س

(جـ) $\frac{١}{٤}$ جتا ٢ س + $\frac{١}{٢}$ س (د) $\frac{١}{٢}$ س − $\frac{١}{٢}$ جا ٢ س

(٧٨) $\int \frac{\text{١ + جتا}^{٢}\text{ س}}{\text{١ − جا}^{٢}\text{ س}}$ ءس = ... + ث

(أ) س + جتا س (ب) ظا س + س (جـ) قا^{٢} س + س (د) س − قا^{٢} س

(٧٩) $\int \frac{\text{جتا ٢ س}}{\text{جتا س + جا س}}$ ءس = ... + ث

(أ) جا ٢ س + جتا ٢ س (ب) ٢ جا س جتا س

(جـ) جتا س − جا س (د) جتا س + جا س

(٨٠) $\int \frac{\text{ءس}}{\text{١ + ظا}^{٢}\text{ س}}$ = ... + ث

(أ) جتا^{٢} س (ب) $\frac{١}{٤}$ جا ٢ س + $\frac{١}{٢}$ س

(جـ) ظا س + ١ (د) $\frac{١}{٢}$ جتا^{٢} س

(٨١) $\int \frac{٤}{١ + جتا ٤ س} ء س$ = ... + ث

(أ) جا ٢ س (ب) جتا ٢ س (جـ) ظا ٢ س (د) ظا س

(٨٢) $\int \frac{ظا^٣ س}{جتا^٢ س} ء س$ = ... + ث

(أ) $\frac{١}{٣}$ ظا^٣ س (ب) $\frac{١}{٤}$ ظا^٤ س (جـ) $\frac{١}{٣}$ جتا^٣ س (د) $\frac{١}{٤}$ جا^٤ س

(٨٣) $\int \frac{جا س (١ + جتا ٢ س)}{جا ٢ س} ء س$ = ... + ث

(أ) جا س (ب) جتا س (جـ) جا ٢ س (د) جتا ٢ س

(٨٤) $\int \frac{ء س}{(جتا^٢ س - جا^٢ س)^٢}$ = ... + ث

(أ) - (جتا^٢ س - جا^٢ س)$^{-١}$ (ب) قا^٢ ٢ س

(جـ) $\frac{١}{٢}$ ظا ٢ س (د) $\frac{١}{٢}$ قا^٢ ٢ س

(٨٥) $\int$ جا س جتا س جتا ٢ س ء س = ... + ث

(أ) - $\frac{١}{١٦}$ جا ٤ س (ب) - $\frac{١}{٤}$ جتا ٤ س (جـ) - $\frac{١}{١٦}$ جتا ٤ س (د) $\frac{-١}{٤}$ جا ٤ س

(٨٦) $\int$ (١ + قا س) (١ - قا س) ء س = ... + ث

(أ) س - ظا س (ب) س + ظا س (جـ) س ظا س (د) س - ظتا س

(٨٧) $\int$ (١ - جتا س) (١ + جتا س) ء س = ... + ث

(أ) جا^٢ س (ب) ١ + جتا س

(جـ) $\frac{١}{٢}$ س - $\frac{١}{٤}$ جا ٢ س (د) س + $\frac{١}{٢}$ جا ٢ س

(٨٨) $\int$ جا^{١٠٠} س × قتا^{٩٩} س ء س = ... + ث

(أ) جا س (ب) - جتا س (جـ) جا س ظا س (د) $\frac{١}{١٠١}$ جتا^{١٠١} س

(٨٩) $\int \frac{جتا س}{قتا س} ء س$ = ... + ث

(أ) $\frac{١}{٢}$ جا ٢ س (ب) - $\frac{١}{٤}$ جتا ٢ س (جـ) ٢ جا ٢ س (د) س

(٩٠) $\int \sqrt{١ - جتا^٢ س}$ ء س = ... + ث حيث س ∈] ٠ ، π[

(أ) جا س (ب) جتا س (جـ) س - جتا س (د) - جتا س

(٩١) $\int$ (جتا^٤ $\frac{س}{٢}$ - جا^٤ $\frac{س}{٢}$) ء س = ... + ث

(أ) جتا س (ب) جتا ٢ س (جـ) جا س (د) جا ٢ س

(٩٢) $\int$ جا^٣ س ء س = ... + ث

(أ) جتا^٣ س - $\frac{١}{٣}$ جتا^٣ س (ب) جتا س + $\frac{١}{٣}$ جتا^٣ س

(جـ) - جتا س + $\frac{١}{٣}$ جتا^٣ س (د) - جا س - $\frac{١}{٣}$ جا^٣ س

(٩٣) $\int$ (جاس + ظاس)^{٥} (جتاس + قا^{٢} س) ءس = ... + ث

(أ) $\frac{١}{٥}$ (جاس + ظاس)^{٥} (ب) $\frac{١}{٦}$ (جاس + ظاس)^{٦}

(جـ) $\frac{١}{٦}$ (جا^{٦} س + ظا^{٦} س) (د) $\frac{١}{٦}$ جتا^{٥} ٢س + س

(٩٤) $\int$ (جا ٢س جاس + جتا ٢س جتاس) ءس = ... + ث

(أ) ٢ جتاس (ب) − جتاس (جـ) − ٢ جاس (د) جاس

ثانيًا الأسئلة المقالية

تكامل بعض الدوال الجبرية

١ أوجد كلًا من التكاملات الآتية :

① $\int \frac{ءس}{٥}$ ② $\int$ صفر ءس ③ $\int -\frac{٨}{٥}$ ف$^{-٣}$ ءف

④ $\int \frac{١}{\sqrt[٤]{س^{٣}}}$ ءس ⑤ $\int \frac{١٢}{س\sqrt{س}}$ ءس ⑥ $\int \frac{\sqrt[٦]{ص}}{\sqrt[٣]{ص}}$ ءص

٢ أوجد كلًا من التكاملات الآتية :

① $\int$ (٤س^{٣} − ٦س^{٢} + ٨س − ٥) ءس ② $\int$ (س^{٤} − س$^{-٢}$ + ٥) ءس

③ $\int \left(\frac{٣}{س^{٣}} + \frac{٢}{س^{٢}} + ٥\right)$ ءس ④ $\int \left(٣\sqrt{س} - \frac{٢}{س^{٣}}\right)$ ءس

⑤ $\int$ (أس^{٢} + ٥س + حـ) ءس ⑥ $\int \left(\frac{٥}{٣}\sqrt[٣]{س^{٢}} + \frac{٧}{٤}\sqrt[٤]{س^{٣}}\right)$ ءس

٣ أوجد كلًا من التكاملات الآتية :

① $\int$ س^{٢} $\left(٣س - \frac{٥}{س}\right)$ ءس ② $\int$ (س − ٢) (٤س^{٢} + ١) ءس

③ $\int$ س^{٣} (٢ − س)^{٢} ءس ④ $\int$ (١ − س^{٢})^{٢} (١ + س^{٢})^{٢} ءس

⑤ $\int \left(س + \frac{١}{س}\right)^{٢}$ ءس ⑥ $\int \sqrt{س}\,(١ + \sqrt{س})$ ءس

⑦ $\int \sqrt{س}\left(س\sqrt{س} + ٢\sqrt{س} - \frac{١}{\sqrt{س}}\right)$ ءس

٤ أوجد كلًا من التكاملات الآتية :

① $\int \frac{س^{٧} - ٤س^{٥} + س^{٣}}{س^{٣}}$ ءس ② $\int \frac{س^{٢} - ٥س + ٦}{س - ٢}$ ءس

③ $\int \frac{س - ٤}{\sqrt{س} + ٢}$ ءس ④ $\int \frac{س^{٣} - ٢٧}{س - ٣}$ ءس

⑤ $\int \frac{٤\text{س}^٣ - ١٢\text{س}^٢}{\text{س} - ٣} \, \text{ءس}$

⑥ 📖 $\int \frac{(\text{س}^٢ + ٢)^٢}{\text{س}^٢} \, \text{ءس}$

⑦ $\int \frac{\text{س}^٣ + \text{س} - ٢}{\text{س} - ١} \, \text{ءس}$

⑧ $\int \frac{\text{س}^٢ - ٤}{\sqrt{\text{س}}\,(\text{س} - ٢)} \, \text{ءس}$

---

٥ أوجد كلًا مما يأتى :

① 📖 $\int ٦\,(\text{س} - ٢)^٥ \, \text{ءس}$

② 📖 $\int ٣\,(٣\text{س} + ١)^٣ \, \text{ءس}$

③ 📖 $\int (٢\text{ع} - ٣)^{\frac{٧}{٣}} \, \text{ءع}$

④ $\int \sqrt{٢\text{س} + ٧} \, \text{ءس}$

⑤ 📖 $\int (٣\text{س} + ٥)^{-٩} \, \text{ءس}$

⑥ 📖 $\int \left((٣ - ٢\text{س})^٥ + ٣\right) \, \text{ءس}$

⑦ $\int \frac{\text{ءس}}{\sqrt[٥]{٢\text{س} + ٩}}$

⑧ $\int \sqrt[٣]{(٤ - ٣\text{س})^٢} \, \text{ءس}$

---

٦ أوجد كلًا من التكاملات الآتية :

① $\int \text{س}^٦ \left(١ - \frac{٢}{\text{س}}\right)^٦ \, \text{ءس}$

② $\int \text{س} \sqrt[٣]{\frac{٢}{\text{س}^٣} - \frac{١}{\text{س}^٢}} \, \text{ءس}$

③ $\int \text{س}^{١٠} \left(\frac{٢}{\text{س}} + \frac{٣}{\text{س}^٢}\right)^٥ \, \text{ءس}$

④ $\int (٤\text{س}^٢ - ١٢\text{س} + ٩)^{\frac{٧}{٢}} \, \text{ءس}$

⑤ $\int (٤\text{س} + ٦) \sqrt{٢\text{س} + ٣} \, \text{ءس}$

⑥ 📖 $\int \sqrt{\text{س} - ٣}\,(\text{س} - ٣)^٤ \, \text{ءس}$

⑦ $\int (\text{س} + ١) \sqrt[٣]{\text{س}^٢ + ٢\text{س} + ١} \, \text{ءس}$

⑧ $\int \frac{٨ - ٢\text{س}}{\sqrt{٤ - \text{س}}} \, \text{ءس}$

---

٧ أوجد كلًا من التكاملات الآتية :

① 📖 $\int \text{س}\,(٥\text{س}^٢ + ٢)^{-٧} \, \text{ءس}$

② 📖 $\int (\text{س}^٢ - ٣\text{س} + ٥)^{-٧}\,(٢\text{س} - ٣) \, \text{ءس}$

③ 📖 $\int (٣\text{س}^٢ - ٢\text{س} + ١)^{١١}\,(٣\text{س} - ١) \, \text{ءس}$

④ 📖 $\int \text{س}\,(٤\text{س}^٣ - ٣\text{س}^٢ + ٤)^٥\,(٢\text{س} - ١) \, \text{ءس}$

⑤ $\int \text{س}^٢\,(\text{س}^٤ - \text{س}^٢ + ٨)^٩\,(٤\text{س} - ٣) \, \text{ءس}$

⑥ $\int \frac{\text{س}}{\sqrt{١ + \text{س}^٢}} \, \text{ءس}$

⑦ $\int \frac{\text{س}^٢ + ١}{(\text{س}^٣ + ٣\text{س})^٢} \, \text{ءس}$

⑧ 📖 $\int \frac{\text{س}^٣}{(\text{س}^٤ + ١)^٦} \, \text{ءس}$

---

٨ أوجد كلًا من التكاملات الآتية :

① 📖 $\int (\text{س} + ١)\,(\text{س} + ٣)^٧ \, \text{ءس}$

② $\int ٣\text{س} \sqrt[٣]{٣\text{س} + ١} \, \text{ءس}$

③ $\int (\text{س} + ٢) \sqrt{\text{س} + ١} \, \text{ءس}$

④ $\int \text{س}^{١٧} \left(\frac{١}{\text{س}} - \frac{١}{\text{س}^٢}\right)^٨ \, \text{ءس}$

⑤ 📖 $\int \frac{\text{س} + ٣}{(\text{س} - ٢)^٤} \, \text{ءس}$

⑥ $\int \frac{\text{س} + ١}{(٣\text{س} + ١)^٥} \, \text{ءس}$

⑦ $\int \frac{٣س + ٢}{\sqrt{س - ٢}} ءس$

⑧ $\int \frac{س^{٢} + ٨س}{(س + ٤)^{٥}} ءس$

⑨ $\int \frac{س^{٢} + ٣س + ٢}{(س + ٢)^{٥}} ءس$

⑩ $\int \sqrt{س^{٣} - س^{٢}} ءس$ حيث $س > ٠$

تكامل بعض الدوال المثلثية

9 أوجد كلًا من التكاملات الآتية :

① $\int جتا\left(\frac{س}{٣} - ٢\right) ءس$

② $\int قا^{٢}\left(\frac{س}{٣} - ١\right) ءس$

③ $\int (٦س + جتا ٤س) ءس$

④ $\int جتا(٢ - س) ءس$

⑤ $\int \left(٤س - جا\frac{\pi}{٣}\right) ءس$

⑥ $\int \left(\frac{\pi}{٢} - ٢ جا\frac{٣س}{٢}\right) ءس$

⑦ $\int (جتا ٣س - جاس) ءس$

⑧ $\int (٧ جاس - ٢ جتاس) ءس$

⑨ $\int ٩(جتاس - قا^{٢} ٣س) ءس$

⑩ $\int (٣ + ٥ قا^{٢} س + ٢ جا ٢س) ءس$

⑪ $\int \left(٤ جتاس + \frac{١}{جتا^{٢}س} + ١\right) ءس$

⑫ $\int \left[قا^{٢}\frac{س}{٢} - جا\left(\frac{\pi}{٤} - س\right)\right] ءس$

---

10 أوجد كلًا من التكاملات الآتية :

① $\int (جا^{٢} ٣س + جتا^{٢} ٣س + ظا^{٢} ٣س) ءس$

② $\int (١ - ٢ جا^{٢} ٣س) ءس$

③ $\int جاس جتاس ءس$

④ $\int \left(جتا\frac{س}{٢} - جا\frac{س}{٢}\right)^{٢} ءس$

⑤ $\int \left(١ + ظا^{٢}\frac{س}{٢}\right) ءس$

⑥ $\int (٣ + ٤ ظا^{٢}س) ءس$

⑦ $\int \frac{جتا^{٢}س}{١ + جاس} ءس$

⑧ $\int \frac{١ + جا^{٢}س}{١ - جا^{٢}س} ءس$

⑨ $\int \frac{جا^{٣}س + جتا^{٣}س}{جاس + جتاس} ءس$

⑩ $\int [(١ - ظاس)^{٢} + ٢ ظاس] ءس$

⑪ $\int \left(\frac{جتا^{٢}س + ١}{جتاس}\right)^{٢} ءس$

⑫ $\int \frac{٣}{جتا^{٢} ٣س} ءس$

⑬ $\int قاس (٣ جتاس - ٢ قاس) ءس$

⑭ $\int (جا ٣س جتاس - جتا ٣س جاس) ءس$

⑮ $\int \left(جتاس جتا\frac{\pi}{٤} - جاس جا\frac{\pi}{٤}\right) ءس$

---

11 أوجد كلًا من التكاملات الآتية :

① $\int ٢ جتا^{٢}س ءس$

② $\int (١ + جتاس)^{٢} ءس$

③ $\int (١ - جاس)^{٢} ءس$

④ $\int (١ + جا^{٢}س) ءس$

⑤ $\int (٤ - جا^{٢}س) ءس$

⑥ $\int (٢ جتا^{٢}س + ظا^{٢}س) ءس$

⑦ $\int (قاس + جتاس)^{٢} ءس$

⑧ $\int \left(\frac{٢}{قتا^{٢}س} - ٣ قا^{٢} ٢س\right) ءس$

١٢ أوجد كلًّا من التكاملات الآتية :

① $\int$ حا^{5} س حتا س ء س

② $\int$ ٢ طا س قا^{2} س ء س

③ $\int$ (٢ س − حا س) (س^{2} + حتا س)^{7} ء س

④ $\int$ ١٣ طا^{12} س قا^{2} س ء س

⑤ $\int$ طا^{2} س قتا^{2} س ء س

⑥ $\int$ حا س حتا س حتا ٢ س حتا ٤ س ء س

⑦ $\int$ (١ + طا^{2} ص) حتا^{2} ص ء ص

⑧ $\int$ حتا س (حا س + طا س) ء س

⑨ $\int \left(\text{قا}^{2} \frac{\pi}{4} + \frac{1 - 2\text{حا}^{2}\text{س}}{\text{ظتا ٢ س}}\right)$ ء س

⑩ $\int$ (حا^{2} س + حا^{2} س طا^{2} س) ء س

⑪ $\int \frac{\text{حتا ٤ س}}{\text{حتا ٢ س} - \text{حا ٢ س}}$ ء س

⑫ $\int \frac{\text{٢ طا}^{2}\text{س}}{1 + \text{طا}^{2}\text{س}}$ ء س

⑬ $\int \sqrt{1 + \text{حتا } 2\theta}$ ء θ حيث $\theta \in [\,0 , \frac{\pi}{4}\,]$

⑭ $\int$ ٨ حا^{2} $\frac{س}{2}$ حتا^{2} $\frac{س}{2}$ ء س

⑮ $\int$ (حتا^{2} س − حتا^{4} س) ء س

⑯ $\int$ (حتا س + طا س)^{2} ء س

⑰ $\int \frac{(\text{حا س} + \text{حتا س})^{2}}{\text{قا}^{2}\text{س} + 2\,\text{طا س}}$ ء س

⑱ $\int$ ٤ حا^{4} س ء س

ثالثًا مسائل تقيس مهارات التفكير

تكامل بعض الدوال الجبرية

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

① إذا كان : د (س) = $\int \frac{1}{س}$ ء س فإن : دَ (٢) = ...

(أ) غير موجودة. (ب) $\frac{1}{س}$ + ث (جـ) ٢ (د) $\frac{1}{2}$

② $\int \frac{س^{2}}{س + 2}$ ء س + $\int \frac{4 س + 4}{س + 2}$ ء س = ... + ث

(أ) $\frac{1}{2}$ س^{2} + ٢ س (ب) $\frac{-1}{2}$ س^{2} + ٢ س

(جـ) س^{2} + ٤ س (د) س^{2} + س

③ إذا كان : $\int$ س د (س) ء س = س^{4} − ٨ س^{2} فإن : د (١) = ...

(أ) ١٢ (ب) ٢٤ (جـ) −١٢ (د) −٢٤

④ $\int$ [٢ س + ٢ د (س) − ٢] [١ + دَ (س)] ء س = ... + ث

(أ) س + د (س) − ١ (ب) (س + د (س) − ١)^{2}

(جـ) س^{2} + (د (س))^{2} − س (د) $\frac{1}{2}$ س^{2} + $\frac{1}{2}$ (د (س))^{2} − ٢ س

⑤ إذا كان : $\int$ د (س) ء س = س^{3} − ٥ س^{2} + ٧ س + ٢ فإن : دَ (١) = ...

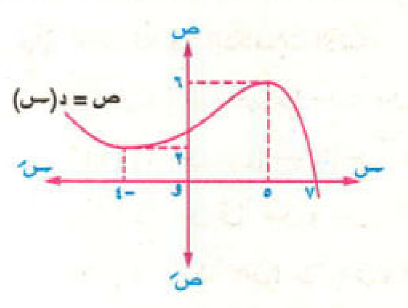
(أ) ٥ (ب) صفر (جـ) −٣ (د) −٤

⑥ $\int \sqrt{\left(س^{2} - \frac{1}{س^{2}}\right)^{2} + 4}$ ء س = ... + ث

(أ) $\frac{1}{3}$ س^{3} − $\frac{1}{س}$ (ب) $\left(\frac{1}{3} س^{3} + \frac{1}{س}\right)^{2}$

(جـ) $\frac{1}{3}$ س^{3} + $\frac{1}{س}$ (د) $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3} س^{3} - \frac{1}{س}\right)^{2}$

⑦ الشكل المقابل يمثل منحنى ص = د (س)



وكان ر (س) = ∫ [د (س) + ١] . دَ (س) ءس

فإن : ر (٥) − ر (−٤) = ...

(أ) ١٢ (ب) ١٦

(جـ) ١٨ (د) ٢٠

تكامل بعض الدوال المثلثية

⑧ ∫ $\frac{\text{جا س}}{\text{جتا}^3\text{ س}}$ ءس = ... + ث

(أ) $\frac{1}{2}$ طا² س (ب) قا س (جـ) ٢ قا س (د) $\frac{1}{2}$ طا س قا س

⑨ ∫ $\frac{\text{١ + جتا س}}{\text{١ + قا س}}$ ءس = ... + ث

(أ) جا س (ب) − جا س (جـ) جتا س (د) − جتا س

⑩ ∫ $\frac{\text{جتا س + جتا}^3\text{ س}}{\text{جا}^2\text{ س + ٢ جتا}^2\text{ س}}$ ءس = ... + ث

(أ) جتا س (ب) جا س (جـ) $\frac{1}{2}$ جتا² س (د) $\frac{1}{2}$ جا² س

⑪ ∫ $\frac{\text{١ − جتا س}}{\text{١ + جتا س}}$ ءس = ... + ث

(أ) ٢ طا $\frac{\text{س}}{2}$ − س (ب) طا س − س (جـ) ٢ طا² $\frac{\text{س}}{2}$ − س (د) ٢ طا $\frac{\text{س}}{2}$ − ١

⑫ إذا كان : أ = ∫ جتا² س ءس ، ب = ∫ جا² س ءس فإن : أ + ب = ...

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) س + ث (د) $\frac{1}{2}$ جا ٢ س + ث

⑬ ∫ (طا³ س + طا س) ءس = ... + ث

(أ) $\frac{1}{4}$ طا⁴ س + $\frac{1}{2}$ طا² س (ب) $\frac{1}{2}$ طا² س

(جـ) $\frac{1}{2}$ (طا³ س + طا س)² (د) طا س قا² س

⑭ ∫ $\frac{\text{(طتا س − قتا س) (طتا س + قتا س)}}{\text{(طا س − قا س) (طا س + قا س)}}$ ءس = ... + ث

(أ) س (ب) − س (جـ) $\frac{1}{2}$ س (د) ٢ س

⑮ ٣ ∫ جا ٢ س جا⁴ س ءس = ...

(أ) جا⁴ س جتا² س + ث (ب) جتا⁴ س جا² س + ث

(جـ) جا⁶ س + ث (د) جتا⁶ س + ث

الوحدة الرابعة

حساب المثلثات



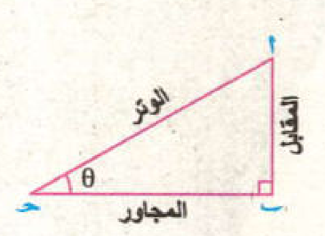
يمكنك حل الامتحانات التفاعلية على الدروس من خلال مسح QR code الخاص بكل امتحان

- مراجعة على أهم القوانين التى سبقت دراستها.

مراجعة  على أهم القوانين التى سبقت دراستها

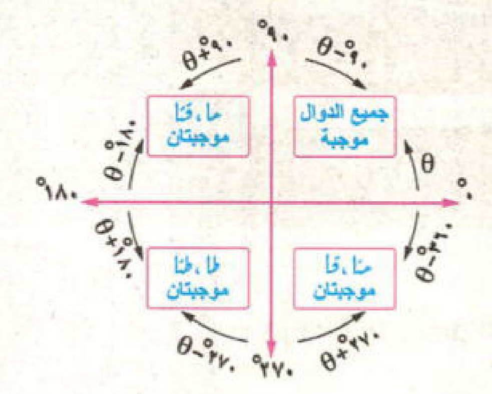
العلاقات الأساسية بين الدوال المثلثية

1. $جتا^2 \theta + جا^2 \theta = 1$
2. $1 + ظا^2 \theta = قا^2 \theta$
3. $1 + ظتا^2 \theta = قتا^2 \theta$
4. $جا \theta \, قتا \theta = 1$ ، $جتا \theta \, قا \theta = 1$ ، $ظا \theta \, ظتا \theta = 1$
5. $ظا \theta = \frac{جا \theta}{جتا \theta}$ ، $ظتا \theta = \frac{جتا \theta}{جا \theta}$



- ينبغى تذكر العلاقات الآتية :

1. $جا \theta = \frac{المقابل}{الوتر} = \frac{أب}{أحـ}$
2. $جتا \theta = \frac{المجاور}{الوتر} = \frac{ب حـ}{أحـ}$
3. $ظا \theta = \frac{المقابل}{المجاور} = \frac{أب}{ب حـ}$
4. العلاقات بين الدوال المثلثية للزوايا المنتسبة هى متطابقات



ويمكن أن نتذكرها من الشكل المقابل :

فمثلًا : $جا (90° + \theta) = جتا \theta$

، $ظا (360° - \theta) = - ظا \theta$ ، ..... كل منهما متطابقة مثلثية.



قاعدة الجيب

فى أى مثلث أ ب حـ يكون : $\frac{أ}{جا أ} = \frac{ب}{جا ب} = \frac{حـ}{جا حـ} = 2$ نق

حيث نق طول نصف قطر الدائرة الخارجة للمثلث أ ب حـ

ملاحظتان

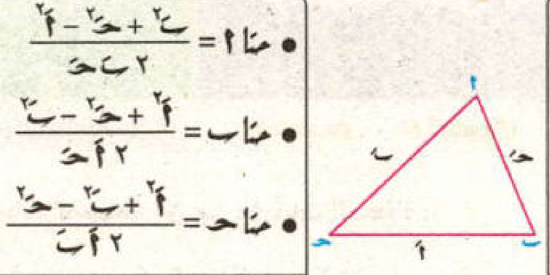
* باستخدام خواص التناسب نجد أن : $\frac{أ}{جا أ} = \frac{ب}{جا ب} = \frac{حـ}{جا حـ} = \frac{محيط \Delta أ ب حـ}{جا أ + جا ب + جا حـ}$

* أكبر أضلاع المثلث طولاً يقابل أكبر زواياه قياسًا ، أصغر أضلاع المثلث طولاً يقابل أصغر زواياه قياسًا.

قاعدة جيب التمام ⟵ في أي مثلث أ ب حـ يكون

- $أ^{2} = ب^{2} + ح^{2} - 2\,ب\,ح$ جتا أ
- $ب^{2} = أ^{2} + ح^{2} - 2\,أ\,ح$ جتا ب
- $ح^{2} = أ^{2} + ب^{2} - 2\,أ\,ب$ جتا حـ

تستخدم إذا علم طولا ضلعين وقياس زاوية محصورة بينهما.



- جتا أ $= \dfrac{ب^{2} + ح^{2} - أ^{2}}{2\,ب\,ح}$
- جتا ب $= \dfrac{أ^{2} + ح^{2} - ب^{2}}{2\,أ\,ح}$
- جتا حـ $= \dfrac{أ^{2} + ب^{2} - ح^{2}}{2\,أ\,ب}$

تستخدم إذا علمت أطوال الأضلاع الثلاثة في المثلث أو النسبة بينها.

ملاحظـــات

* لإيجاد قياس إحدى زوايا مثلث يفضل استخدام قانون جيب التمام لأنه يحدد نوع الزاوية إذا كانت حادة أو منفرجة.

* إذا كان أ : ب : حـ = ٢ : ٣ : ٤

نفرض أن : أ = ٢ ك ، ب = ٣ ك ، حـ = ٤ ك حيث ك $\in$ ح$^{+}$

ثم نعوض في قانون جيب التمام لإيجاد

قياسات زوايا Δ أ ب حـ

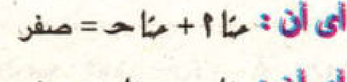
* لإثبات أن الشكل أ ب حـ ء رباعي دائري :

– نثبت أن زاويتين متقابلتين فيه متكاملتان :



ق(∠أ) + ق(∠حـ) = ١٨٠° **أي أن :** جتا أ + جتا حـ = صفر

أ، ق(∠ب) + ق(∠ء) = ١٨٠° **أي أن :** جتا ب + جتا ء = صفر



– نثبت أن قياسي زاويتين مرسومتين على قاعدة واحدة فيه وفي جهة واحدة منها متساويان :

كأن نثبت أن : ق(∠ب أ حـ) = ق(∠ب ء حـ) **أي أن :** جتا (∠ب أ حـ) = جتا (∠ب ء حـ)

تمارين تراكمية على ما سبقت دراسته

من أسئلة الكتاب المدرسي • فهم • تطبيق • مستويات عليا

١ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

① فى Δ س ص ع يكون المقدار : ٢ نق جا س = ...

(أ) عَ (ب) سَ

(جـ) صَ (د) مساحة Δ س ص ع

② إذا كانت ∠ أ تكمل ∠ حـ فإن : جتا أ + جتا حـ = ...

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) −١ (د) $\frac{١}{٢}$

③ فى أى مثلث س ص ع يكون س ص : ص ع = ...

(أ) جا س : جا ص (ب) جا ص : جا ع

(جـ) جا ع : جا س (د) جا ع : جا ص

④ أ ب حـ مثلث فيه : $\frac{\text{جا أ}}{٣} = \frac{\text{٢ جا ب}}{٥} = \frac{\text{جا حـ}}{٤}$ فإن : أ : بَ : حَ = ...

(أ) ٦ : ٥ : ٨ (ب) ٨ : ٥ : ٦ (جـ) ٧ : ٢ : ٤ (د) ٣ : ٥ : ٤

⑤ فى Δ س ص ع إذا كان : سَ = صَ فإن : جتا س = ...

(أ) $\frac{\text{٢ صَ}^{٢}}{\text{عَ}}$ (ب) $\frac{\text{عَ}}{\text{٢ صَ}}$ (جـ) $\frac{\text{عَ}}{\text{٤ سَ}}$ (د) $\frac{\text{صَ}}{\text{٢ سَ}}$

---

٢ س ص ع مثلث فيه : ق (∠ س) = ٨٠° ، ق (∠ ص) = ٦٠° ، عَ = ١٠ سم

أوجد كلًا من : سَ ، صَ لأقرب سم «١٥ سم ، ١٣ سم»

---

٣ حل المثلث أ ب حـ الذى فيه : ق (∠ أ) = ٥٠° ، أ = ٤ سم ، بَ = ٣ سم

---

٤ أ ب حـ ء شكل رباعى فيه : أ ب = أ ء = ٩ سم ، ب حـ = ٥ سم ، حـ ء = ٨ سم

، أ حـ = ١١ سم أثبت أن : أ ب حـ ء شكل رباعى دائرى.



الدرس

1

زوايا الارتفاع والانخفاض (تطبيقات على حل المثلث)

زاوية الارتفاع

إذا فرض أن هناك راصدًا عند نقطة أ ونظر إلى جسم عند نقطة حـ **أعلى مستوى النظر** فإن الزاوية المحصورة بين الشعاع $\overrightarrow{\text{أب}}$ الأفقى والشعاع $\overrightarrow{\text{أحـ}}$ الواصل بين عين الراصد والجسم المرصود تسمى **زاوية ارتفاع الجسم المرصود حـ بالنسبة لنقطة أ**

حـ (الجسم المرصود)
زاوية ارتفاع
أ (عين الراصد)
ب

زاوية الانخفاض

إذا فرض أن هناك راصدًا عند نقطة أ ونظر إلى جسم عند نقطة حـ **أسفل مستوى النظر**

فإن الزاوية المحصورة بين الشعاع $\overrightarrow{\text{أب}}$ الأفقى والشعاع $\overrightarrow{\text{أحـ}}$ الواصل بين عين الراصد والجسم المرصود تسمى **زاوية انخفاض الجسم المرصود حـ بالنسبة لنقطة أ**

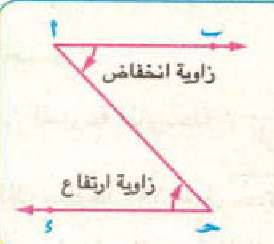
(عين الراصد) أ
ب
زاوية انخفاض
حـ (الجسم المرصود)

ملاحظة

قياس زاوية انخفاض حـ بالنسبة إلى أ يساوى قياس

زاوية ارتفاع أ بالنسبة إلى حـ

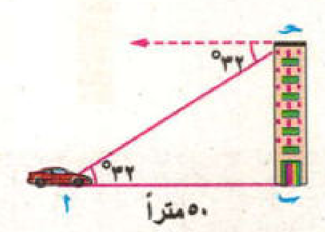
وذلك لأن : ق(∠ أ) = ق(∠ حـ) (بالتبادل)



مثال ١

من قمة منزل قيست زاوية انخفاض سيارة فوجد أن قياسها ٣٢° ، فإذا كانت السيارة تبعد عن قاعدة المنزل ٥٠ مترًا فأوجد ارتفاع المنزل لأقرب متر.

الحل



∵ Δ أ ب حـ قائم الزاوية فى ب ∴ $\text{ظا أ} = \frac{\text{ب حـ}}{\text{أ ب}}$

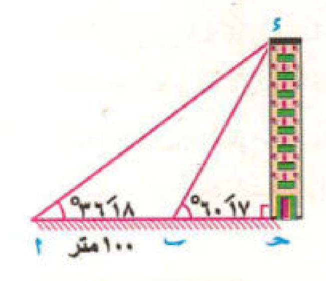
∴ $\text{ظا } ٣٢° = \frac{\text{ب حـ}}{٥٠}$ ∴ ب حـ = ٥٠ ظا ٣٢° ≈ ٣١ مترًا

∴ ارتفاع المنزل ≈ ٣١ مترًا

مثال ٢

رصد رجل زاوية ارتفاع قمة برج من نقطة على سطح الأرض فوجد أن قياسها يساوى ١٨َ ٣٦° ثم سار على طريق أفقى متجهًا نحو قاعدة البرج مسافة ١٠٠ متر ورصد زاوية ارتفاع قمة البرج مرة أخرى فوجد أن قياسها يساوى ١٧َ ٦٠° أوجد ارتفاع البرج لأقرب متر.

الحل





∵ ∠ ء ب حـ خارجة عن Δ أ ب ء

∴ ق(∠ أ ء ب) = ١٧َ ٦٠° − ١٨َ ٣٦° = ٥٩َ ٢٣°

∴ فى Δ أ ب ء : $\frac{\text{ب ء}}{\text{جا } ١٨َ\ ٣٦°} = \frac{١٠٠}{\text{جا } ٥٩َ\ ٢٣°}$

∴ $\text{ب ء} = \frac{١٠٠ \text{ جا } ١٨َ\ ٣٦°}{\text{جا } ٥٩َ\ ٢٣°}$ (١)

∴ فى Δ ب حـ ء القائم الزاوية فى حـ : $\frac{\text{حـ ء}}{\text{ب ء}} = \text{جا } ١٧َ\ ٦٠°$ ∴ حـ ء = ب ء جا ١٧َ ٦٠°

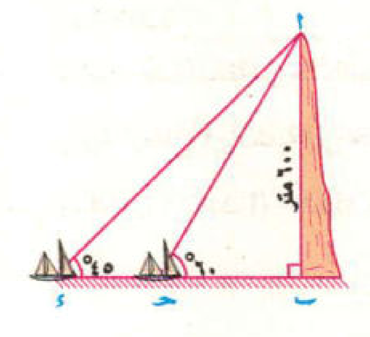
ومن (١) : ∴ $\text{حـ ء} = \frac{١٠٠ \text{ جا } ١٨َ\ ٣٦°}{\text{جا } ٥٩َ\ ٢٣°} \times \text{جا } ١٧َ\ ٦٠°$ ≈ ١٢٦ مترًا. ∴ ارتفاع البرج ≈ ١٢٦ مترًا.

مثال ٣

وجد رجل فى قارب بخارى يتحرك فى الماء مبتعدًا عن صخرة ارتفاعها ٦٠٠ متر أن قياس زاوية ارتفاع قمة الصخرة فى لحظة معينة ٦٠° ثم أصبح قياسها بعد ٤ دقائق ٤٥°

احسب السرعة المتوسطة للقارب لأقرب متر/ دقيقة.

الحل



∵ $\text{السرعة المتوسطة} = \frac{\text{المسافة المقطوعة}}{\text{الزمن الذى قطعت فيه}}$

لذلك سنوجد أولًا طول $\overline{\text{حـ ء}}$ ثم نقسمه على الزمن (٤ دقائق) فنحصل على السرعة المطلوبة.

في △ أ ب حـ :

∵ $\frac{\text{٦٠٠}}{\text{ب حـ}}$ = ظا ٦٠°　　∴ ب حـ = $\frac{\text{٦٠٠}}{\text{ظا ٦٠°}}$ ≈ ٣٤٦,٤١ متر

في △ أ ب ء : ∵ ق(∠ب أ ء) = ١٨٠° − (٩٠° + ٤٥°) = ٤٥°

∴ △ أ ب ء متساوى الساقين.　　∴ ب ء = أ ب = ٦٠٠ متر.

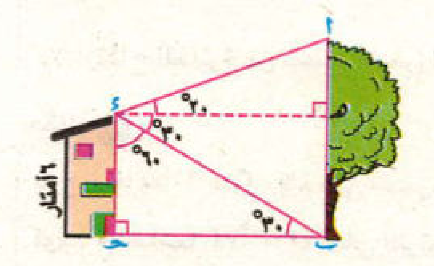
∴ حـ ء = ب ء − ب حـ = ٦٠٠ − ٣٤٦,٤١ ≈ ٢٥٣,٥٩ متر.

∴ السرعة = $\frac{\text{٢٥٣,٥٩}}{\text{٤}}$ ≈ ٦٣ متر/ دقيقة.

مثال ٤

من قمة منزل ارتفاعه ٦ أمتار كان قياس زاوية ارتفاع قمة شجرة ٢٠° ، قياس زاوية انخفاض قاعدتها ٣٠° أوجد المسافة بين قاعدتى المنزل والشجرة ، وكذلك أوجد ارتفاع الشجرة علمًا بأن قاعدتى المنزل والشجرة فى مستوى أفقى واحد.

الحل



فى △ ب حـ ء : ∵ $\frac{\text{٦}}{\text{جا ٣٠°}}$ = $\frac{\text{ب حـ}}{\text{جا ٦٠°}}$

∴ ب حـ = $\frac{\text{٦ جا ٦٠°}}{\text{جا ٣٠°}}$ ≈ ١٠,٤ متر.



∴ المسافة بين قاعدتى الشجرة والمنزل = ١٠,٤ متر.

∴ فى △ أ هـ ء : هـ ء = ١٠,٤ متر ، ق(∠أ) = ٧٠°

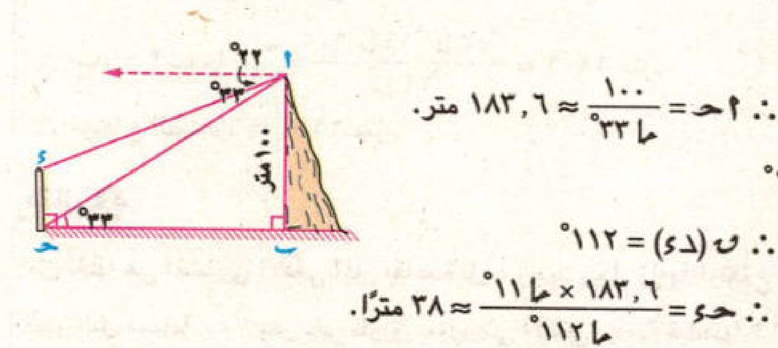
∴ $\frac{\text{أ هـ}}{\text{جا ٢٠°}}$ = $\frac{\text{١٠,٤}}{\text{جا ٧٠°}}$　　∴ أ هـ = $\frac{\text{١٠,٤ جا ٢٠°}}{\text{جا ٧٠°}}$ ≈ ٣,٨ متر.

∴ ارتفاع الشجرة = ٣,٨ + ٦ = ٩,٨ متر.

مثال ٥

من قمة صخرة ارتفاعها ١٠٠ متر قيست زاويتا انخفاض قمة وقاعدة برج فكان قياساهما ٢٢° ، ٣٣° أوجد ارتفاع البرج لأقرب متر علمًا بأن قاعدتى الصخرة والبرج فى مستوى أفقى واحد.

الحل



فى △ أ ب حـ القائم الزاوية فى ب :

∵ $\frac{\text{١٠٠}}{\text{أ حـ}}$ = جا ٣٣°　　∴ أ حـ = $\frac{\text{١٠٠}}{\text{جا ٣٣°}}$ ≈ ١٨٣,٦ متر.

، فى △ أ حـ ء : ∵ ق(∠حـ أ ء) = ١١°

، ق(∠أ حـ ء) = ٥٧° (لماذا؟)　　∴ ق(∠ء) = ١١٢°

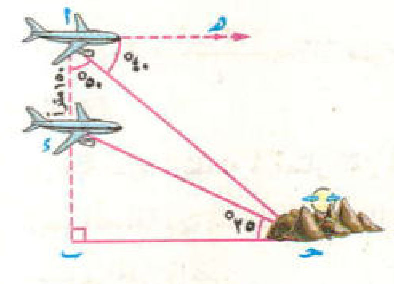
∴ $\frac{\text{أ حـ}}{\text{جا ١١٢°}}$ = $\frac{\text{حـ ء}}{\text{جا ١١°}}$　　∴ حـ ء = $\frac{\text{١٨٣,٦ × جا ١١°}}{\text{جا ١١٢°}}$ ≈ ٣٨ مترًا.

∴ ارتفاع البرج ≈ ٣٨ مترًا.

مثال ٦

رصد طيار موقعًا حربيًا فوجد أن قياس زاوية انخفاض الموقع ٤٠° ثم هبط رأسيًا لأسفل مسافة ١٥٠ مترًا فتنبه أحد الجند بالموقع الحربى للطائرة فرصد زاوية ارتفاع الطائرة فكان قياسها ٢٥°
أوجد ارتفاع الطائرة عن سطح الأرض لحظة الرصد الثانية لأقرب متر.

الحل



∵ ق(∠ أ حـ ب) = ق(∠ هـ أ حـ) = ٤٠° (بالتبادل)

∴ ق(∠ أ حـ ء) = ٤٠° − ٢٥° = ١٥°

فى △ أ حـ ء : $\frac{\text{١٥٠}}{\text{جا ١٥°}} = \frac{\text{حـ ء}}{\text{جا ٥٠°}}$

∴ حـ ء = $\frac{\text{١٥٠ جا ٥٠°}}{\text{جا ١٥°}}$

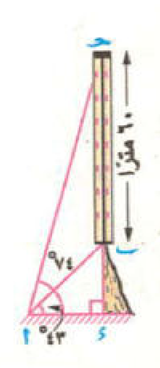
، فى △ ء حـ ب : ب ء = حـ ء جا ٢٥° = $\frac{\text{١٥٠ جا ٥٠°}}{\text{جا ١٥°}}$ × جا ٢٥° ≈ ١٨٨ مترًا.

∴ ارتفاع الطائرة عن سطح الأرض لحظة الرصد الثانية ≈ ١٨٨ مترًا.

مثال ٧

برج ارتفاعه ٦٠ مترًا مقام على صخرة ومن نقطة على سطح الأرض قيست زاويتا ارتفاع قمة وقاعدة البرج فوجد قياساهما ٧٤° ، ٤٣° على الترتيب. أوجد ارتفاع الصخرة.

الحل



فى △ أ ب حـ : ∠ أ ب حـ خارجة عن △ أ ب ء

∴ ق(∠ أ ب حـ) = ٩٠° + ٤٣° = ١٣٣°

، ق(∠ حـ) = ١٨٠° − (٩٠° + ٧٤°) = ١٦°

∴ $\frac{\text{أ ب}}{\text{جا ١٦°}} = \frac{\text{٦٠}}{\text{جا ٣١°}}$ ∴ أ ب = $\frac{\text{٦٠ جا ١٦°}}{\text{جا ٣١°}}$

، فى △ أ ب ء : $\frac{\text{ب ء}}{\text{جا ٤٣°}} = \frac{\text{أ ب}}{\text{جا ٩٠°}}$

∴ ب ء = أ ب جا ٤٣° = $\frac{\text{٦٠ جا ١٦° جا ٤٣°}}{\text{جا ٣١°}}$ ≈ ٢١,٩ متر.

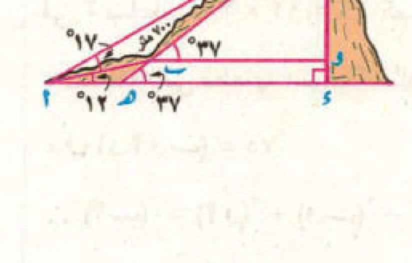
∴ ارتفاع الصخرة ≈ ٢١,٩ متر.



مثال ٨

من نقطة فى المستوى الأفقى المار بقاعدة تل ، رصد رجل زاوية ارتفاع قمة التل فوجد أن قياسها ٢٩° ولما صعد نحو التل مسافة ٧٠٠ متر على طريق يميل على الأفقى بزاوية قياسها ١٢° ، وجد أن قياس زاوية ارتفاع قمة التل ٣٧° أوجد ارتفاع التل لأقرب متر.

الحــل



في Δ أ ب حـ :

ق (∠ ب أ حـ) = ٢٩° − ١٢° = ١٧°

، ∵ ∠ حـ هـ ء خارجة عن Δ حـ هـ أ

∴ ق (∠ هـ حـ أ) = ٣٧° − ٢٩° = ٨°

∴ في Δ أ ب حـ : ق (∠ أ ب حـ) = ١٨٠° − (٨° + ١٧°) = ١٥٥°

∴ $\frac{\text{أ حـ}}{\text{جا } ١٥٥°} = \frac{٧٠٠}{\text{جا } ٨°}$ ∴ أ حـ = $\frac{٧٠٠ \times \text{جا } ١٥٥°}{\text{جا } ٨°}$

في Δ أ حـ ء : حـ ء = أ حـ جا ٢٩° = $\frac{٧٠٠ \times \text{جا } ١٥٥°}{\text{جا } ٨°}$ × جا ٢٩° ≈ ١٠٣١ مترًا.

∴ ارتفاع التل ≈ ١٠٣١ مترًا.

ملاحظة

لتحديد موضع جسم مرصود بالنسبة لنقطة رصد معلومة مستخدمين الاتجاهات الأصلية نرسم نقطة الأصل لمحاور الاتجاهات الأصلية عند نقطة الرصد ثم نرسم من نقطة الرصد شعاعًا حسب المعطى يحدد موضع الجسم بالنسبة لنقطة الرصد.

فهو مثلًا في الشكل المقابل :

$\overrightarrow{\text{و أ}}$ يحدد موضع الجسم أ إذا كان في اتجاه الشمال الشرقي من نقطة الرصد.

، $\overrightarrow{\text{و ب}}$ يحدد موضع الجسم ب إذا كان في اتجاه ٢٠° شرق الشمال من نقطة الرصد.



، $\overrightarrow{\text{و حـ}}$ يحدد موضع الجسم حـ إذا كان في اتجاه ٢٠° شمال الشرق من نقطة الرصد.

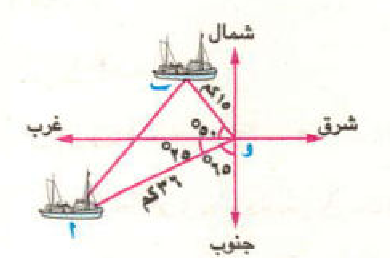
، $\overrightarrow{\text{و ء}}$ يحدد موضع الجسم ء إذا كان في اتجاه ٢٥° شمال الغرب من نقطة الرصد.

، $\overrightarrow{\text{و هـ}}$ يحدد موضع الجسم هـ إذا كان في اتجاه الجنوب من نقطة الرصد.

مثال ٩

تحركت سفينة من نقطة معينة في اتجاه ٦٥° غرب الجنوب بسرعة ١٢ كم / ساعة ، وفي نفس اللحظة تحركت سفينة أخرى من نفس المكان في اتجاه ٥٠° شمال الغرب بسرعة ٥ كم / ساعة أوجد البعد بين السفينتين بعد ٣ ساعات.

الحـــل



المسافة التى قطعتها السفينة الأولى

فى ٣ ساعات = ٣ × ١٢ = ٣٦ كم.

، المسافة التى قطعتها السفينة الثانية فى ٣ ساعات = ٣ × ٥ = ١٥ كم.

، ق (∠ أ و ب) = ٧٥°

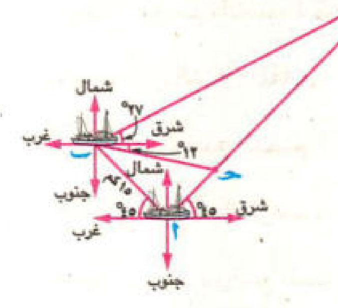
∴ $(أب)^2 = (أو)^2 + (وب)^2 - ٢ \, أو \times وب$ جتا ٧٥° $= (٣٦)^2 + (١٥)^2 - ٢ \times ٣٦ \times ١٥$ جتا ٧٥°

∴ أب ≈ ٣٥,٢٣ كم.   ∴ البعد بين السفينتين ≈ ٣٥,٢٣ كم.

مثال ١٠

سفينة تسير نحو الشمال الغربى بسرعة ٥ كم / ساعة شاهد راكب فيها مكانين ثابتين فى اتجاه الشمال الشرقى وبعد ٣ ساعات وجد الراكب أن أحد المكانين يقع فى اتجاه ١٢° جنوب الشرق ، وأن المكان الآخر يقع فى اتجاه ٢٧° شمال الشرق. أوجد البعد بين المكانين لأقرب كيلو متر مع العلم بأن المكانين والرجل فى مستوى أفقى واحد.

الحـــل



نفرض أن المكانين الثابتين هما حـ ، ء

وأن الموضع الأول للسفينة أ والموضع الثانى لها ب

∴ المسافة التى قطعتها السفينة فى ٣ ساعات

هى أب = ٣ × ٥ = ١٥ كم.

فى △ أب حـ :

ق (∠ ب أ حـ) = ٩٠° ، ق (∠ حـ ب أ) = ٤٥° − ١٢° = ٣٣°

∴ ق (∠ أ حـ ب) = ٥٧°   ∴ $\frac{١٥}{جا ٥٧°} = \frac{ب حـ}{جا ٩٠°}$

∴ $ب حـ = \frac{١٥}{جا ٥٧°}$ (١)

، ∵ ∠ أ حـ ب خارجة عن △ ء حـ ب   ∴ ق (∠ ء) = ٥٧° − (١٢° + ٢٧°) = ١٨°

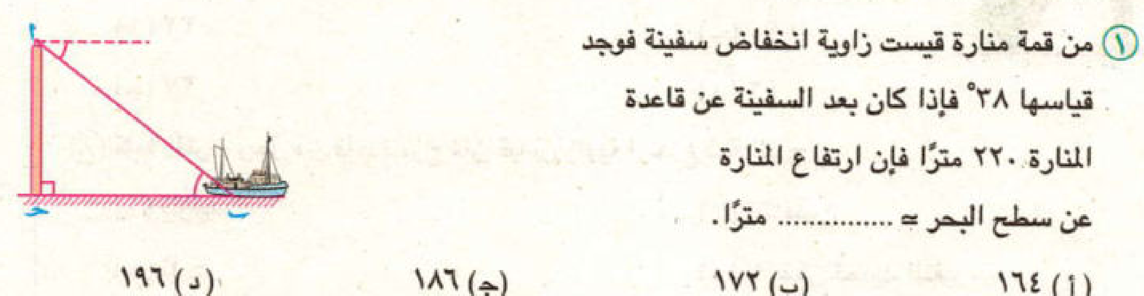
∴ فى △ ء حـ ب : $\frac{ب حـ}{جا ١٨°} = \frac{حـ ء}{جا ٣٩°}$ ∴ $حـ ء = \frac{ب حـ \, جا ٣٩°}{جا ١٨°}$

ومن (١) : ∴ $حـ ء = \frac{١٥ \, جا ٣٩°}{جا ٥٧° \times جا ١٨°} \approx ٣٦$ كم.

∴ البعد بين المكانين ≈ ٣٦ كم.

أولًا أسئلة الاختيار من متعدد

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :



① من قمة منارة قيست زاوية انخفاض سفينة فوجد قياسها ٣٨° فإذا كان بعد السفينة عن قاعدة المنارة ٢٢٠ مترًا فإن ارتفاع المنارة عن سطح البحر ≃ .... مترًا.

(أ) ١٦٤ (ب) ١٧٢ (جـ) ١٨٦ (د) ١٩٦

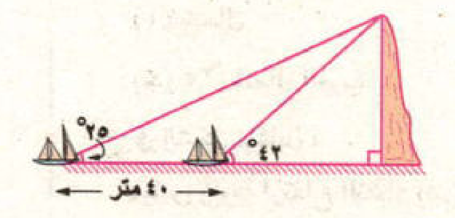
② من نقطة على سطح الأرض رصد رجل زاوية ارتفاع قمة مبنى فوجدها هـ° فإن قياس زاوية انخفاض موضع الرجل فى نفس اللحظة من قمة المبنى هى ....

(أ) هـ° (ب) ٩٠° − هـ° (جـ) هـ° − ٩٠° (د) ١٨٠° − هـ°

③ نظر طفل من نقطة على سطح الأرض إلى قمة برج ارتفاعه ٥٠ متر فإذا كان الطفل يبعد ٥٠ $\sqrt{3}$ متر عن قاعدة البرج فإن قياس زاوية ارتفاع قمة البرج = ...

(أ) ٤٥° (ب) ١٢٠° (جـ) ٦٠° (د) ٣٠°

④ فى الشكل المقابل :



رصد شخص فى قارب زاوية ارتفاع قمة صخرة فوجد أن قياسها ٢٥° ثم تحرك فى طريق أفقى نحو قاعدة الصخرة مسافة ٤٠ متر ورصد زاوية ارتفاع قمة الصخرة مرة أخرى فوجد أن قياسها ٤٢° فإن ارتفاع الصخرة ≃ .... متر.

(أ) ٣٩ (ب) ٤٢ (جـ) ٤٦ (د) ٥١

⑤ من قمة برج ارتفاعه ٦٥ مترًا قيست زاويتا انخفاض النقطتين أ ، ب فى المستوى الأفقى فكان قياساهما ٣٢° ، ١٣َ ٢١° على الترتيب فإذا كانت ء تمثل قاعدة البرج ، أ ∈ $\overline{\text{ب ء}}$

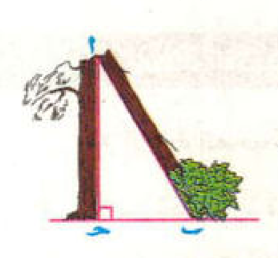
فإن : طول $\overline{\text{أ ب}}$ ≃ .... متر.

(أ) ٥٤ (ب) ٥٨ (جـ) ٦٣ (د) ٦٧

(٦) من شرفة منزل على ارتفاع ٨ أمتار من سطح الأرض قيست زاويتا ارتفاع وانخفاض قمة وقاعدة شجرة مقابلة علمًا بأن قاعدتى المنزل والشجرة فى مستوى أفقى واحد فكانتا متساويتين فى القياس فإن ارتفاع الشجرة = ... متر.

(أ) ٨ (ب) ٨ $\sqrt{2}$ (جـ) ١٦ (د) ٢٤

(٧) بسبب الرياح كسر الجزء العلوى لشجرة فصنع مع الأرض زاوية قياسها ٦٠° فإذا كانت نقطة تلاقى قمة الشجرة بالأرض تبعد عن قاعدة الشجرة ١٠ أمتار فإن طول الشجرة = ... مترًا.



(أ) ٣٢ (ب) ٣٥

(جـ) ٣٧ (د) ٤٢

(٨) كلما اقترب رجل من قاعدة برج فإن قياس زاوية ارتفاع قمة البرج ....

(أ) تتزايد. (ب) تتناقص.

(جـ) ثابت. (د) لا يمكن تحديد التغير.

(٩) إذا رصد رجل زاوية ارتفاع قمة برج من نقطة (أ) فى المستوى الأفقى المار بقاعدة البرج فوجد قياسها θ_1 ثم صعد رأسيًا أعلى (أ) مسافة ف متر ورصد زاوية ارتفاع البرج مرة أخرى فوجد قياسها θ_2 فإن : ....

(أ) $\theta_1 > \theta_2$ (ب) $\theta_1 < \theta_2$

(جـ) $\theta_1 = \theta_2$ (د) $\theta_1 + \theta_2 = 90°$

(١٠) فى الشكل المقابل :

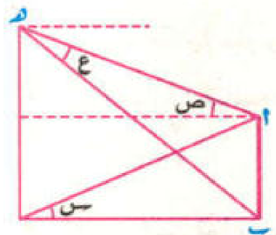
النقطة (أ) تقع .... بالنسبة للنقطة (و).

(أ) شمال (ب) غرب

(جـ) ٣٥° شمال الغرب (د) ٣٥° غرب الشمال

(١١) فى الشكل المقابل :

قياس زاوية ارتفاع النقطة (هـ) عندما يتم رصدها من النقطة (ب) تساوى ....



(أ) ع (ب) ص

(جـ) س (د) ص + ع

(١٢) من قمة جبل رصدت سيارة متحركة بسرعة منتظمة فى اتجاه قاعدة الجبل فكان قياس زاوية انخفاضها ٤٠° وبعد دقيقتين قيست زاوية انخفاض السيارة مرة ثانية فوجد قياسها ٦٧° فإن ارتفاع الجبل = ... متر علمًا بأن سرعة السيارة ٦٠ كم/س

(أ) ٢٥٠٨ (ب) ٢٦٠٧ (جـ) ٢٧٠٦ (د) ٢٨٠٧

(١٣) يقف شخص فى منتصف المسافة بين مبنى وشجرة على نفس المستوى الأفقى فنظر إلى قمتى الشجرة والمبنى فكان قياسا زاويتى ارتفاعهما ٣٠° ، ٦٠° على الترتيب فإذا كان ارتفاع الشجرة ١٥ متر فإن ارتفاع المبنى = ... متر.

(أ) ٤٠ (ب) ١٥ $\sqrt{3}$ (جـ) ٣٠ $\sqrt{3}$ (د) ٤٥

(١٤) رُصدت طائرة حـ من النقطتين أ ، ب على سطح الأرض عند لحظة مرورها بالمستوى الرأسى المار بالمستقيم $\overleftrightarrow{أب}$ ، حيث أ ب = ٣٠٠٠ متر. فوجد أن قياس زاوية ارتفاعها من أ هو ٢١َ ٥٣° ، وقياس زاوية ارتفاعها من ب هو ٢٦َ ٣٤° ، والمسقط الرأسى للطائرة ∋ $\overline{أب}$ فإن ارتفاع الطائرة عن سطح الأرض ≃ .... متر.

(أ) ١١٥٤ (ب) ١٢٦٢ (جـ) ١٣٢٢ (د) ١٣٦٢

(١٥) رصد قائد طائرة هدفًا ثابتًا على الأرض فوجد أن قياس زاوية انخفاضه ٦٠° ولما هبط رأسيًا مسافة ٢٠٠ متر وجد أن قياس زاوية انخفاض الهدف أصبح ٤٥° فإن ارتفاع الطائرة عن الأرض لحظة الرصد الأولى للهدف = ... متر.

(أ) ٤٥٣ (ب) ٤٧٣ (جـ) ٤٩٣ (د) ٥١٢

(١٦) تحركت سفينة من نقطة معينة فى اتجاه ١٢° جنوب الشرق بسرعة ١١ كيلومتر/ساعة ، وفى نفس اللحظة تحركت سفينة أخرى من نفس النقطة فى اتجاه ٦٨° شمال الشرق بسرعة ٦,٥ كيلومتر/ساعة فإن المسافة بين السفينتين بعد ساعتين من لحظة تحركهما معًا = ... كم.

(أ) ٢٤ (ب) ٢٦ (جـ) ٢٨ (د) ٣٠

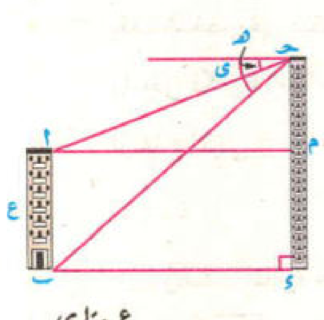
(١٧) ثلاث قرى أ ، ب ، حـ تقع القرية أ غرب القرية ب حيث أ ب = ٢٠ كم وتقع القرية حـ فى اتجاه ٤٨° شرق الشمال من القرية أ ، ٦٠° شمال الغرب من القرية ب فإن المسافة بين القريتين ب ، حـ ≃ .... كيلومتر.

(أ) ١٣ (ب) ١٤ (جـ) ١٥ (د) ١٦

(١٨) من قمة برج القاهرة استخدم شخص المنظار ليرصد زاويتى انخفاض قمة وقاعدة منزله القريب من البرج فكان قياساهما ٤٥° ، ٦٠° على الترتيب فإذا كانت قاعدتا المنزل والبرج على نفس المستوى الأفقى وارتفاع البرج ١٨٧ متر فإن ارتفاع المنزل ≃ .... متر.

(أ) ٩٦ (ب) ٨٧ (جـ) ١٠٨ (د) ٧٩

(١٩) في الشكل المقابل :



$\overline{\text{حـ ء}}$ تمثل برجًا ، $\overline{\text{أ ب}}$ يمثل منزلًا ارتفاعه ع متر

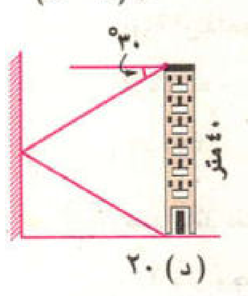
، هـ ، ى هما زاويتى انخفاض أ ، ب من حـ

على الترتيب فإن المسافة بين قمتى البرج

والمنزل = ... متر.

(أ) (ع حا ى) / (حا هـ) (ب) ع حا ى حتا هـ (جـ) (ع حتا هـ) / (حا (ى - هـ)) (د) (ع حتا ى) / (حا (ى - هـ))

(٢٠) إذا علمت أنه من قمة مبنى كانت زاوية انخفاض



صورة قاعدة المبنى من خلال مرآه رأسية على برج

مقابل للمبنى هى ٣٠° وكان ارتفاع المبنى = ٤٠ متر

فإن المسافة بين المبنى والبرج هى .... متر.

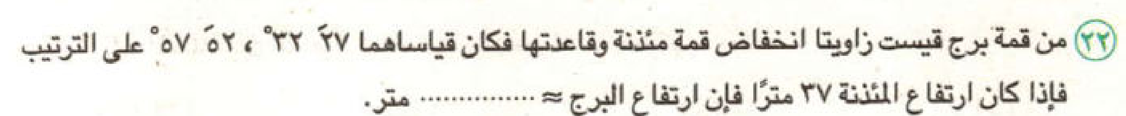
(أ) ٤٠ (ب) ٣٠ (جـ) ٢٠ $\sqrt{3}$ (د) ٢٠

(٢١) إذا كانت نقطة (أ) تقع ٣٠° شمال شرق نقطة (و) وكانت نقطة (ب) تقع ٤٠° شمال غرب نقطة (و)

وكانت و أ = و ب فإن نقطة (أ) تقع .... نقطة (ب)

(أ) ٥° جنوب شرق (ب) ٥° شرق جنوب

(جـ) ٣٥° شمال غرب (د) ٣٥° جنوب شرق



(٢٢) من قمة برج قيست زاويتا انخفاض قمة مئذنة وقاعدتها فكان قياساهما ٢٧َ ٣٢° ، ٥٢َ ٥٧° على الترتيب

فإذا كان ارتفاع المئذنة ٣٧ مترًا فإن ارتفاع البرج ≃ .... متر.

(أ) ٥٧ (ب) ٦٢ (جـ) ٦٧ (د) ٧١

(٢٣) في الشكل المقابل :

$\overline{\text{أ ء}}$ يمثل فنار ارتفاعه ١٠٠ متر عن سطح الأرض رصد منه شخص

زاويتى انخفاض قاربين «ب ، حـ» فى مستوى أفقى واحد يمر بقاعدة

الفنار وفى جانبين مختلفين من الفنار فكان قياساهما ٤٠° ، ٥٠° على الترتيب

فإن البعد بين القاربين (ب حـ) ≃ .... متر

(أ) ٢٠٣ (ب) ١٥٢ (جـ) ٣١٤ (د) ٢٣٢

(٢٤) قارب بخارى يتحرك فى الماء فى خط مستقيم نحو صخرة بسرعة منتظمة ٣٠٠ متر/ دقيقة وعند لحظة معينة رصدت من القارب زاوية ارتفاع قمة الصخرة فوجد أن قياسها ٣٥° وبعد دقيقتين ومن نفس القارب تم رصد زاوية الارتفاع مرة أخرى فوجد أن قياسها ٦٠° فإن ارتفاع الصخرة ≃ .... متر.

(أ) ٦٢٠ (ب) ٦٨٥ (جـ) ٧٠٥ (د) ٧٣٥

(٢٥) برج خاص بإحدى شركات الهاتف المحمول ارتفاعه ٣٠ مترًا موضوع فوق إحدى المبانى تم رصده من نقطة على سطح الأرض فكانت زاويتا ارتفاع قمة وقاعدة البرج قياساهما ٦٠° ، ٣٠° على الترتيب فإن ارتفاع المبنى = ... متر.

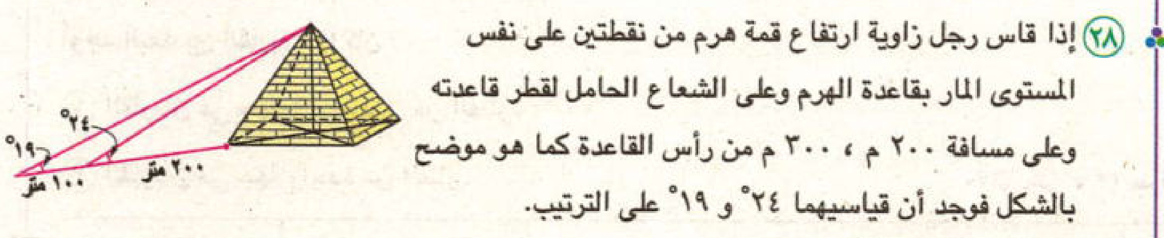
(أ) ٣٠ (ب) ١٥ (جـ) ٢٧,٥ (د) ١٨

(٢٦) من قاعدة منزل ارتفاعه ٢٥ مترًا ثم رصد شخص قمة مئذنة مقابلة فكان قياس زاوية ارتفاعها ٦٠° وعندما صعد إلى قمة المنزل ورصد قمة المئذنة مرة أخرى فكانت ٤٥° فإن ارتفاع المئذنة عن سطح الأرض ≃ .... متر.

(أ) ٦٠ (ب) ٥٩ (جـ) $٢٥ + ٢٥\sqrt{٣}$ (د) ٥٠

(٢٧) أبحرت سفينتان من إحدى الموانئ تحركت السفينة الأولى عند السابعة صباحًا فى اتجاه θ° جنوب الشرق بسرعة ٣ كم/س وعند الثامنة صباحًا أبحرت السفينة الثانية فى اتجاه α° جنوب الغرب والسرعة ٤ كم/س إذا كانت المسافة بين السفينتين عند الساعة الحادية عشر صباحًا هى $١٢\sqrt{٣}$ كم فإن : $\theta° + \alpha°$ = ...

(أ) ٦٠° (ب) ١٢٠° (جـ) ١٥٠° (د) ٩٠°



(٢٨) إذا قاس رجل زاوية ارتفاع قمة هرم من نقطتين على نفس المستوى المار بقاعدة الهرم وعلى الشعاع الحامل لقطر قاعدته وعلى مسافة ٢٠٠ م ، ٣٠٠ م من رأس القاعدة كما هو موضح بالشكل فوجد أن قياسيهما ٢٤° و ١٩° على الترتيب.

فإن ارتفاع الهرم لأقرب متر هو ....

(أ) ١٢٤ (ب) ١٥٢ (جـ) ١٦٨ (د) ٢١٢

ثانيًا الأسئلة المقالية

١ رصد شخص زاوية ارتفاع قمة برج من نقطة على سطح الأرض فوجد قياسها ٢٥° ثم سار فى طريق أفقى مار بقاعدة البرج نحو قاعدة البرج مسافة س متر فوجد أن قياس زاوية ارتفاع قمة البرج ٥٥° فإذا كان ارتفاع البرج ٨٥ مترًا أوجد قيمة س لأقرب متر. «١٢٣ مترًا»

٢ وقف رجل عند نقطة على سطح الأرض ورصد منها زاوية ارتفاع قمة صخرة فوجد قياسها ٧٥° ثم سار على طريق أفقى مبتعدًا عن قاعدة الصخرة مسافة ٨٠ مترًا ثم رصد مرة ثانية زاوية ارتفاع قمة الصخرة فوجد قياسها ٥٢° فإذا كانت نقطتا الرصد وقاعدة الصخرة على استقامة واحدة أوجد ارتفاع الصخرة لأقرب متر. «١٥٦ مترًا»

٣ من قمة صخرة ارتفاعها ٨٠ مترًا قيست زاويتا انخفاض قمة وقاعدة برج فوجد قياساهما ٢٤° ، ٣٥° على الترتيب. أوجد ارتفاع البرج لأقرب متر علمًا بأن قاعدتى الصخرة والبرج فى مستوى أفقى واحد.

«٢٩ مترًا»

---

٤ من قمة برج قيست زاويتا انخفاض قمة مئذنة وقاعدتها فكان قياساهما ٢٣° ، ٤٧° على الترتيب فإذا كان ارتفاع المئذنة ٤٨ مترًا فأوجد المسافة بين قاعدتى البرج والمئذنة لأقرب متر علمًا بأن القاعدتين فى مستوى أفقى واحد. «٧٤ مترًا»

---

٥ من شرفة مبنى ترتفع ٦ أمتار كان قياس زاوية ارتفاع قمة شجرة ١٥° وقياس زاوية انخفاض قاعدة الشجرة ٣٠° أوجد ارتفاع الشجرة وبعدها عن المبنى. «٨,٨ متر ، ١٠,٤ متر»

---

٦ وجد رجل فى قارب يتحرك فى الماء مبتعدًا عن صخرة ارتفاعها ٥٠٠ متر أن قياس زاوية ارتفاع قمة الصخرة فى لحظة معينة ٦٠° ثم أصبح بعد دقيقتين ٤٥° احسب السرعة المتوسطة للقارب. «١٠٥,٧ متر/دقيقة»

---

٧ من قمة فنار ارتفاعه ٨٠ مترًا عن سطح البحر رصد شخص زاويتى انخفاض قاربين فى مستوى أفقى مار بقاعدة الفنار فوجد أن قياسيهما ١٥َ ٥٠° ، ٤٠َ ٣٨°

أوجد البعد بين القاربين إذا كان :

(١) القاربان فى جهتين مختلفتين من الفنار.

(٢) القاربان فى جهة واحدة من الفنار. «١٦٧ مترًا ، ٣٣ مترًا»

---

٨ منارة ارتفاعها ٦٠ مترًا مقامة على تل بالقرب من شاطئ بحر ، قيست زاويتا ارتفاع قمة وقاعدة المنارة من قارب فوق سطح البحر فوجد قياساهما ٧٠° ، ٤٥° على الترتيب.

أوجد ارتفاع التل عن سطح البحر لأقرب متر. «٣٤ مترًا»

---

٩ قيست زاوية ارتفاع قمة برج لم يكتمل بناؤه من نقطة على بعد ١٣٠ مترًا من قاعدته فوجد قياسها ٣٥° فكم مترًا يجب أن ترتفعها قمة البرج ليصبح قياس زاوية ارتفاعها من نفس النقطة ٥٥° ؟ «٩٥ مترًا»

---

١٠ من نقطة على سطح أرض أفقية رصد رجل زاوية ارتفاع منطاد يتحرك رأسيًا بسرعة ثابتة مقدارها ٢٠ مترًا/دقيقة فوجد أن قياسها يساوى ٣٥° وبعد ثلاث دقائق أعيد الرصد من نفس النقطة فوجد أن قياس زاوية ارتفاع المنطاد أصبح ١٥° أوجد بُعد الرجل عن مسقط المنطاد على الأرض لأقرب متر. «١٣٩ مترًا»

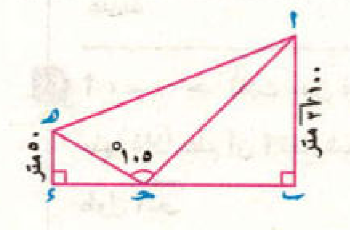
---

١١ من قاعدة منزل ارتفاعه ٢٠ مترًا رصدت زاوية ارتفاع قمة برج فوجد أن قياسها ٢٥° ثم رصدت قمة البرج مرة ثانية من قمة المنزل فوجد أن قياس زاوية ارتفاعها ١٨° أوجد ارتفاع البرج. «٦٦ مترًا»

١٢ من قمة جبل ارتفاعه ١٠٠ متر فوق سطح البحر ، رصد شخص زاوية انخفاض قمة صخرة ، فوجد أن قياسها ٣٧ ٤٢ ٢° ، أوجد ارتفاع الصخرة عن سطح البحر إذا كانت تبعد عن الجبل مسافة ٢٢ مترًا ، علمًا بأنهما مُقامان على أرض أفقية واحدة. «٧٩,٨ مترا»

١٣ برجان البعد الأفقى بينهما ٦٠ مترًا وقياس زاوية انخفاض قمة الأول عندما ترصد من قمة الثانى يساوى ٣٠° أوجد ارتفاع البرج الأول إذا علم أن ارتفاع البرج الثانى ١٥٠ مترًا. «١١٥ مترًا»

١٤ فى الشكل المقابل :



بالونان أ ، هـ ارتفاعهما $١٠٠\sqrt{٢}$ ، ٥٠ مترًا. رصدا جسمًا على الأرض (حـ) يقع فى المستوى الرأسى المار بالبالونين فإذا كان قياسا زاويتى انخفاض الجسم ٤٥° ، ٣٠° على الترتيب

أوجد البعد بين البالونين مقربًا لأقرب متر. «٢٤٦ مترًا»

١٥ بالونان ارتفاعهما ٢٠٠ متر شاهدا جسمًا على الأرض يقع فى المستوى الرأسى المار بالبالونين فإذا كان قياسا زاويتى انخفاض الجسم ٣٦° ، ٥٤° أوجد المسافة بين البالونين إذا علم أن البالونين يرصدان الجسم من اتجاهين متضادين. «٤٢٠,٦ متر»

١٦ من نقطة تقع بين قاعدتى برج ارتفاعه ٧٥ مترًا وصخرة ارتفاعها ٣٥ مترًا ، قاس شخص زاويتى ارتفاع قمة البرج وقمة الصخرة فوجد قياسيهما ٦٣° ، ٤٨° على الترتيب.

أوجد : (١) البعد بين القاعدتين. (٢) البعد بين القمتين. «٧٠ مترًا ، ٨٠ مترًا»

١٧ تحركت سفينة بسرعة ١٢ كم/ ساعة فى اتجاه ٤٠° جنوب الغرب ، وفى نفس اللحظة ومن نفس المكان تحركت سفينة أخرى بسرعة ٢٠ كم/ ساعة فى اتجاه الشمال الغربى. أوجد البعد بين السفينتين بعد ثلاث ساعات من بدء حركتهما. «٦٧ كم»

١٨ يقف رجل عند نقطة ب فشاهد جسمًا عند نقطة حـ التى تبعد ٦٠ مترًا شرق ب وعندما سار من ب إلى أ فى اتجاه ٦٠° شمال الشرق وجد أن النقطة حـ فى اتجاه ١٥° جنوب الشرق من أ

أوجد بعد حـ عن أ «٥٣,٧٩ متر»

١٩ من نقطة أ على شاطئ نهر رصد رجل موقع منزل عند نقطة ب على الضفة الأخرى للنهر فوجدها فى اتجاه ٢٠° شمال الشرق ، ولما سار الرجل بمحاذاة الشاطئ فى اتجاه الشرق مسافة ٣٠٠ متر حتى وصل إلى نقطة حـ وجد أن نقطة ب فى اتجاه ٤٦° شمال الشرق. أوجد عرض النهر لأقرب متر علمًا بأن ضفتى النهر متوازيتان وأن النقط أ ، ب ، حـ فى مستوى أفقى واحد. «١٦٨ مترًا»

٢٠ إذا كان الميناء (أ) يقع شمال الميناء (ب) حيث أ ب = ١٠٠٠ متر ، (حـ) سفينة تقع فى اتجاه ٣٢ َ٤٣ °٥٣ جنوب شرق الميناء (أ) ، تقع فى اتجاه ٤٤ َ٤٢ °٤٢ شمال شرق الميناء (ب) أوجد بُعد السفينة عن الميناء (ب) لأقرب متر. «٥٩٦ مترًا»

---

٢١ تسير سفينة بسرعة ٢٤ كم/ ساعة فى اتجاه الجنوب ، رصد راكب هدفًا ثابتًا فى اتجاه °٦٥ شمال الشرق وبعد ساعة وجد الراكب أن السفينة فى اتجاه °٧٩ جنوب غرب نفس الهدف. أوجد بعد الهدف عن السفينة عندئذ. «٤٢ كم»

---

٢٢ أ ، ب ، حـ ثلاث مدن فى مستوى أفقى واحد ، ب تقع فى اتجاه الجنوب الغربى من أ وعلى بعد ٤٠ كم منها فإذا علم أن أ تقع شمال شرق حـ بزاوية قياسها °٣٥ ، ب تقع شمال شرق حـ بزاوية قياسها °٥ أوجد طول $\overline{أحـ}$ «٥١ كم»

---

٢٣ رصد رجل من نقطة فى المستوى الأفقى المار بقاعدة تل زاوية ارتفاع قمة التل فوجد أن قياسها ١٢َ °٢٧ ولما صعد نحو التل مسافة ٢٠٠٠ متر على مستوى يميل على الأفقى بزاوية قياسها °١٧ وجد أن قياس زاوية ارتفاع قمة التل ١٥َ °٣٦ أوجد ارتفاع التل لأقرب متر. «١٩١٦ مترًا»

---

٢٤ سفينة تسير نحو الشمال الشرقى بسرعة ٢٤ كم/س شاهد راكب فيها نقطتين ثابتتين فى اتجاه °٢٥ غرب الشمال وبعد ٤ ساعات وجد هذا الراكب أن إحدى هاتين النقطتين أصبحت فى اتجاه °٢٣ جنوب الغرب بينما أصبحت النقطة الأخرى فى اتجاه °١٧ شمال الغرب. أوجد البعد بين النقطتين لأقرب كيلو متر علمًا بأن النقطتين والراكب فى مستوى أفقى واحد. «٧٨ كم»

---

٢٥ (البرهنة النظرية) : رصد طيار محطتين أ ، ب للرصد على أرض أفقية حيث أ ب = ف مترًا فوجد أن قياسى زاويتى انخفاضيهما هـ ، ى على الترتيب. إذا كانت الطائرة والمحطتان فى مستوى رأسى واحد وارتفاع الطائرة عندئذ عن الأرض يساوى ع مترًا والمسقط الرأسى للطائرة ∈ $\overline{أب}$

فأثبت أن : $ع = \frac{ف}{ظتا هـ + ظتا ى}$ ، وإذا كان : هـ = ٣١َ °٤٨ ، ى = ١٥َ °٧٥ ، ف = ١٢٩٠ مترًا.

احسب ع «١١٢٤ مترًا»

---

٢٦ (البرهنة النظرية) : يرتكز سلم طوله ل متر بأحد طرفيه على حائط رأسى وبطرفه الآخر على أرض أفقية ويميل السلم على الأفقى بزاوية قياسها ى ، تحرك الطرف الأسفل للسلم مسافة ف متر بعيدًا عن الحائط وأصبح السلم يميل على الأفقى بزاوية قياسها هـ

أثبت أن : $ل = \frac{ف}{جتا هـ - جتا ى}$ وإذا كانت : ف = ٤٠ سم ، هـ = °٣٠ ، ى = °٤٠

فاحسب طول السلم لأقرب متر. «٤ أمتار»



الدرس

2

الدوال المثلثية لمجموع وفرق قياسى زاويتين

> ١ إذا كان أ ، ب قياسى زاويتين فإن :
>
> جا (أ + ب) = جا أ جتا ب + جتا أ جا ب ، جا (أ − ب) = جا أ جتا ب − جتا أ جا ب



البرهان (لا يمتحن فيه الطالب)



من هندسة الشكل المقابل :

مساحة (Δ س ص ع) = مساحة (Δ س ص ء) + مساحة (Δ س ع ء)

∴ $\frac{1}{2}$ صَ عَ جا (أ + ب) = $\frac{1}{2}$ عَ ل جا أ + $\frac{1}{2}$ صَ ل جا ب

(بالقسمة على $\frac{1}{2}$ صَ عَ) ∴ جا (أ + ب) = $\frac{\text{ل}}{\text{صَ}}$ جا أ + $\frac{\text{ل}}{\text{عَ}}$ جا ب

، ∵ جتا ب = $\frac{\text{ل}}{\text{صَ}}$ ، جتا أ = $\frac{\text{ل}}{\text{عَ}}$ ∴ جا (أ + ب) = جا أ جتا ب + جتا أ جا ب **(المطلوب أولاً)**

، بوضع (−ب) بدلاً من ب ∴ جا (أ + (−ب)) = جا أ جتا (−ب) + جتا أ جا (−ب)

∴ جا (أ − ب) = جا أ جتا ب − جتا أ جا ب [لأن جتا (−ب) = جتا ب ، جا (−ب) = − جا ب] **(المطلوب ثانيًا)**

> ٢ إذا كان أ ، ب قياسى زاويتين فإن :
>
> جتا (أ + ب) = جتا أ جتا ب − جا أ جا ب ، جتا (أ − ب) = جتا أ جتا ب + جا أ جا ب

البرهان

نعلم أن : جتا (أ + ب) = جا ($\frac{\pi}{2}$ − (أ + ب))

∴ جتا (أ + ب) = جا (($\frac{\pi}{2}$ − أ) − ب) = جا ($\frac{\pi}{2}$ − أ) جتا ب − جتا ($\frac{\pi}{2}$ − أ) جا ب

∴ $جتا (أ + ب) = جتا أ جتا ب - جا أ جا ب$

[لأن $جا \left(\frac{\pi}{2} - أ\right) = جتا أ$ ، $جتا \left(\frac{\pi}{2} - أ\right) = جا أ$] **(المطلوب أولاً)**

، بوضع $(-ب)$ بدلاً من $ب$ ∴ $جتا (أ + (-ب)) = جتا أ جتا (-ب) - جا أ جا (-ب)$

∴ $جتا (أ - ب) = جتا أ جتا ب + جا أ جا ب$ **(المطلوب ثانيًا)**

٣ إذا كان أ ، ب قياسى زاويتين فإن : $ظا (أ + ب) = \frac{ظا أ + ظا ب}{1 - ظا أ ظا ب}$ ، $ظا (أ - ب) = \frac{ظا أ - ظا ب}{1 + ظا أ ظا ب}$

حيث $أ \neq \frac{\pi}{2}(2ن + 1)$ ، $ب \neq \frac{\pi}{2}(2ن + 1)$ ، $ظا أ ظا ب \neq \pm 1$ على الترتيب ، $ن \in ص$

البرهــان

$$ظا (أ \pm ب) = \frac{جا (أ \pm ب)}{جتا (أ \pm ب)} = \frac{جا أ جتا ب \pm جتا أ جا ب}{جتا أ جتا ب \mp جا أ جا ب}$$

وبقسمة كل من البسط والمقام على جتا أ جتا ب حيث جتا أ $\neq$ صفر ، جتا ب $\neq$ صفر

$$∴ ظا (أ \pm ب) = \frac{\frac{جا أ جتا ب}{جتا أ جتا ب} \pm \frac{جتا أ جا ب}{جتا أ جتا ب}}{\frac{جتا أ جتا ب}{جتا أ جتا ب} \mp \frac{جا أ جا ب}{جتا أ جتا ب}} = \frac{\frac{جا أ}{جتا أ} \pm \frac{جا ب}{جتا ب}}{1 \mp \frac{جا أ}{جتا أ} \times \frac{جا ب}{جتا ب}} = \frac{ظا أ \pm ظا ب}{1 \mp ظا أ ظا ب}$$ **(وهو المطلوب)**

* **ونلخص القوانين السابقة للدوال المثلثية لمجموع وفرق قياسى زاويتين فيما يلى :**

١ $جا (أ \pm ب) = جا أ جتا ب \pm جتا أ جا ب$ | **٢** $جتا (أ \pm ب) = جتا أ جتا ب \mp جا أ جا ب$

٣ $ظا (أ \pm ب) = \frac{ظا أ \pm ظا ب}{1 \mp ظا أ ظا ب}$

مثال ١

بدون استخدام حاسبة الجيب أوجد قيمة كل مما يأتى :

١ جا ١٠٥°	**٢** جا ١٥°	**٣** جتا ٧٥°
٤ جتا (-١٥°)	**٥** ظا ١٠٥°	**٦** ظا (-١٥°)

الحــل

١ $جا 105° = جا (60° + 45°) = جا 60° جتا 45° + جتا 60° جا 45°$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

$$= \frac{\sqrt{3} + 1}{2\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$$

٢ جا ١٥° = جا (٦٠° − ٤٥°) = جا ٦٠° جتا ٤٥° − جتا ٦٠° جا ٤٥°

$= \frac{\sqrt{٣}}{٢} \times \frac{١}{\sqrt{٢}} - \frac{١}{٢} \times \frac{١}{\sqrt{٢}} = \frac{\sqrt{٣} - ١}{٢\sqrt{٢}} \times \frac{\sqrt{٢}}{\sqrt{٢}} = \frac{\sqrt{٦} - \sqrt{٢}}{٤}$

لاحظ أنه : يمكن اعتبار جا ١٥° = جا (٤٥° − ٣٠°) ويكمل الحل.

٣ جتا ٧٥° = جتا (٤٥° + ٣٠°) = جتا ٤٥° جتا ٣٠° − جا ٤٥° جا ٣٠°

$= \frac{١}{\sqrt{٢}} \times \frac{\sqrt{٣}}{٢} - \frac{١}{\sqrt{٢}} \times \frac{١}{٢} = \frac{\sqrt{٣} - ١}{٢\sqrt{٢}} \times \frac{\sqrt{٢}}{\sqrt{٢}} = \frac{\sqrt{٦} - \sqrt{٢}}{٤}$

لاحظ أن : جتا ٧٥° = جا ١٥°

٤ جتا (−١٥°) = جتا ١٥° = جتا (٤٥° − ٣٠°) = جتا ٤٥° جتا ٣٠° + جا ٤٥° جا ٣٠°

$= \frac{١}{\sqrt{٢}} \times \frac{\sqrt{٣}}{٢} + \frac{١}{\sqrt{٢}} \times \frac{١}{٢} = \frac{\sqrt{٣} + ١}{٢\sqrt{٢}} \times \frac{\sqrt{٢}}{\sqrt{٢}} = \frac{\sqrt{٦} + \sqrt{٢}}{٤}$

٥ ظا ١٠٥° = ظا (٦٠° + ٤٥°) $= \frac{ظا ٦٠° + ظا ٤٥°}{١ - ظا ٦٠° ظا ٤٥°} = \frac{\sqrt{٣} + ١}{١ - \sqrt{٣} \times ١} = \frac{\sqrt{٣} + ١}{١ - \sqrt{٣}} \times \frac{١ + \sqrt{٣}}{١ + \sqrt{٣}}$

$= \frac{٣ + ٢\sqrt{٣} + ١}{١ - ٣} = \frac{٤ + ٢\sqrt{٣}}{-٢} = -٢ - \sqrt{٣}$

٦ ظا (−١٥°) = − ظا ١٥° = − ظا (٦٠° − ٤٥°) $= -\left(\frac{ظا ٦٠° - ظا ٤٥°}{١ + ظا ٦٠° ظا ٤٥°}\right)$

$= -\left(\frac{\sqrt{٣} - ١}{١ + \sqrt{٣}} \times \frac{١ - \sqrt{٣}}{١ - \sqrt{٣}}\right) = -\left(\frac{-٤ + ٢\sqrt{٣}}{-٢}\right) = -٢ + \sqrt{٣}$

مثال ٢

بدون استخدام حاسبة الجيب أوجد قيمة كل مما يأتى :

١ جا ١٨° جتا ١٢° + جتا ١٨° جا ١٢°

٢ جا (٦٠° + س) جتا س − جتا (٦٠° + س) جا س

٣ جتا ٧٨° جتا ١٨° + جتا ١٢° جا ١٨°

٤ جتا $\left(\frac{\pi}{٤} - س\right)$ جتا س − جا $\left(\frac{\pi}{٤} - س\right)$ جا س

٥ $\frac{ظا ٢٥° - ظا ١٧٥°}{١ + ظا ٢٥° ظا ١٧٥°}$

٦ $\frac{ظا \frac{\pi}{١٢} + ظا \frac{\pi}{٦}}{١ - ظا \frac{\pi}{١٢} ظا \frac{\pi}{٦}}$

الحل

١ جا ١٨° جتا ١٢° + جتا ١٨° جا ١٢° = جا (١٨° + ١٢°) = جا ٣٠° = $\frac{١}{٢}$

٢ جا (٦٠° + س) جتا س − جتا (٦٠° + س) جا س = جا ((٦٠° + س) − س) = جا ٦٠° = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

٣ ∵ جتا ١٢° = جا ٧٨°

∴ جا ٧٨° جتا ١٨° + جتا ١٢° جا ١٨° = جتا ٧٨° جتا ١٨° + جا ٧٨° جا ١٨°

$= \text{جتا}\,(٧٨° - ١٨°) = \text{جتا}\,٦٠° = \frac{١}{٢}$

٤ $\text{جتا}\left(\frac{\pi}{٤} - \text{س}\right)\text{جتا س} - \text{جا}\left(\frac{\pi}{٤} - \text{س}\right)\text{جا س} = \text{جتا}\left[\left(\frac{\pi}{٤} - \text{س}\right) + \text{س}\right]$

$= \text{جتا}\,\frac{\pi}{٤} = \text{جتا}\,٤٥° = \frac{١}{\sqrt{٢}}$

٥ $\frac{\text{ظا}\,٢٥° - \text{ظا}\,١٧٥°}{١ + \text{ظا}\,٢٥°\,\text{ظا}\,١٧٥°} = \text{ظا}\,(٢٥° - ١٧٥°) = \text{ظا}\,(-١٥٠°) = -\text{ظا}\,١٥٠° = -\text{ظا}\,(١٨٠° - ٣٠°)$

$= -(-\text{ظا}\,٣٠°) = \text{ظا}\,٣٠° = \frac{١}{\sqrt{٣}} \times \frac{\sqrt{٣}}{\sqrt{٣}} = \frac{\sqrt{٣}}{٣}$

٦ $\frac{\text{ظا}\,\frac{\pi}{١٢} + \text{ظا}\,\frac{\pi}{٦}}{١ - \text{ظا}\,\frac{\pi}{١٢}\,\text{ظا}\,\frac{\pi}{٦}} = \text{ظا}\left(\frac{\pi}{١٢} + \frac{\pi}{٦}\right) = \text{ظا}\,\frac{٣\pi}{١٢} = \text{ظا}\,\frac{١}{٤}\pi = \text{ظا}\,٤٥° = ١$

مثال ٣

أثبت أن : ١ $\text{ظا}\,٥٠° = \frac{١ + \text{ظا}\,٥°}{١ - \text{ظا}\,٥°}$ | ٢ جا (٣٠° − أ) + جتا (أ − ٦٠°) = جا (٩٠° + أ)

٣ $\frac{\text{جا ٩ س جتا ٤ س} - \text{جتا ٩ س جا ٤ س}}{\text{جتا ٧ س جتا ٢ س} + \text{جا ٧ س جا ٢ س}} = \text{ظا ٥ س}$

الحل

١ الطرف الأيمن = ظا ٥٠° = $\text{ظا}\,(٤٥° + ٥°) = \frac{\text{ظا}\,٤٥° + \text{ظا}\,٥°}{١ - \text{ظا}\,٤٥°\,\text{ظا}\,٥°} = \frac{١ + \text{ظا}\,٥°}{١ - \text{ظا}\,٥°}$ = الطرف الأيسر.

٢ الطرف الأيمن = جا ٣٠° جتا أ − جتا ٣٠° جا أ + جتا أ جتا ٦٠° + جا أ جا ٦٠°

$= \frac{١}{٢}\,\text{جتا أ} - \frac{\sqrt{٣}}{٢}\,\text{جا أ} + \frac{١}{٢}\,\text{جتا أ} + \frac{\sqrt{٣}}{٢}\,\text{جا أ} = \text{جتا أ}$

، الطرف الأيسر = جا (٩٠° + أ) = جتا أ ∴ الطرفان متساويان.

٣ الطرف الأيمن = $\frac{\text{جا}\,(٩\text{ س} - ٤\text{ س})}{\text{جتا}\,(٧\text{ س} - ٢\text{ س})} = \frac{\text{جا ٥ س}}{\text{جتا ٥ س}}$ = ظا ٥ س = الطرف الأيسر.

مثال ٤

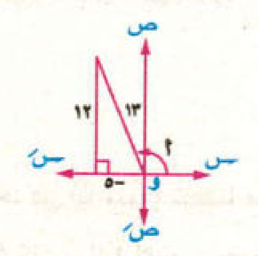
إذا كانت : جا أ = $\frac{١٢}{١٣}$ ، أ ∈ $]\frac{\pi}{٢}، \pi[$ ، جتا ب = $\frac{٤}{٥}$ ، $٠ < \text{ب} < \frac{\pi}{٢}$

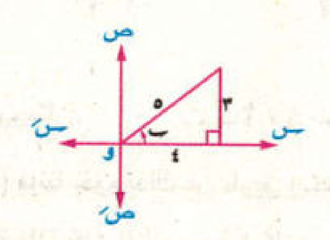
فأوجد بدون استخدام الآلة الحاسبة قيمة كل من :

١ جا (أ + ب) ٢ جتا (أ − ب) ٣ ظا (أ + ب)

الحـــل

أ قياس زاوية فى الربع الثانى ، ب قياس زاوية فى الربع الأول





١ $\text{جا}(\text{أ}+\text{ب}) = \text{جا أ جتا ب} + \text{جتا أ جا ب} = \frac{١٢}{١٣}\times\frac{٤}{٥} + \frac{-٥}{١٣}\times\frac{٣}{٥} = \frac{٣٣}{٦٥}$

٢ $\text{جتا}(\text{أ}-\text{ب}) = \text{جتا أ جتا ب} + \text{جا أ جا ب} = \frac{-٥}{١٣}\times\frac{٤}{٥} + \frac{١٢}{١٣}\times\frac{٣}{٥} = \frac{١٦}{٦٥}$

٣ $\text{ظا}(\text{أ}+\text{ب}) = \frac{\text{ظا أ} + \text{ظا ب}}{١ - \text{ظا أ ظا ب}} = \frac{-\frac{١٢}{٥}+\frac{٣}{٤}}{١ - \left(\frac{-١٢}{٥}\right)\left(\frac{٣}{٤}\right)} = \frac{-٣٣}{٥٦}$

مثال ٥

إذا كانت : $\text{ظا أ} = \frac{٢}{٣}$ ، $\text{ظا ب} = \frac{١}{٥}$ **فاثبت أن :** $\text{أ} + \text{ب} = ٤٥^\circ$ حيث أ ، ب قياسا زاويتين حادتين.

الحـــل

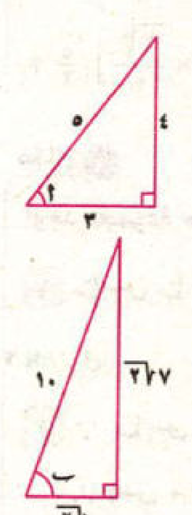
$\text{ظا}(\text{أ}+\text{ب}) = \frac{\text{ظا أ} + \text{ظا ب}}{١ - \text{ظا أ ظا ب}} = \frac{\frac{٢}{٣} + \frac{١}{٥}}{١ - \frac{٢}{٣} \times \frac{١}{٥}} = ١$ $\quad \therefore \text{أ} + \text{ب} = ٤٥^\circ$

مثال ٦

أ ب حـ مثلث حاد الزوايا فيه : $\text{جا أ} = \frac{٤}{٥}$ ، $\text{جتا ب} = \frac{\sqrt{٢}}{١٠}$

بدون استخدام حاسبة الجيب أوجد : جا حـ ثم استنتج ق (∠ حـ)

الحـــل



بفرض أن : أ ، ب ، حـ قياسات زوايا المثلث أ ب حـ

$\therefore \text{أ} + \text{ب} + \text{حـ} = ١٨٠^\circ$

$\therefore \text{حـ} = ١٨٠^\circ - (\text{أ} + \text{ب})$

$\therefore \text{جا حـ} = \text{جا}\left[١٨٠^\circ - (\text{أ}+\text{ب})\right] = \text{جا}(\text{أ}+\text{ب})$

$= \text{جا أ جتا ب} + \text{جتا أ جا ب}$

$= \frac{٤}{٥} \times \frac{\sqrt{٢}}{١٠} + \frac{٣}{٥} \times \frac{٧\sqrt{٢}}{١٠} = \frac{\sqrt{٢}}{٢}$

$\therefore$ ق (∠ حـ) $= ٤٥^\circ$

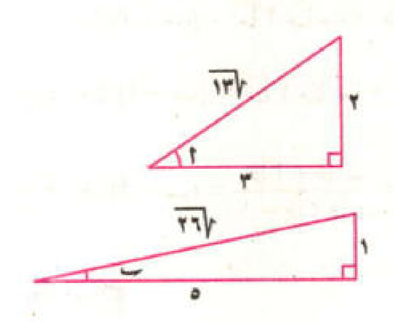
مثال ٧

أ ب حـ مثلث فيه : $\text{جتا } أ = \frac{٣}{\sqrt{١٣}}$ ، $\text{جتا } ب = \frac{٥}{\sqrt{٢٦}}$ **بدون استخدام حاسبة الجيب أوجد : ق (∠ حـ)**

الحل

∵ جتا أ ، جتا ب موجبتان. ∴ ∠ أ ، ∠ ب حادتان.

∴ لإيجاد ق (∠ حـ) فإننا نقوم بذلك عن طريق إيجاد جتا حـ أ ، ظا حـ لأن أيًا منهما تمكننا من التفرقة بين الزاوية الحادة والمنفرجة فإذا كان الناتج موجبًا كانت ∠ حـ حادة، وإذا كان سالبًا كانت ∠ حـ منفرجة.



∵ أ + ب + حـ = ١٨٠°

∴ حـ = ١٨٠° − (أ + ب)

∴ ظا حـ = ظا [١٨٠° − (أ + ب)] = − ظا (أ + ب)

$$= - \frac{\text{ظا } أ + \text{ظا } ب}{١ - \text{ظا } أ \text{ ظا } ب} = - \frac{\frac{٢}{٣} + \frac{١}{٥}}{١ - \frac{٢}{٣} \times \frac{١}{٥}} = -١$$

∴ ق (∠ حـ) = ١٣٥°

مثال ٨

إذا كانت شدة التيار الكهربائى (ت) تعطى بالعلاقة : ت = $\frac{٥}{٢}$ جا (١٠٥° ن) حيث ن الزمن بالثانية

أوجد بدون استخدام الآلة الحاسبة شدة التيار الكهربائى بعد ثانية واحدة.

الحل

∵ ت = $\frac{٥}{٢}$ جا (١٠٥° ن) بوضع ن = ١ ∴ ت = $\frac{٥}{٢}$ جا (١٠٥°)

∴ ت = $\frac{٥}{٢}$ جا (٦٠° + ٤٥°) = $\frac{٥}{٢}$ (جا ٦٠° جتا ٤٥° + جتا ٦٠° جا ٤٥°)

$$= \frac{٥}{٢} \left[\frac{\sqrt{٣}}{٢} \times \frac{١}{\sqrt{٢}} + \frac{١}{٢} \times \frac{١}{\sqrt{٢}} \right] = \frac{٥}{٢} \times \frac{\sqrt{٣} + ١}{٢\sqrt{٢}} \times \frac{\sqrt{٢}}{\sqrt{٢}} = \frac{٥}{٨} \left(\sqrt{٦} + \sqrt{٢} \right)$$

مثال ٩

أوجد مجموعة حل كل من المعادلتين الآتيتين حيث : ٠° < س < ٣٦٠° :

١ جتا س جتا ٣٥° − جا س جا ٣٥° = $\frac{١}{٢}$ | **٢** ظا س + ظا ٤٢° + ظا س ظا ٤٢° = ١

الحل

١ ∵ جتا س جتا ٣٥° − جا س جا ٣٥° = $\frac{١}{٢}$ ∴ جتا (س + ٣٥°) = $\frac{١}{٢}$ (موجبة)

∴ (س + ٣٥°) تقع فى الربع الأول أو الرابع

، ∵ الزاوية الحادة التى جيب تمامها يساوى $\frac{1}{2}$ قياسها $60°$

∴ س + $35°$ = $60°$ ومنها س = $25°$

أ، س + $35°$ = $360°$ − $60°$ = $300°$ ومنها س = $265°$ ∴ مجموعة الحل = {$25°$ ، $265°$}

٢ ∵ طاس + طا $42°$ + طاس طا $42°$ = ١ ∴ طاس + طا $42°$ = ١ − طاس طا $42°$

∴ $\frac{\text{طاس} + \text{طا } 42°}{1 - \text{طاس طا } 42°} = 1$ ∴ طا (س + $42°$) = ١ (موجبة)

∴ (س + $42°$) تقع فى الربع الأول أو الثالث

، ∵ الزاوية الحادة التى ظلها يساوى ١ قياسها $45°$ ∴ س + $42°$ = $45°$ ومنها س = $3°$

أ، س + $42°$ = $180°$ + $45°$ = $225°$ ومنها س = $183°$ ∴ مجموعة الحل = {$3°$ ، $183°$}

مثال ١٠

إذا كان أ ، ب قياسى زاويتين حادتين حيث أ + ب = $120°$ وكان ٢ حا أ = ($\sqrt{3}$ + ١) حا ب

فأوجد : أ ، ب

الحل

∵ أ + ب = $120°$ ∴ أ = $120°$ − ب

، ∵ ٢ حا أ = ($\sqrt{3}$ + ١) حا ب ∴ ٢ حا ($120°$ − ب) = ($\sqrt{3}$ + ١) حا ب

∴ ٢ (حا $120°$ حتا ب − حتا $120°$ حا ب) = ($\sqrt{3}$ + ١) حا ب

∴ ٢ ($\frac{\sqrt{3}}{2}$ حتا ب − $\frac{-1}{2}$ حا ب) = ($\sqrt{3}$ + ١) حا ب ∴ $\sqrt{3}$ حتا ب + حا ب = $\sqrt{3}$ حا ب + حا ب

∴ حتا ب = حا ب ∴ $\frac{\text{حا ب}}{\text{حتا ب}} = 1$

∴ طا ب = ١ ∴ ب = $45°$ ، أ = $75°$

مثال ١١

أ ب حـ مثلث قائم الزاوية فى ب فيه : أ ب = ٥ سم ، أ حـ = ١٣ سم أخذت نقطة ء ∈ $\overline{\text{أ ب}}$ بحيث أ ء = ٣ سم

فإذا كان ق (∠ أ حـ ء) = س **فأوجد بدون استخدام الآلة الحاسبة :** طا س

الحل

ب حـ = $\sqrt{(13)^2 - (5)^2}$ = ١٢ سم

وبفرض ق (∠ أ حـ ب) = ل ، ق (∠ ء حـ ب) = م

∴ طا س = طا (ل − م) = $\frac{\text{طا ل} - \text{طا م}}{1 + \text{طا ل طا م}} = \frac{\frac{5}{12} - \frac{2}{12}}{1 + \frac{5}{12} \times \frac{2}{12}} = \frac{18}{77}$



تمارين 17 على الدوال المثلثية لمجموع وفرق قياسي زاويتين

من أسئلة الكتاب المدرس • فهم • تطبيق • مستويات عليا

أولاً أسئلة الاختيار من متعدد

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

① جتا أ جتا ب + جا أ جا ب = ...

(أ) جا (أ + ب) (ب) جا (أ − ب) (جـ) جتا (أ + ب) (د) جتا (أ − ب)

② جا أ جتا ب − جتا أ جا ب = ...

(أ) جا (أ + ب) (ب) جتا (أ + ب) (جـ) جا (أ − ب) (د) جتا (أ − ب)

③ جا (أ + ب) + جا (أ − ب) = ...

(أ) ٢ جا أ (ب) ٢ جا^{٢} أ (جـ) ٢ جتا أ جا أ (د) ٢ جا أ جتا ب

④ جا $\frac{\pi}{٩}$ جتا $\frac{\pi}{١٨}$ + جتا $\frac{\pi}{٩}$ جا $\frac{\pi}{١٨}$ = ...

(أ) $\frac{١}{٢}$ (ب) ٢ (جـ) $\frac{\sqrt{٢}}{٢}$ (د) $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

⑤ إذا كان : $\frac{\text{ظا س} - \text{ظا ص}}{١ + \text{ظا س ظا ص}} = ٢$ فإن : ظا (س − ص) = ...

(أ) $\frac{١}{٢}$ (ب) ٢ (جـ) $\sqrt{٢}$ (د) $\frac{\sqrt{٣}}{٣}$

⑥ $\frac{\text{ظا }٥٠° + \text{ظا }١٠°}{١ - \text{ظا }٥٠° \text{ ظا }١٠°}$ = ...

(أ) ظا ٤٠° (ب) ظا ٦٠°

(جـ) ظا ٥٠° × ظا ١٠° (د) ٢ ظا ٥٠° ظا ١٠°

⑦ $\frac{١ + \text{ظا أ}}{١ - \text{ظا أ}}$ = ...

(أ) ظا $\left(\frac{\pi}{٤} + \text{أ}\right)$ (ب) ظا $\left(\frac{٣\pi}{٤} + \text{أ}\right)$ (جـ) ظا $\left(\frac{\pi}{٢} + \text{أ}\right)$ (د) ظا $\left(\frac{٥\pi}{٤} - \text{أ}\right)$

⑧ إذا كان : ظا ٢٠° = أ ، ظتا ١٥° = ب فإن : ظا ٣٥° = ...

(أ) $\frac{\text{أب} - ١}{\text{ب} - \text{أ}}$ (ب) $\frac{\text{أ} - \text{ب}}{\text{أب} - ١}$ (جـ) $\frac{\text{أب} + ١}{\text{ب} - \text{أ}}$ (د) $\frac{\text{أب} + ١}{\text{ب} + \text{أ}}$

⑨ جا $\left(\theta + \frac{\pi}{٦}\right)$ = ...

(أ) $\frac{١}{٢}$ (جتا θ + $\sqrt{٣}$ جا θ) (ب) $\frac{١}{٢}$ (جتا θ + جا θ)

(جـ) $\frac{١}{٢}$ ($\sqrt{٣}$ جتا θ + جا θ) (د) $\frac{١}{٢}$ ($\sqrt{٣}$ جتا θ + $\sqrt{٢}$ جا θ)

(١٠) حا ٥ س حا ٣ س + حتا ٥ س حتا ٣ س = ...

(أ) حتا ٢ س (ب) حتا ٨ س (جـ) حا ٨ س (د) حا ٢ س

(١١) إذا كان : طا θ = $\frac{١}{٢}$ فإن : طا (θ + ٤٥°) = ...

(أ) $\frac{١}{٢}$ (ب) $\frac{٣}{٢}$ (جـ) ٣ (د) ٦

(١٢) ا ب حـ مثلث حاد الزوايا فيه : حا ا = $\frac{٣}{١٠ \text{ حتا ب}}$ ، حتا ا = $\frac{١}{٥ \text{ حا ب}}$

فإن : ق (د حـ) = ...

(أ) ١٥° (ب) ٤٥° (جـ) ٣٠° (د) ٦٠°

(١٣) Δ ا ب حـ فيه : طا $\frac{ا}{٢}$ = $\frac{١}{٣}$ ، طا $\frac{ب}{٢}$ = $\frac{٢}{٣}$ فإن : طا $\frac{حـ}{٢}$ = ...

(أ) $\frac{١}{٣}$ (ب) $\frac{٢}{٣}$ (جـ) $\frac{٧}{٩}$ (د) ١

(١٤) إذا كان : طا ا = $\frac{١}{٢}$ ، طا ب = $\frac{١}{٣}$ فإن : طا (ا + ب) = ...

(أ) ١ (ب) $\frac{-٥}{٦}$ (جـ) $\frac{١}{٦}$. (د) $\frac{٥}{٦}$

(١٥) طتا ($٢\pi - \frac{٥\pi}{١٢}$) = ...

(أ) ٢ + $\sqrt{٣}$ (ب) ٢ − $\sqrt{٣}$ (جـ) −٢ − $\sqrt{٣}$ (د) $\sqrt{٣}$ − ٢

(١٦) حا ٨٧° حتا ٢٧° − حتا ٨٧° حا ٢٧° = ...

(أ) حا ٦٠° (ب) حتا ٦٠° (جـ) حا ١١٤° (د) حتا ١١٤°

(١٧) مجموعة حل المعادلة : حا س حتا ٤٥° − حتا س حا ٤٥° = $\frac{١}{٢}$ حيث ٠° < س < ٣٦٠°

تساوى ....

(أ) {٣٠° ، ١٥٠°} (ب) {٣٠°} (جـ) {٧٥° ، ١٩٥°} (د) {٧٥° ، ١٠٥°}

(١٨) $\sqrt{٢}$ حتا (ا − ٤٥°) = ...

(أ) حا ا + حتا ا (ب) حا ا − حتا ا (جـ) حا ا حتا ا (د) طا ا + طتا ا

(١٩) إذا كانت : ∠ ا تكمل ∠ ب فإن : حتا ا حتا ب − حا ا حا ب = ...

(أ) −١ (ب) ١٨٠ (جـ) ١ (د) صفر

(٢٠) إذا كانت : حتا ا = ٠,٦ ، حتا ب = ٠,٨ ، حيث ا ، ب قياسا زاويتين حادتين

فإن : حتا (ا − ب) = ...

(أ) $\frac{٢٤}{٢٥}$ (ب) $\frac{٧}{٢٤}$ (جـ) $\frac{٧}{٢٥}$ (د) $\frac{٢\sqrt{٦}}{٥}$

(٢١) حتا س حتا (س + $\frac{\pi}{٣}$) + حا س حا (س + $\frac{\pi}{٣}$) = ...

(أ) $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ (ب) $\frac{١}{٢}$ (جـ) $\frac{-\sqrt{٣}}{٢}$ (د) $\frac{-١}{٢}$

(٢٢) إذا كان : طا ا + طا ب = ٤ − ٤ طا ا طا ب فإن : طا (ا + ب) = ...

(أ) $\frac{١}{٢}$ (ب) ٤ (جـ) ١ (د) ٢

(٢٣) $\frac{\text{طا}(\text{أ}-\text{ب}) + \text{طا ب}}{1 - \text{طا}(\text{أ}-\text{ب})\ \text{طا ب}} = \ldots\ldots$

(أ) طا أ (ب) − طا (أ + ب) (جـ) طا (أ + ب) (د) − طا ب

(٢٤) Δ أ ب حـ فيه : جتا أ = $\frac{-3}{5}$ ، جا ب = $\frac{5}{13}$ فإن : جا حـ = ...

(أ) $\frac{32}{65}$ (ب) $\frac{17}{65}$ (جـ) $\frac{33}{65}$ (د) $\frac{3}{13}$

(٢٥) إذا كانت : ∠ أ ، ∠ ب زاويتين حادتين ، طا أ = $\frac{5}{6}$ ، طا ب = $\frac{1}{11}$ فإن : أ + ب = ...

(أ) 30° (ب) 45° (جـ) 60° (د) 90°

(٢٦) إذا كان : طا س + طا ص = ٤ ، ظتا س + ظتا ص = $\frac{2}{3}$ فإن : طا (س + ص) = ...

(أ) $\frac{-3}{4}$ (ب) $\frac{-4}{5}$ (جـ) $\frac{3}{5}$ (د) ١

(٢٧) جا (س − 60°) + جتا (س − 30°) = ...

(أ) جا س (ب) جتا س

(جـ) جا (س + 30°) (د) جتا (س + 60°)

(٢٨) إذا كانت جتا (أ − ب) = $\frac{3}{5}$ ، طا أ طا ب = ٢ فإن : ......

(أ) جتا أ جتا ب = $\frac{1}{5}$ (ب) جا أ جا ب = $\frac{-2}{5}$ (جـ) جتا (أ + ب) = $\frac{1}{5}$ (د) جا أ جا ب = $\frac{4}{5}$

(٢٩) إذا كان : س + ص = $\frac{5\pi}{6}$ فإن : (جا س − جتا ص)^2 + (جتا س − جا ص)^2 = ...

(أ) ١ (ب) $\frac{3}{2}$ (جـ) ٢ (د) ٣

(٣٠) إذا كان أ ب حـ مثلث فيه : جا أ + جا ب جتا حـ + جتا ب جا حـ = $\sqrt{3}$

فإن : ق (∠ أ) يمكن أن تكون ......

(أ) 30° (ب) 45° (جـ) 60° (د) 90°

(٣١) $\frac{\text{جا } 2\text{س}}{\text{جا س}} - \frac{\text{جتا } 2\text{س}}{\text{جتا س}} = \ldots\ldots$

(أ) قا س (ب) قتا س (جـ) جا^2 س (د) جتا^2 س

(٣٢) طا أ − طا ب = $\frac{\ldots\ldots}{\text{جتا أ جتا ب}}$

(أ) جا (أ + ب) (ب) جا (أ − ب) (جـ) جتا (أ − ب) (د) جا أ − جا ب

(٣٣) إذا كان : قا أ = $\frac{5}{4}$ ، قتا ب = $\frac{13}{5}$ حيث أ ، ب قياسا زاويتين حادتين

فإن : قا (أ − ب) = ...

(أ) $\frac{56}{65}$ (ب) $\frac{63}{65}$ (جـ) $\frac{-33}{65}$ (د) $\frac{65}{63}$

(٣٤) إذا كان : طا^2 أ = $\frac{9}{16}$ حيث أ ∈] ٠ ، $\frac{\pi}{2}$ [، طا^2 ب = $\frac{1}{9}$ حيث ب ∈] $\frac{\pi}{2}$ ، π [

فإن : طا (أ + ب) = ...

(أ) $\frac{1}{3}$ (ب) $\frac{2}{3}$ (جـ) $\frac{1}{9}$ (د) $\frac{2}{9}$

(٣٥) إذا كان : $ظا ٢ = س + ١$ ، $ظا ب = س - ١$ فإن : $ظتا (٢ - ب) = ...$

(أ) $\frac{٢}{س^٢}$ (ب) $\frac{١}{٢} س^٢$ (جـ) $س^٢$ (د) $\frac{١}{س^٢}$

(٣٦) إذا كان ٢ ، ب قياسى زاويتين حادتين وكان : $حا ٢ حا ب = \frac{١}{٢}$ ، $حتا ٢ حتا ب = \frac{١}{٣}$

فإن : $حتا (٢ - ب) = ...$

(أ) $\frac{١}{٦}$ (ب) $\frac{٥}{٦}$ (جـ) $\frac{٢}{٣}$ (د) $\frac{-١}{٦}$

(٣٧) إذا كان : $ظا (\theta + ٤٥°) = \frac{٣}{٢}$ فإن : $ظا \theta = ...$

(أ) $-\frac{١}{٥}$ (ب) $\frac{١}{٥}$ (جـ) $\frac{١}{٢}$ (د) ١

(٣٨) إذا كان : $٠ < ص < \frac{\pi}{٢}$ ، $س + ص = \frac{\pi}{٤}$ ، $حا ص = \frac{١}{\sqrt{١٠}}$

فإن : $ظا (٣ س + ٤ ص) = ...$

(أ) ١ (ب) $\frac{١}{٢}$ (جـ) $\frac{-١}{٢}$ (د) -١

(٣٩) إذا كان : $ظا (حـ - ٣٠°) = \frac{٢ ظا حـ - ١}{٢ + ظا حـ}$ فإن : $٢ = ...$

(أ) $\sqrt{٣}$ (ب) $\frac{١}{\sqrt{٣}}$ (جـ) $\frac{-١}{\sqrt{٣}}$ (د) $-\sqrt{٣}$

(٤٠) إذا كانت : $س \in [٠ ، ٢ \pi]$ وكان : $\frac{ظا س - ظتا ٥٥°}{١ + ظا س ظتا ٥٥°} = ١$ فإن : $س = ...$

(أ) $\frac{\pi}{٩}$ فقط. (ب) $\frac{٤ \pi}{٩}$ فقط. (جـ) $\frac{٤ \pi}{٩}$ أ، $\frac{١٣ \pi}{٩}$ (د) $\frac{١٠ \pi}{٩}$ أ، $\frac{١١ \pi}{٩}$

(٤١) إذا كان : $١ + حتا س حتا ص + حا س حا ص = ٠$ فإن : ....

(أ) $س - ص = -١$ (ب) $س + ص = ١$

(جـ) $حتا س - حتا ص = ٠$ (د) $حتا س + حتا ص = ٠$

(٤٢) إذا كان : $ظتا س - ظتا ص = -٥$ ، $ظا س ظا ص = \frac{١}{٢}$ فإن : $ظا (س - ص) = ...$

(أ) $\frac{٢}{٣}$ (ب) $\frac{٥}{٣}$ (جـ) $\frac{٣}{٢}$ (د) $\frac{٥}{٢}$

(٤٣) إذا كانت : $س + ص = ٢٢٥°$ فإن : $(١ + ظا س) (١ + ظا ص) = ...$

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) ٤ (د) $\frac{١}{٢}$

(٤٤) إذا كانت : $٠ \leq س < \pi$ فإن مجموعة حل المعادلة : $حا \left(س - \frac{٤ \pi}{٣}\right) = ٢ حا \left(س - \frac{\pi}{٣}\right)$

هى ....

(أ) $\left\{ \frac{\pi}{٢} \right\}$ (ب) $\left\{ \frac{\pi}{٣} \right\}$ (جـ) $\left\{ \frac{\pi}{٤} \right\}$ (د) $\left\{ \frac{\pi}{٦} \right\}$

(٤٥) إذا كان : $٢ + ب = ٣ (حـ + ء) = ١٨٠°$

فإن : $\frac{حا ٢ حا ب + حا (٢٧٠° - ٢) حا (٩٠° - ب)}{حتا حـ حتا ء - حتا (٢٧٠° + حـ) حا (١٨٠° - ء)} = ...$

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) -١ (د) $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

(٤٦) فى Δ أ ب حـ : قتا أ (حا ب حتا حـ + حتا ب حا حـ) يساوى ....

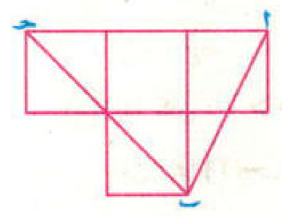
(أ) $\frac{حـ}{أ}$ (ب) $\frac{أ}{حـ}$ (جـ) ١ (د) طا أ

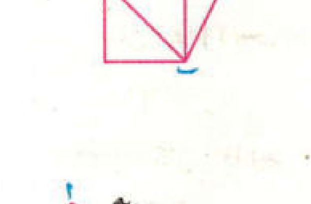
(٤٧) $\frac{حا (أ - ب)}{حا أ حا ب} + \frac{حا (ب - حـ)}{حا ب حا حـ} + \frac{حا (حـ - أ)}{حا حـ حا أ} = ...$

(أ) صفر (ب) ١

(جـ) حا أ + حا ب + حا حـ (د) حا أ حا ب حا حـ

(٤٨) فى الشكل المقابل :





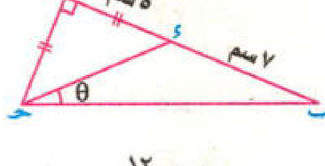
أربعة مربعات متطابقة

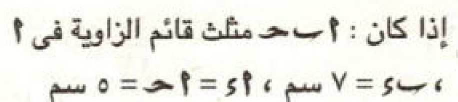
طا (∠ أ ب حـ) = ...

(أ) $\frac{١}{٣}$ (ب) $\frac{١}{٢}$

(جـ) ٢ (د) ٣

(٤٩) فى الشكل المقابل :





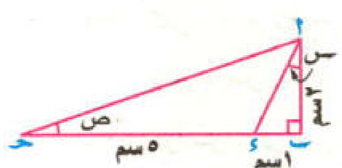
إذا كان : أ ب حـ مثلث قائم الزاوية فى أ

، ب ء = ٧ سم ، أ ء = أ حـ = ٥ سم

فإن : طا θ = ...

(أ) $\frac{٧}{١٧}$ (ب) $\frac{٥}{١٣}$ (جـ) $\frac{٥}{١٢}$ (د) $\frac{١٢}{٣٥}$

(٥٠) فى الشكل المقابل :



إذا كان : أ ب حـ مثلث قائم الزاوية فى ب



حيث أ ب = ٢ سم ، ب ء = ١ سم ، ء حـ = ٥ سم

فإن : س + ص = ...

(أ) °١٥ (ب) °٣٠ (جـ) °٤٥ (د) °٦٠

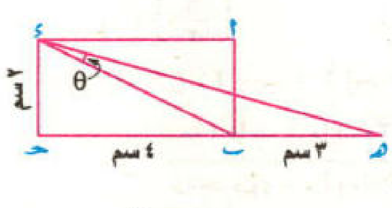
(٥١) فى الشكل المقابل :

إذا كانت : حـ ∈ $\overline{ب ء}$

فإن : حا θ = ...

(أ) $\frac{٥٦}{٦٥}$ (ب) $\frac{١٦}{٦٥}$ (جـ) $\frac{٦٤}{٦٥}$ (د) $\frac{٢}{٧}$

(٥٢) فى الشكل المقابل :



أ ب حـ ء مستطيل ، هـ ∈ $\overleftarrow{حـ ب}$

بحيث ب هـ = ٣ سم

فإن : طا θ = ...

(أ) $\frac{٣}{١٦}$ (ب) $\frac{١}{٢}$ (جـ) $\frac{٢}{٧}$ (د) $\frac{٣}{١٤}$

(٥٣) فى الشكل المقابل :

θ = ... °

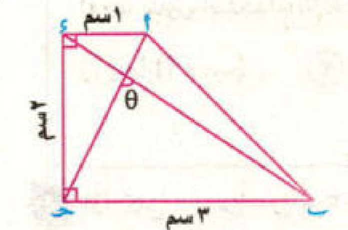
(أ) ٣٠   (ب) ٤٥

(جـ) ٦٠   (د) ٧٥

(٥٤) فى الشكل المقابل :

أ ب جـ ء مربع طول ضلعه ٤ سم

، طا θ = ...



(أ) $\frac{-11}{2}$ (ب) ٣

(جـ) $\frac{-3}{8}$ (د) $\frac{23}{3}$

(٥٥) فى الشكل المقابل :

ظتا θ = ...

(أ) ٨   (ب) ٤

(جـ) $\frac{1}{4}$ (د) $\frac{1}{8}$

ثانيًا الأسئلة المقالية

١ بدون استخدام الآلة الحاسبة أوجد قيمة كل مما يأتى :

(١) حتا ١٠٥° « $\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$ »   (٢) حا ٧٥° « $\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$ »

(٣) حتا ٣٤٥° « $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ »   (٤) طا (−٧٥°) « $-2-\sqrt{3}$ »

(٥) حا $\frac{11\pi}{12}$ « $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ »   (٦) طا $\frac{7\pi}{12}$ « $-2-\sqrt{3}$ »

---

٢ بدون استخدام الآلة الحاسبة أوجد قيمة كل مما يأتى فى أبسط صورة :

(١) حتا ١٠٥° حتا ١٥° + حا ١٠٥° حا ١٥° «صفر»   (٢) حا ٧٥° حتا ١٥° + حتا ٧٥° حا ١٥° «١»

(٣) حا $\frac{7\pi}{12}$ حتا $\frac{5\pi}{12}$ − حتا $\frac{7\pi}{12}$ حا $\frac{5\pi}{12}$ « $\frac{1}{2}$ »   (٤) حتا $\frac{5\pi}{12}$ حتا $\frac{\pi}{12}$ − حا $\frac{5\pi}{12}$ حا $\frac{\pi}{12}$ «صفر»

(٥) حتا ٥٨َ ١٣° حتا ٢َ ٣١° − حا ٥٨َ ١٣° حا ٢َ ٣١° « $\frac{1}{\sqrt{2}}$ »   (٦) $\frac{\text{طا } 30° + \text{طا } 15°}{1 - \text{طا } 30° \text{ طا } 15°}$ «١»

(٧) $\frac{\text{طا } \frac{2\pi}{3} + \text{طا } \frac{\pi}{12}}{1 - \text{طا } \frac{2\pi}{3} \text{ طا } \frac{\pi}{12}}$ «−١»   (٨) $\frac{\text{طا } 15° - \text{طا } 150°}{1 + \text{طا } 15° \text{ طا } 150°}$ «١»

⑨ $جا ١١٠° جا ١٣٠° - جتا ١١٠° جتا ١٣٠°$ «$\frac{١}{٢}$»

⑩ $جا ٣٩° جتا ٩° - جا ٥١° جتا ٨١°$ «$\frac{١}{٢}$»

⑪ $\frac{جا ٢٠° جتا ٢٥° + جتا ٢٠° جا ٢٥°}{جتا ١٠° جتا ٣٥° - جتا ٨٠° جتا ٥٥°}$ «١»

⑫ $\frac{ظا ٢٥° + ظتا ٧٠°}{١ - ظتا ٦٥° ظا ٢٠°}$ «١»

---

٣ اختصر كلًا مما يأتي :

① $جتا ٣ س جتا ٢ س - جا ٣ س جا ٢ س$ «$جتا ٥ س$»

② $جا (س + ص) جتا ص - جتا (س + ص) جا ص$ «$جا س$»

③ $جا (٢٥° + س) جتا (٢٠° - س) + جتا (٢٥° + س) جا (٢٠° - س)$ «$\frac{١}{\sqrt{٢}}$»

④ $جتا (أ - ب) - جتا (أ + ب)$ «$٢ جا أ جا ب$»

⑤ $\frac{ظا (٤٠° - س) + ظا (٥° + س)}{١ - ظا (٤٠° - س) ظا (٥° + س)}$ «١»

---

٤ إذا كان : أ ، ب زاويتين حادتين حيث : $جتا أ = \frac{٣}{٥}$ ، $ظا ب = \frac{٨}{١٥}$

أوجد بدون استخدام الآلة الحاسبة قيمة كل من :

① $جا (أ + ب)$ ② $ظا (أ - ب)$ ③ $قا (أ - ب)$ ④ $ظتا (أ + ب)$

«$\frac{٨٤}{٨٥}$ ، $\frac{٣٦}{٧٧}$ ، $\frac{٨٥}{٧٧}$ ، $\frac{١٣}{٨٤}$»

---

٥ إذا كان : ٥ جتا س + ٣ = صفر حيث $س \in]٠ ، \pi[$ ، $جتا ص = \frac{١٢}{١٣}$ حيث $ص \in]\pi ، ٢\pi[$

فأوجد قيمة :

① $جا (س - ص)$ ② $جتا (س - ص)$ ③ $ظا (س + ص)$

«$\frac{٣٣}{٦٥}$ ، $\frac{-٥٦}{٦٥}$ ، $\frac{-٦٣}{١٦}$»

---

٦ إذا كان : $جا أ = \frac{٣}{٥}$ حيث : $٠° < أ < ٩٠°$ ، $ظا ب = -٧$ حيث $٩٠° < ب < ١٨٠°$

أثبت أن : $أ + ب = ١٣٥°$

---

٧ إذا علمت أن : $جا أ = \frac{-٨}{١٧}$ حيث $١٨٠° < أ < ٢٧٠°$ ، $جتا ب = \frac{-٥}{١٣}$ حيث $٩٠° < ب < ١٨٠°$

أوجد بدون استخدام الآلة الحاسبة قيمة كل من :

① $جتا (أ - ب)$ ② $جا (أ + ب)$ ③ $ظا (أ - ب)$

«$\frac{-٢١}{٢٢١}$ ، $\frac{-١٤٠}{٢٢١}$ ، $\frac{-٢٢٠}{٢١}$»

---

٨ إذا كان : $قا أ = \frac{١٣}{٥}$ حيث $٠ < أ < \frac{\pi}{٢}$ ، $ظا ب = \frac{-٣}{٤}$ حيث $ب \in]\frac{\pi}{٢} ، \pi[$

أوجد بدون استخدام الآلة الحاسبة :

① $جا (أ - ب)$ ② $جتا (أ + ب)$ ③ $ظتا (أ - ب)$

«$\frac{-٦٣}{٦٥}$ ، $\frac{-٥٦}{٦٥}$ ، $\frac{-١٦}{٦٣}$»

---

٩ تفكير إبداعي : إذا كان : $ظا أ = \frac{٢}{٣}$ حيث $\pi < أ < \frac{٣\pi}{٢}$ ، $ظا ب = \frac{١}{٥}$ حيث $٠ < ب < \frac{\pi}{٢}$

أوجد قيمة كل من : $ظا (أ + ب)$ ، $جتا (أ + ب)$ ومن ذلك أثبت أن : $أ + ب = \frac{٥\pi}{٤}$ «١ ، $\frac{-\sqrt{٢}}{٢}$»

١٠ أ ب حـ مثلث فيه : $ظا أ = \frac{١}{٧}$ ، $ظا ب = \frac{٣}{٤}$ أوجد بدون استخدام حاسبة الجيب : ق (∠ حـ) «١٣٥°»

١١ إذا كان : س + ص + ع = $\frac{\pi}{٢}$ أثبت أن : ظا س ظا ص + ظا ص ظا ع + ظا ع ظا س = ١

١٢ إذا كان : ظا (أ + ب) = ٣٣ ، ظا أ = ٣ أثبت أن : ظا ب = ٠,٣

١٣ في Δ أ ب حـ إذا كان : $ظا أ = \frac{ن}{ن + ١}$ ، $ظا ب = \frac{١}{٢ن + ١}$ حيث ن ∈ ح+ أثبت أن : ظا (أ + ب) = ١

١٤ إذا علمت أن : $\frac{جتا (أ + ب)}{جتا (أ - ب)} = \frac{١}{٣}$ فأثبت أن : ٢ جا أ جا ب = جتا أ جتا ب ثم أثبت أن : ٢ ظا أ = ظتا ب

وإذا علمت أن : $ظا أ = \frac{٢}{٥}$ فأوجد : ظا ب ومن ثم أوجد : ظا (أ - ب) «$\frac{٥}{٤}$ ، $\frac{-١٧}{٣٠}$»

١٥ أثبت أن :

(١) ظا ٧٥° = ١ + ظا ٣٠° + ظا ٣٠° ظا ٧٥°

(٢) $\sqrt{٢}$ جتا $(\frac{\pi}{٤} - س)$ = جتا س + جا س

(٣) جتا (س - $\frac{\pi}{٦}$) جتا س + جتا ($\frac{٢\pi}{٣}$ - س) جتا (س - $\frac{\pi}{٢}$) = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

(٤) جتا (١٢٠° - أ) = $\frac{١}{٢}$($\sqrt{٣}$ جا أ - جتا أ)

(٥) ظا (٤٥° - أ) = $\frac{جتا أ - جا أ}{جتا أ + جا أ}$

(٦) $\frac{جا (أ + ب) + جا (أ - ب)}{جتا (أ + ب) + جتا (أ - ب)}$ = ظا أ

(٧) $\frac{ظا أ + ظا ب}{ظا (أ + ب)} + \frac{ظا أ - ظا ب}{ظا (أ - ب)} = ٢$

(٨) ظا (أ + ب) = $\frac{ظتا أ + ظتا ب}{ظتا أ ظتا ب - ١}$

(٩) $\frac{جا (أ + ب)}{جا (أ - ب)} = \frac{ظا أ + ظا ب}{ظا أ - ظا ب}$

(١٠) ظا (أ + ب) ظا (أ - ب) = $\frac{ظا^٢ أ - ظا^٢ ب}{١ - ظا^٢ أ ظا^٢ ب}$

(١١) جا (أ + ب) جا (أ - ب) = $جا^٢ أ - جا^٢ ب$

١٦ بدون استخدام الآلة الحاسبة أثبت أن :

(١) جا ٣٥° + جتا ٦٥° = جتا ٥°

(٢) جتا ٥٢° + جتا ٦٨° = جا ٨٢°

(٣) جا ٦٧° + جتا ٣٧° = $\sqrt{٣}$ جتا ٧°

(٤) ظا ٤٠° = $\frac{١ - ظا ٥°}{١ + ظا ٥°}$

١٧ إذا كانت س ∈ [٠ ، ٢π[فأوجد قيمة س في كل مما يأتي :

(١) جا س جتا ١٥° + جتا س جا ١٥° = $\frac{١}{٢}$ «١٥° أ، ١٣٥°»

(٢) جا س جتا ٢٠° - جتا س جا ٢٠° = $\frac{١}{٢}$ «٥٠° أ، ١٧٠°»

(٣) جتا ٢ س جتا س + جا ٢ س جا س = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ «٣٠° أ، ٣٣٠°»

(٤) $\frac{ظا س - ظا ٢٥°}{١ + ظا س ظا ٢٥°} = ١$ «٧٠° أ، ٢٥٠°»

(٥) ظا س + ظا ٢٠° + ظا س ظا ٢٠° = ١ «٢٥° أ، ٢٠٥°»

(٦) جا (٦٠° + س) = ٢ جا س «٣٠° أ، ٢١٠°»

(٧) جا (س + ٣٠°) = ٢ جتا س «٦٠° أ، ٢٤٠°»

(٨) جا (س + $\frac{\pi}{٤}$) + جا (س - $\frac{\pi}{٤}$) = -١ «٢٢٥° أ، ٣١٥°»

١٨ إذا كانت : $٠ < هـ < \frac{\pi}{٢}$ أوجد مجموعة الحل لكل مما يأتى :

① جا ١٣٥° جتا هـ − جتا ١٣٥° جا هـ = ١ «{٤٥°}»

② $\frac{ظا ٤ هـ - ظا ٢ هـ}{١ + ظا ٤ هـ ظا ٢ هـ} = \sqrt{٣}$ «{٦٠°}»

③ $\sqrt{٣}$ جتا هـ − جا هـ = ١ «{٣٠°}»

④ جا (٤٥° + ٢ هـ) جا (٦٠° + هـ) + جا (٤٥° − ٢ هـ) جا (٣٠° − هـ) = ١ «{١٥°}»

---

١٩ إذا كان : أ ب حـ مثلثًا أثبت أن :

① جا $\left(\frac{أ+ب}{٢}\right)$ جتا $\frac{حـ}{٢}$ + جتا $\left(\frac{أ+ب}{٢}\right)$ جا $\frac{حـ}{٢}$ = ١

② جتا $\left(\frac{أ+ب-حـ}{٢}\right)$ جتا حـ + جا $\left(\frac{حـ-أ-ب}{٢}\right)$ جا حـ = ٠

③ ظا أ + ظا ب + ظا حـ = ظا أ ظا ب ظا حـ

④ ظا $\frac{٣أ}{٢}$ ظا $\frac{٣ب}{٢}$ + ظا $\frac{٣ب}{٢}$ ظا $\frac{٣حـ}{٢}$ + ظا $\frac{٣حـ}{٢}$ ظا $\frac{٣أ}{٢}$ = ١

---

٢٠ أ ب حـ مثلث قائم الزاوية فى ب ، أ ب = ٤ سم ، ب حـ = ٣ سم ، $\overline{حـ ء}$ متوسط

أوجد : جتا (∠ أ حـ ء) «$\frac{١٧\sqrt{١٣}}{٦٥}$»

---

٢١ إذا كانت شدة التيار الكهربائى ت تعطى بالعلاقة ت = $\frac{٣}{٢}$ جتا ٢٨٥° ن

① أعد كتابة العلاقة السابقة باستخدام فرق قياسى زاويتين.

② أوجد شدة التيار الكهربائى بعد ثانية واحدة (دون استخدام الحاسبة)

ثالثًا مسائل تقيس مهارات التفكير

١ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

① إذا كان : د (س) = ظا س فإن : د $\left(س + \frac{\pi}{٤}\right)$ × د $\left(س - \frac{\pi}{٤}\right)$ = ...

(أ) −١ (ب) ١ (جـ) ٢ ظا س (د) ظتا س

② إذا كان أ ب حـ مثلث فيه : ظا أ = ٣ + س ، ظا ب = ٣ − س ، ظا حـ = ٣

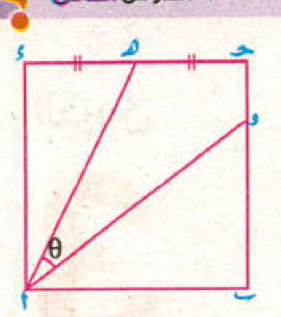
فإن : س = ...

(أ) ± ١ (ب) ± $\sqrt{٦}$ (جـ) ± ٦ (د) ± $\sqrt{١٠}$

③ إذا كان : جا س − جتا ص = $\frac{١}{٦}$ ، جتا س + جا ص = $\frac{٥}{٦}$ فإن : جا (س − ص) = ...

(أ) $\frac{١٩}{٢٤}$ (ب) $\frac{١٧}{٢٣}$ (جـ) $\frac{٢٣}{٣٦}$ (د) $\frac{٢٥}{٤٨}$





④ في الشكل المقابل :

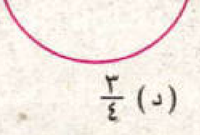
أ ب حـ ء مربع فيه هـ منتصف $\overline{\text{حـ ء}}$

، ب حـ = ٤ حـ و فإن : جتا θ = ...

(أ) $\frac{1}{\sqrt{5}}$ (ب) $\frac{2}{\sqrt{5}}$

(جـ) $\frac{3}{\sqrt{5}}$ (د) $\frac{4}{\sqrt{5}}$





⑤ في الشكل المقابل :

$\overline{\text{أ ب}}$ قطر في دائرة م طوله ٢٥ سم ، $\overline{\text{أ حـ}}$ وتر طوله ٢٤ سم

، $\overline{\text{ب ء}}$ وتر طوله ٢٠ سم فإن : ظا θ = ...

(أ) $\frac{-4}{3}$ (ب) $\frac{-3}{4}$ (جـ) $\frac{4}{3}$ (د) $\frac{3}{4}$

⑥ أ ب حـ مثلث قائم الزاوية في أ فإن : $\frac{\text{بَ جتا ب + حَ جتا حـ}}{\text{جتا (ب − حـ)}}$ = ...

(أ) أَ + بَ (ب) أَ + حَ (جـ) أَ (د) حَ

⑦ إذا كانت α ، β قياسيًا زاويتين حادتين وإذا كان : جتا $(\alpha + \beta) = \frac{12}{13}$ فإن : جا $(\alpha - \beta) = \frac{3}{5}$

فإن : جا ٢ α = ...

(أ) $\frac{16}{15}$ (ب) صفر (جـ) $\frac{56}{65}$ (د) $\frac{64}{65}$

---

٢ إذا كان : أ ، ب ، حـ هي قياسات ثلاث زوايا حادة ، جا أ = $\frac{1}{\sqrt{5}}$ ، جتا ب = $\frac{4}{5}$ ، ظا حـ = $\frac{1}{2}$

أثبت أن : أ + ب + حـ = ٩٠° [بدون استخدام الحاسبة]

---

٣ إذا كان : ظا أ ، ظا ب هما جذرا المعادلة : ٢ س^{2} + ٣ س − ١ = ٠

فبدون استخدام الآلة الحاسبة أوجد قيمة : ظا (أ + ب) ومنها أوجد : أ + ب «−١ ، ١٣٥° أ، ٣١٥°»

---

٤ إذا كانت : س ∋ [٠ ، ٢ π[أوجد قيمة س التي تجعل قيمة المقدار : جا س جتا ٥٥° + جتا س جا ٥٥°

① أكبر ما يمكن. ② أصغر ما يمكن. «٣٥° ، ٢١٥°»

---

٥ في المثلث أ ب حـ الحاد الزوايا إذا كان : ظا أ = ٠,٧٥ ، ظا ب = ٢,٤ فأثبت أن : أَ : بَ : حَ = ١٣ : ٢٠ : ٢١

---

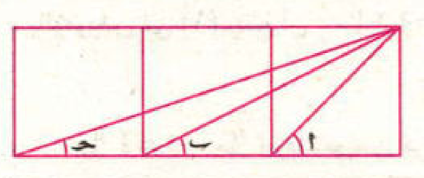
٦ إذا كان : أ قياس زاوية حادة وكان جا أ = $\frac{\sqrt{3} + 1}{2\sqrt{2}}$ فأوجد بدون استخدام الآلة الحاسبة : ق (∠ أ) «٧٥°»

---

٧ في الشكل المقابل :

ثلاث مربعات أثبت أن :

ق (∠ أ) = ق (∠ ب) + ق (∠ حـ)



---

٨ إذا كان : جا (أ + ب) = $\frac{3}{5}$ ، جا (أ − ب) = $\frac{1}{10}$ فأثبت أن : ٥ ظا أ = ٧ ظا ب



الدرس 3

الدوال المثلثية لضعف قياس الزاوية

إذا كان أ هو قياس زاوية معلومة فإنه يمكن إيجاد كل من : جا ٢ أ ، جتا ٢ أ ، ظا ٢ أ كما يأتى :

أولاً : جا ٢ أ = ٢ جا أ جتا أ

البرهان

∵ جا (أ + ب) = جا أ جتا ب + جتا أ جا ب   وبوضع ب = أ

∴ جا (أ + أ) = جا أ جتا أ + جتا أ جا أ   ∴ جا ٢ أ = ٢ جا أ جتا أ

ثانيًا : جتا ٢ أ = جتا^{٢} أ − جا^{٢} أ   (١)

= ٢ جتا^{٢} أ − ١   (٢)

= ١ − ٢ جا^{٢} أ   (٣)

البرهان

∵ جتا (أ + ب) = جتا أ جتا ب − جا أ جا ب   وبوضع ب = أ

∴ جتا (أ + أ) = جتا أ جتا أ − جا أ جا أ   ∴ جتا ٢ أ = جتا^{٢} أ − جا^{٢} أ   (١)

، ∵ جا^{٢} أ = ١ − جتا^{٢} أ (لأن جا^{٢} أ + جتا^{٢} أ = ١)

، بالتعويض فى (١) ينتج أن : جتا ٢ أ = جتا^{٢} أ − (١ − جتا^{٢} أ)

= جتا^{٢} أ − ١ + جتا^{٢} أ = ٢ جتا^{٢} أ − ١   (٢)

، ∵ جتا^{٢} أ = ١ − جا^{٢} أ وبالتعويض فى (١) :

∴ جتا ٢ أ = ١ − جا^{٢} أ − جا^{٢} أ = ١ − ٢ جا^{٢} أ   (٣)

ثالثًا : $ظا ٢ أ = \frac{٢ ظا أ}{١ - ظا^٢ أ}$ حيث ظا أ معرفة ، $ظا^٢ أ \neq ١$

البرهـان

$\because ظا (أ + ب) = \frac{ظا أ + ظا ب}{١ - ظا أ ظا ب}$ وبوضع ب = أ

$\therefore ظا (أ + أ) = \frac{ظا أ + ظا أ}{١ - ظا أ ظا أ}$ $\therefore ظا ٢ أ = \frac{٢ ظا أ}{١ - ظا^٢ أ}$

ملاحظـات

من القوانين السابقة يمكن استنتاج أن :

* $جا أ = ٢ جا \frac{أ}{٢} جتا \frac{أ}{٢}$
* $جتا أ = جتا^٢ \frac{أ}{٢} - جا^٢ \frac{أ}{٢}$
  $= ٢ جتا^٢ \frac{أ}{٢} - ١$
  $= ١ - ٢ جا^٢ \frac{أ}{٢}$
* $ظا أ = \frac{٢ ظا \frac{أ}{٢}}{١ - ظا^٢ \frac{أ}{٢}}$

* $جا ٤ أ = ٢ جا ٢ أ جتا ٢ أ$
* $جتا ٤ أ = جتا^٢ ٢ أ - جا^٢ ٢ أ$
  $= ٢ جتا^٢ ٢ أ - ١$
  $= ١ - ٢ جا^٢ ٢ أ$
* $ظا ٤ أ = \frac{٢ ظا ٢ أ}{١ - ظا^٢ ٢ أ}$

الدوال المثلثية لنصف قياس الزاوية

* إذا كان أ هو قياس زاوية معلومة فإنه يمكن إيجاد كل من $جا \frac{أ}{٢}$ ، $جتا \frac{أ}{٢}$ ، $ظا \frac{أ}{٢}$ بدلالة جتا أ كما يلى :

١ $جا \frac{أ}{٢} = \pm \sqrt{\frac{١ - جتا أ}{٢}}$ **٢** $جتا \frac{أ}{٢} = \pm \sqrt{\frac{١ + جتا أ}{٢}}$ **٣** $ظا \frac{أ}{٢} = \pm \sqrt{\frac{١ - جتا أ}{١ + جتا أ}}$ حيث $جتا أ \neq -١$

ويتم تحديد الإشارة وفقًا للربع الذى تقع فيه الزاوية $\frac{أ}{٢}$

البرهـان

$\because جتا أ = ١ - ٢ جا^٢ \frac{أ}{٢}$ $\therefore ٢ جا^٢ \frac{أ}{٢} = ١ - جتا أ$

$\therefore جا^٢ \frac{أ}{٢} = \frac{١ - جتا أ}{٢}$ $\therefore جا \frac{أ}{٢} = \pm \sqrt{\frac{١ - جتا أ}{٢}}$ (١)

وبالمثل : $\because جتا أ = ٢ جتا^٢ \frac{أ}{٢} - ١$ $\therefore ٢ جتا^٢ \frac{أ}{٢} = ١ + جتا أ$

$\therefore جتا^٢ \frac{أ}{٢} = \frac{١ + جتا أ}{٢}$ $\therefore جتا \frac{أ}{٢} = \pm \sqrt{\frac{١ + جتا أ}{٢}}$ (٢)

وبقسمة (١) على (٢) : $\therefore ظا \frac{أ}{٢} = \pm \sqrt{\frac{١ - جتا أ}{١ + جتا أ}}$ حيث $جتا أ \neq -١$

مثال ١

بدون استخدام حاسبة الجيب أوجد قيمة كل مما يأتى :

١ ٢ جا ١٥° جتا ١٥°
٢ جتا² ٢٢٫٥° − جا² ٢٢٫٥°
٣ ٢ جتا² ٧٥° − ١
٤ ١ − ٢ جا² ٧٫٥°
٥ $\frac{\text{٢ ظا ١٥°}}{\text{١ − ظا² ١٥°}}$

الحل

١ ٢ جا ١٥° جتا ١٥° = جا (٢ × ١٥°) = جا ٣٠° = $\frac{1}{2}$

٢ جتا² ٢٢٫٥° − جا² ٢٢٫٥° = جتا (٢ × ٢٢٫٥°) = جتا ٤٥° = $\frac{1}{\sqrt{2}}$

٣ ٢ جتا² ٧٥° − ١ = جتا (٢ × ٧٥°) = جتا ١٥٠° = جتا (١٨٠° − ٣٠°) = − جتا ٣٠° = $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

٤ ١ − ٢ جا² ٧٫٥° = جتا (٢ × ٧٫٥°) = جتا ١٥° = جتا (٤٥° − ٣٠°)

= جتا ٤٥° جتا ٣٠° + جا ٤٥° جا ٣٠°

$= \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

٥ $\frac{\text{٦ ظا ١٥°}}{\text{١ − ظا² ١٥°}} = ٣ \times \frac{\text{٢ ظا ١٥°}}{\text{١ − ظا² ١٥°}}$ = ٣ ظا (٢ × ١٥°) = ٣ ظا ٣٠° = $3 \times \frac{1}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$

مثال ٢

إذا كانت : جا أ = $\frac{3}{5}$ حيث أ ∈] ٠ ، $\frac{\pi}{2}$ [**فأوجد قيمة كل من :**

١ جا ٢ أ
٢ جتا ٢ أ
٣ ظا ٢ أ

الحل

١ جا ٢ أ = ٢ جا أ جتا أ = $2 \times \frac{3}{5} \times \frac{4}{5} = \frac{24}{25}$

٢ جتا ٢ أ = ١ − ٢ جا² أ = $1 - 2\left(\frac{3}{5}\right)^2 = 1 - \frac{18}{25} = \frac{7}{25}$

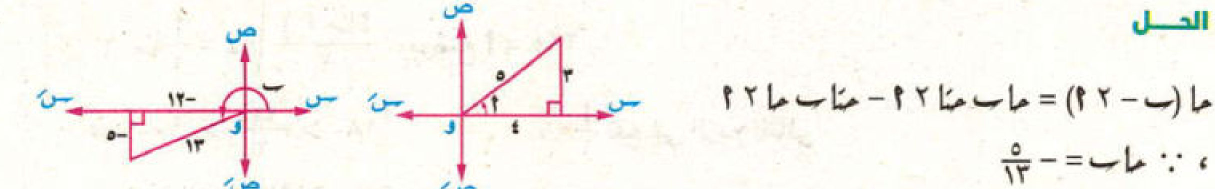
٣ ظا ٢ أ = $\frac{\text{٢ ظا أ}}{\text{١ − ظا² أ}} = \frac{2 \times \frac{3}{4}}{1 - \frac{9}{16}} = \frac{3}{2} \times \frac{16}{7} = \frac{24}{7}$

حل آخر لإيجاد ظا ٢ أ : ظا ٢ أ = $\frac{\text{جا ٢ أ}}{\text{جتا ٢ أ}} = \frac{\frac{24}{25}}{\frac{7}{25}} = \frac{24}{7}$

مثال ٣

إذا كانت : ظا أ = $\frac{3}{4}$ حيث أ ∈] ٠ ، $\frac{\pi}{2}$ [، ظا ب = $\frac{5}{12}$ حيث ب ∈] π ، $\frac{3\pi}{2}$ [

فأوجد قيمة : جا (ب − ٢ أ)



الحل

جا (ب − ٢ أ) = جا ب جتا ٢ أ − جتا ب جا ٢ أ

، ∵ جا ب = $-\frac{٥}{١٣}$

، جتا ٢ أ = جتا² أ − جا² أ = $\left(\frac{٤}{٥}\right)^٢ - \left(\frac{٣}{٥}\right)^٢ = \frac{٧}{٢٥}$

، جتا ب = $-\frac{١٢}{١٣}$ ، جا ٢ أ = ٢ جا أ جتا أ = ٢ × $\frac{٣}{٥} \times \frac{٤}{٥} = \frac{٢٤}{٢٥}$

∴ جا (ب − ٢ أ) = $-\frac{٥}{١٣} \times \frac{٧}{٢٥} - \left(-\frac{١٢}{١٣}\right) \times \frac{٢٤}{٢٥} = \frac{-٣٥ + ٢٨٨}{١٣ \times ٢٥} = \frac{٢٥٣}{٣٢٥}$

مثال ٤

إذا كانت : جا أ = − ٠,٢٨ حيث أ ∈] $\frac{٣\pi}{٢}$ ، ٢ π [**فأوجد قيمة : ظا $\frac{أ}{٢}$**

الحل

ص، س، س/، ص/، و، أ، ٢٤، ٧-، ٢٥

∵ جتا أ = $\frac{٢٤}{٢٥}$

∴ ظا $\frac{أ}{٢} = \pm\sqrt{\frac{١ - جتا أ}{١ + جتا أ}} = \pm\sqrt{\frac{١ - \frac{٢٤}{٢٥}}{١ + \frac{٢٤}{٢٥}}} = \pm\sqrt{\frac{١}{٤٩}} = \pm\frac{١}{٧}$

، ∵ $\frac{٣\pi}{٢}$ > أ > ٢ π ∴ $\frac{٣\pi}{٤}$ > $\frac{أ}{٢}$ > π

∴ $\frac{أ}{٢}$ تقع فى الربع الثانى. ∴ ظا $\frac{أ}{٢} = \frac{-١}{٧}$

مثال ٥

بدون استخدام الآلة الحاسبة وباستخدام الدوال المثلثية لنصف قياس الزاوية أوجد قيمة كل مما يأتى :

١ ظا ٣٠َ ٢٢° ٢ جتا ١١٢ $\frac{١}{٢}$°.

الحل

١ ∵ ظا $\frac{أ}{٢} = \pm\sqrt{\frac{١ - جتا أ}{١ + جتا أ}}$ وبوضع أ = ٤٥°

، ∵ ٠° > $\frac{٤٥°}{٢}$ > ٩٠° ∴ $\frac{أ}{٢}$ تقع فى الربع الأول.

∴ قيمة النسبة المثلثية موجبة. ∴ ظا $\frac{٤٥°}{٢} = \sqrt{\frac{١ - جتا ٤٥°}{١ + جتا ٤٥°}}$

∴ ظا ٣٠َ ٢٢° = $\sqrt{\frac{١ - \frac{\sqrt{٢}}{٢}}{١ + \frac{\sqrt{٢}}{٢}}} = \sqrt{\frac{٢ - \sqrt{٢}}{٢ + \sqrt{٢}}} = \sqrt{\frac{(٢ - \sqrt{٢})(٢ - \sqrt{٢})}{(٢ + \sqrt{٢})(٢ - \sqrt{٢})}}$

$= \sqrt{\frac{(٢ - \sqrt{٢})^٢}{٤ - ٢}} = \frac{٢ - \sqrt{٢}}{\sqrt{٢}} = \sqrt{٢} - ١$

٢ ∵ $جتا \frac{أ}{٢} = \pm \sqrt{\frac{١ + جتا أ}{٢}}$ وبوضع أ = ٢٢٥°

، ∵ $٩٠° < \frac{٢٢٥°}{٢} < ١٨٠°$ ∴ $\frac{أ}{٢}$ تقع فى الربع الثانى.

∴ قيمة النسبة المثلثية سالبة.

∴ $جتا \frac{٢٢٥°}{٢} = -\sqrt{\frac{١ + جتا ٢٢٥°}{٢}} = -\sqrt{\frac{١ - \frac{\sqrt{٢}}{٢}}{٢}} = -\sqrt{\frac{٢ - \sqrt{٢}}{٤}} = -\frac{١}{٢}\sqrt{٢ - \sqrt{٢}}$

∴ $جتا ١١٢ \frac{١}{٢}° = \frac{١}{٢}\sqrt{٢ - \sqrt{٢}}$

مثال ٦

أثبت أن : $ظا ٢ أ = \frac{٢}{ظتا أ - ظا أ}$

الحـــل

∵ الطرف الأيسر = $\frac{٢}{\frac{جتا أ}{جا أ} - \frac{جا أ}{جتا أ}}$ وبضرب كل من البسط والمقام فى جا أ جتا أ

∴ الطرف الأيسر = $\frac{٢ جا أ جتا أ}{جتا^٢ أ - جا^٢ أ} = \frac{جا ٢ أ}{جتا ٢ أ} = ظا ٢ أ$ = الطرف الأيمن.

حل آخر : الطرف الأيمن = $\frac{٢ ظا أ}{١ - ظا^٢ أ}$ وبضرب كل من البسط والمقام فى ظتا أ

∴ الطرف الأيمن = $\frac{٢}{ظتا أ - ظا أ}$ = الطرف الأيسر.

مثال ٧

أثبت أن : $جا ٣ س = ٣ جا س - ٤ جا^٣ س$

الحـــل

$جا ٣ س = جا (٢ س + س) = جا ٢ س جتا س + جتا ٢ س جا س$

$= ٢ جا س جتا س جتا س + (١ - ٢ جا^٢ س) جا س$

$= ٢ جا س جتا^٢ س + جا س - ٢ جا^٣ س$

$= ٢ جا س (١ - جا^٢ س) + جا س - ٢ جا^٣ س$

$= ٢ جا س - ٢ جا^٣ س + جا س - ٢ جا^٣ س$

$= ٣ جا س - ٤ جا^٣ س$

مثال ٨

أثبت أن : $\frac{١ + جتا ٢ س}{جا ٢ س}$ = ظتا س ومنها استنتج : ظتا ١٥°

الحل

الطرف الأيمن = $\frac{١ + ٢ جتا^٢ س - ١}{٢ جا س جتا س} = \frac{٢ جتا^٢ س}{٢ جا س جتا س} = \frac{جتا س}{جا س}$ = ظتا س = الطرف الأيسر.

∴ ظتا ١٥° = $\frac{١ + جتا ٣٠°}{جا ٣٠°} = \frac{١ + \frac{\sqrt{٣}}{٢}}{\frac{١}{٢}} = ٢ + \sqrt{٣}$

مثال ٩

إذا كان : جا س + جتا س = $\frac{١}{\sqrt{٢}}$ فأوجد قيمة : جا ٢ س

الحل

∵ جا س + جتا س = $\frac{١}{\sqrt{٢}}$ وبتربيع الطرفين.

∴ جا^٢ س + جتا^٢ س + ٢ جا س جتا س = $\frac{١}{٢}$ ∴ ١ + ٢ جا س جتا س = $\frac{١}{٢}$

∴ ٢ جا س جتا س = $-\frac{١}{٢}$ ∴ جا ٢ س = $-\frac{١}{٢}$

مثال ١٠

أثبت أن : قا ٢ أ + ظا ٢ أ = $\frac{جتا أ + جا أ}{جتا أ - جا أ}$

الحل

الطرف الأيمن = $\frac{١}{جتا ٢ أ} + \frac{جا ٢ أ}{جتا ٢ أ} = \frac{١ + جا ٢ أ}{جتا ٢ أ} = \frac{١ + ٢ جا أ جتا أ}{جتا^٢ أ - جا^٢ أ}$ (ولكن ١ = جا^٢ أ + جتا^٢ أ)

∴ الطرف الأيمن = $\frac{جا^٢ أ + جتا^٢ أ + ٢ جا أ جتا أ}{جتا^٢ أ - جا^٢ أ} = \frac{(جا أ + جتا أ)^٢}{(جتا أ - جا أ)(جتا أ + جا أ)}$

= $\frac{جتا أ + جا أ}{جتا أ - جا أ}$ = الطرف الأيسر.

مثال ١١

أثبت أن : $\frac{١ + جا أ - جتا أ}{١ + جا أ + جتا أ}$ = ظا $\frac{أ}{٢}$

الحل

الطرف الأيمن = $\frac{١ + ٢ جا \frac{أ}{٢} جتا \frac{أ}{٢} - (١ - ٢ جا^٢ \frac{أ}{٢})}{١ + ٢ جا \frac{أ}{٢} جتا \frac{أ}{٢} + (٢ جتا^٢ \frac{أ}{٢} - ١)} = \frac{٢ جا \frac{أ}{٢} جتا \frac{أ}{٢} + ٢ جا^٢ \frac{أ}{٢}}{٢ جا \frac{أ}{٢} جتا \frac{أ}{٢} + ٢ جتا^٢ \frac{أ}{٢}}$

= $\frac{٢ جا \frac{أ}{٢} (جتا \frac{أ}{٢} + جا \frac{أ}{٢})}{٢ جتا \frac{أ}{٢} (جا \frac{أ}{٢} + جتا \frac{أ}{٢})} = \frac{٢ جا \frac{أ}{٢}}{٢ جتا \frac{أ}{٢}}$ = ظا $\frac{أ}{٢}$ = الطرف الأيسر.

مثال ١٢

أوجد قيم س التى تحقق كلًا من المعادلات الآتية حيث س ∈]٠ ، ٢ π[

١ حا ٢ س − حتا س = ٠

٢ حتا س + حتا ٢ س = ٠

٣ ظا^{٢} س + ٢ ظا س = ١

٤ حتا^{٢} س − حا^{٢} س = $\frac{١}{٢}$

الحل

١ ∵ حا ٢ س − حتا س = ٠ ∴ ٢ حا س حتا س − حتا س = ٠

∴ حتا س (٢ حا س − ١) = ٠

∴ حتا س = ٠ ومنها س = ٩٠° = $\frac{\pi}{٢}$ أ، س = ٢٧٠° = $\frac{٣\pi}{٢}$

أ، حا س = $\frac{١}{٢}$ (موجبة) ∴ س = ٣٠° = $\frac{\pi}{٦}$ أ، س = ١٥٠° = $\frac{٥\pi}{٦}$

∴ قيم س التى تحقق المعادلة هى : $\frac{\pi}{٢}$ ، $\frac{٣\pi}{٢}$ ، $\frac{\pi}{٦}$ ، $\frac{٥\pi}{٦}$

٢ ∵ حتا س + حتا ٢ س = ٠ ∴ حتا س + (٢ حتا^{٢} س − ١) = ٠

∴ ٢ حتا^{٢} س + حتا س − ١ = ٠ ∴ (٢ حتا س − ١) (حتا س + ١) = ٠

∴ حتا س = $\frac{١}{٢}$ (موجبة) ∴ س = ٦٠° = $\frac{\pi}{٣}$ أ، س = ٣٠٠° = $\frac{٥\pi}{٣}$

أ، حتا س = −١ ومنها س = ١٨٠° = π ∴ قيم س التى تحقق المعادلة هى : $\frac{\pi}{٣}$ ، $\frac{٥\pi}{٣}$ ، π

٣ ∵ ظا^{٢} س + ٢ ظا س = ١

∴ ٢ ظا س = ١ − ظا^{٢} س

∴ $\frac{٢ \text{ ظا س}}{١ - \text{ظا}^{٢} \text{ س}} = ١$

∴ ظا ٢ س = ١ (موجبة)

∴ أصغر قياس موجب يحقق

المعادلة هو : ٢ س = ٤٥° = $\frac{\pi}{٤}$

∴ الحل العام للمعادلة هو :

٢ س = $\frac{\pi}{٤}$ + π ن حيث ن ∈ ص

∴ س = $\frac{\pi}{٨}$ + $\frac{\pi}{٢}$ ن

عند ن = ٠ ∴ س = $\frac{\pi}{٨}$

عند ن = ١ ∴ س = $\frac{٥\pi}{٨}$

عند ن = ٢ ∴ س = $\frac{٩\pi}{٨}$

عند ن = ٣ ∴ س = $\frac{١٣\pi}{٨}$

∴ قيم س التى تحقق المعادلة هى : $\frac{\pi}{٨}$ ، $\frac{٥\pi}{٨}$ ، $\frac{٩\pi}{٨}$ ، $\frac{١٣\pi}{٨}$

تذكر أنه

إذا كان β أصغر قياس موجب يحقق المعادلة ، ن ∈ ص

فإن : الحل العام للمعادلة

١ حا θ = أ هو

$\theta = \beta$ + ٢ π ن ، $\theta = (\pi - \beta)$ + ٢ π ن

٢ حتا θ = أ هو $\theta = \pm \beta$ + ٢ π ن

٣ ظا θ = أ هو $\theta = \beta + \pi$ ن

٤ ∵ $جا^2 س - جا^2 ص = \frac{1}{2}$ ∴ $جا ٢ س = \frac{1}{2}$ (موجبة)

∴ أصغر قياس موجب يحقق المعادلة هو : $٢ س = ٦٠° = \frac{\pi}{3}$

∴ الحل العام للمعادلة هو : $٢ س = \pm \frac{\pi}{3} + ٢ \pi ن$ حيث $ن \in ص$ ∴ $س = \pm \frac{\pi}{6} + \pi ن$

عند $ن = ٠$ ∴ $س = \pm \frac{\pi}{6}$

∴ $س = \frac{\pi}{6}$ ، أ، $س = \frac{-\pi}{6} + ٢\pi = \frac{11\pi}{6}$

عند $ن = ١$ ∴ $س = \pm \frac{\pi}{6} + \pi$

∴ $س = \frac{\pi}{6} + \pi = \frac{7\pi}{6}$ أ، $س = \frac{-\pi}{6} + \pi = \frac{5}{6}\pi$

∴ قيم س التى تحقق المعادلة هى : $\frac{\pi}{6}$ ، $\frac{5\pi}{6}$ ، $\frac{7\pi}{6}$ ، $\frac{11\pi}{6}$

مثال ١٣

فى Δ أ ب حـ إذا كان : أ = ٤ سم ، ب = ٥ سم ، حـ = ٦ سم

فأثبت بدون استخدام حاسبة الجيب أن : ق (∠ حـ) = ٢ ق (∠ أ)

الحل

∵ $جتا حـ = \frac{أ^2 + ب^2 - حـ^2}{٢ أ ب} = \frac{١٦ + ٢٥ - ٣٦}{٢ \times ٤ \times ٥} = \frac{1}{8}$ (١)

، ∵ $جتا أ = \frac{ب^2 + حـ^2 - أ^2}{٢ ب حـ} = \frac{٢٥ + ٣٦ - ١٦}{٢ \times ٥ \times ٦} = \frac{3}{4}$ ∴ $جتا ٢ أ = ٢ جتا^2 أ - ١ = ٢ \left(\frac{3}{4}\right)^2 - ١ = \frac{1}{8}$ (٢)

من (١) ، (٢) : ∴ جتا حـ = جتا ٢ أ ∴ ق (∠ حـ) = ٢ ق (∠ أ)

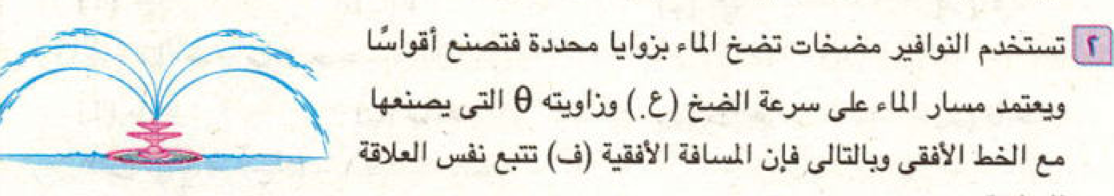
معلومة إثرائية

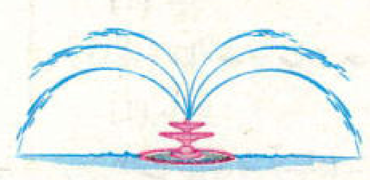
١ عند ركل لاعب لكرة القدم بزاوية θ مع سطح الأرض وبسرعة ابتدائية ($ع_١$) م/ث فإن المسافة الأفقية التى تقطعها الكرة تعطى

بالعلاقة : $ف = \frac{٢ ع^2 جا \theta جتا \theta}{ء}$

أى أن : $ف = \frac{ع^2 جا ٢ \theta}{ء}$

حيث : ء (عجلة السقوط الحر) = ٩,٨ م/ث^2 وكذلك أيضًا





٢ تستخدم النوافير مضخات تضخ الماء بزوايا محددة فتصنع أقواسًا ويعتمد مسار الماء على سرعة الضخ (ع.) وزاويته θ التى يصنعها مع الخط الأفقى وبالتالى فإن المسافة الأفقية (ف) تتبع نفس العلاقة السابقة.

تمارين 18 على الدوال المثلثية لضعف قياس الزاوية

اختبر نفسك

من أسئلة الكتاب المدرسي • فهم • تطبيق • مستويات عليا

أولاً أسئلة الاختيار من متعدد

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) حتا^٢ س − حا^٢ س = ...

(أ) ١ (ب) حا ٢ س (جـ) حتا ٢ س (د) ٢ حا س حتا س

(٢) حا ٢ ؟ = ...

(أ) ٢ حا ؟ (ب) ٢ حا ؟ حتا ؟ (جـ) ١ − ٢ حا^٢ ؟ (د) حا^٢ ؟

(٣) ظا ٢ ؟ = ...

(أ) ٢ ظا ؟ (ب) ٢ ظا ؟ ظتا ؟ (جـ) $\frac{\text{٢ ظا ؟}}{\text{١ − ظا}^{٢}\text{ ؟}}$ (د) $\frac{\text{٢ ظا ؟}}{\text{١ + ظا}^{٢}\text{ ؟}}$

(٤) حا ٦ س حتا ٦ س = ...

(أ) حا ١٢ س (ب) $\frac{١}{٢}$ حا ١٢ س (جـ) صفر (د) حا ٣ س

(٥) إذا كان : $\frac{\text{ظا س}}{\text{١ − ظا}^{٢}\text{ س}} = \frac{٥}{٢}$ فإن : ظا ٢ س = ...

(أ) $\frac{٥}{٢}$ (ب) ٥ (جـ) $\frac{٢}{٥}$ (د) ٢

(٦) (ظا ٢ ؟) (ظتا ؟) (١ − ظا^٢ ؟) = ...

(أ) ١ (ب) حا ؟ (جـ) ظا ؟ (د) ٢

(٧) ١ + حتا ٤ ؟ = ...

(أ) ٢ حتا^٢ ٤ ؟ (ب) حتا^٢ ٢ ؟ (جـ) حتا^٢ ٤ ؟ (د) ٢ حتا^٢ ٢ ؟

(٨) ١ − ٢ حا^٢ ٥٠° = ...

(أ) حا ١٠٠° (ب) حتا ٥٠° (جـ) حتا ١٠٠° (د) حا ٥٠°

(٩) إذا كان : ظا ٢ س = $\frac{٤}{٣}$ حيث س قياس زاوية حادة فإن : ظا س = ...

(أ) −٢ (ب) $\frac{٢}{٣}$ (جـ) $\frac{١}{٢}$ (د) $-\frac{١}{٢}$

(١٠) إذا كان : حتا هـ = $\frac{١}{٣}$ فإن : حتا ٢ هـ = ...

(أ) صفر (ب) $\frac{-٢}{٣}$ (جـ) $\frac{-٧}{٩}$ (د) $\frac{٢}{٣}$

(١١) إذا كان : حا ٢ س = $\frac{٥}{١٣}$ فإن : ظا س + ظتا س = ...

(أ) $\frac{١٩}{٥}$ (ب) ٤ (جـ) $\frac{٢٤}{٥}$ (د) $\frac{٢٦}{٥}$

(١٢) حتا^٢ هـ − حتا ٢ هـ = ...

(أ) حا هـ (ب) حتا هـ (جـ) حا^٢ هـ (د) ظا هـ

(١٣) ٢ حتا^٢ $\left(\frac{\pi}{٤} - \frac{\text{٣ س}}{٢}\right)$ − ١ = ...

(أ) حتا ٣ س (ب) حا ٣ س (جـ) حتا $\frac{٣}{٢}$ س (د) حا $\frac{٣}{٢}$ س

(١٤) ٢ جا (س + ٤٥°) جتا (س + ٤٥°) = ...

(أ) ٢ جا (س + ٤٥°) (ب) جتا (٩٠° + ٢ س)

(جـ) جا ٢ س (د) جتا ٢ س

(١٥) (١ + جتا ٢ س) ظا س = ...

(أ) قا ٢ س (ب) ظتا ٢ س (جـ) جا ٢ س (د) جتا ٢ س

(١٦) $\left(\text{جا}\frac{\text{س}}{٢} - \text{جتا}\frac{\text{س}}{٢}\right)^{٢}$ = ...

(أ) ١ - جتا س (ب) ١ - جتا $\frac{\text{س}}{٢}$ (جـ) ١ - جا س (د) ١ - جا $\frac{\text{س}}{٢}$

(١٧) إذا كان : جا س + جتا س = ١ فإن : جا ٢ س = ...

(أ) ٣ (ب) ٢ (جـ) ١ (د) صفر

(١٨) قتا ٢ س = ...

(أ) قا س قتا س (ب) $\frac{١}{٢}$ قا س قتا س (جـ) جا س جتا س (د) ٢ جا س جتا س

(١٩) إذا كان : (جا س - جتا س) (جا س + جتا س) = $\frac{٣}{٥}$ فإن : جتا ٢ س = ...

(أ) ١ (ب) $\frac{٣}{٥}$ (جـ) - $\frac{٣}{٥}$ (د) $\frac{٩}{٢٥}$

(٢٠) إذا كان : أ + ب = ١٨٠° حيث ب قياس زاوية حادة موجبة فإن : جا (أ - ب) = ...

(أ) جا أ جتا ب (ب) ظا ب ظتا أ (جـ) ٢ جا ب جتا ب (د) صفر

(٢١) قتا^{٢} س (١ - جتا ٢ س) = ...

(أ) ٢ (ب) ١ (جـ) $\frac{١}{٢}$ (د) -٢

(٢٢) $\frac{\text{ظا}\,\theta + \text{ظتا}\,\theta}{\text{قتا}\,٢\theta}$ = ...

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) ٢ (د) ظتا ٢ θ

(٢٣) $\frac{\text{جا}\,٤\theta}{١ + \text{جتا}\,٤\theta}$ = ...

(أ) جا ٢ θ (ب) جتا ٢ θ (جـ) ظا ٢ θ (د) ظتا ٢ θ

(٢٤) إذا كان : جتا^{٤} س - جا^{٤} س = جتا أ س فإن : أ يمكن أن تساوى ....

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) $\frac{١}{٢}$ (د) ٤

(٢٥) $\frac{١}{٢}$ (ظا θ + ظتا θ) = ...

(أ) جتا ٢ θ (ب) جا ٢ θ (جـ) قتا ٢ θ (د) قا ٢ θ

(٢٦) إذا كان : ظا س - ظتا س = ٣ فإن : ظا ٢ س = ...

(أ) ٦ (ب) $\frac{٢}{٣}$ (جـ) $\frac{-٢}{٣}$ (د) $\frac{٣}{٢}$

(٢٧) إذا كان : $\frac{\text{جا س}}{١ + \text{جتا س}}$ = أ فإن : ظتا $\frac{\text{س}}{٢}$ = ...

(أ) $\frac{١}{٢}$ أ (ب) أ (جـ) $\frac{١}{\text{أ}}$ (د) $\frac{٢}{٣}$ أ

(٢٨) إذا كان : س قياس زاوية حادة ، حاس = $\frac{١}{\sqrt{٥}}$ فإن : حا^٢ $(\frac{\pi}{٤} - س)$ - حتا^٢ $(\frac{\pi}{٤} - س)$ = ...

(أ) $\frac{٣}{٥}$ (ب) $\frac{-٤}{٥}$ (جـ) $\frac{٢}{\sqrt{٥}}$ (د) $\frac{٤}{٥}$

(٢٩) إذا كان : حتاب = $\frac{-٤}{٥}$ حيث π < ب < $\frac{٣\pi}{٢}$ فإن : $\frac{حا ٢ ب}{٢ حتا ٢ ب}$ = ...

(أ) $\frac{٧}{١٢}$ (ب) $\frac{٣}{٤}$ (جـ) $\frac{٢٤}{٧}$ (د) $\frac{١٢}{٧}$

(٣٠) إذا كانت س قياس زاوية حادة ، طاس = $\frac{١}{٣}$ فإن : $\frac{١ - حتا ٢ س}{١ + حتا ٢ س}$ = ...

(أ) $\frac{١}{٣}$ (ب) $\frac{٢}{٣}$ (جـ) $\frac{١}{٩}$ (د) $\frac{٢}{٩}$

(٣١) $\frac{١ - طا^٢ س}{١ + طا^٢ س}$ = ...

(أ) حتا ٢ س (ب) حا ٢ س (جـ) حتا س (د) حا س

(٣٢) $\frac{١ + حا ٢ س}{حا س + حتا س}$ = ...

(أ) حا س (ب) حتا س (جـ) حا س + حتا س (د) طا س

(٣٣) إذا كان : ٢ حا س حتا^٣ س - ٢ حتا س حا^٣ س = $\frac{١}{٢}$ فإن : حا ٤ س = ...

(أ) ١ (ب) $\frac{١}{٢}$ (جـ) $\frac{١}{٤}$ (د) $\frac{٣}{٤}$

(٣٤) إذا كان : حا أ حتا^٣ أ + حتا أ حا^٣ أ = $\frac{١}{٢}$ فإن : أ = ...

(أ) $\frac{\pi}{٦}$ (ب) $\frac{\pi}{٣}$ (جـ) $\frac{\pi}{٤}$ (د) π

(٣٥) إذا كان : حا ٣٢° = س فإن : حا ٤° حتا ٤° حتا ٨° حتا ١٦° = ...

(أ) $\frac{س}{١٦}$ (ب) $\frac{س}{٨}$ (جـ) $\frac{س}{٤}$ (د) $\frac{س}{٢}$

(٣٦) إذا كان : طا أ = $\frac{١}{٢}$ فإن : طتا $\frac{أ}{٢}$ - طا $\frac{أ}{٢}$ = ...

(أ) ٢ (ب) ٤ (جـ) ٣ (د) ٥

(٣٧) إذا كان : طا هـ = $\frac{-٥}{١٢}$ ، هـ ∈]٠ ، π[فإن : حتا $\frac{هـ}{٢}$ = ...

(أ) $\frac{١٢}{١٣}$ (ب) $\frac{-١٢}{١٣}$ (جـ) $\frac{١}{\sqrt{٢٦}}$ (د) $\frac{٥}{\sqrt{٢٦}}$

(٣٨) إذا كان حا س حتا س = $\frac{\sqrt{٣}}{٤}$ وكانت : س ∈]٤٥° ، ٩٠°[فإن : طا ٤ س = ...

(أ) $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ (ب) $-\sqrt{٣}$ (جـ) $\sqrt{٣}$ (د) $\sqrt{٦}$

(٣٩) إذا كان : ٤ حتا ٢ حـ + ٣ حا ٢ حـ = ٠ حيث حـ قياس زاوية حادة موجبة فإن : طا حـ = ...

(أ) $\frac{-٤}{٣}$ (ب) $\frac{-٢}{\sqrt{٣}}$ (جـ) ١ (د) ٢

(٤٠) إذا كان : ب - ٢ أ = ١٨٠° ، طا أ = $\frac{١}{٢}$ فإن : طا ب = ...

(أ) $\frac{٤}{٣}$ (ب) $\frac{١}{٤}$ (جـ) $\frac{٢}{\sqrt{٣}}$ (د) ١



(٤١) إذا كانت أ ، ب ، حـ قياسات زوايا المثلث أ ب حـ وكان : ظا حـ = $\frac{٣}{٤}$

فإن : حا $\left(\frac{أ + ب}{٢}\right)$ = ...

(أ) ٠,٣ (ب) $\frac{٣}{\sqrt{١٠}}$ (جـ) $\frac{٣}{٨}$ (د) ٠,٩

(٤٢) إذا كان : د (س) = ظا س فإن : د $\left(س + \frac{\pi}{٤}\right)$ + د $\left(س - \frac{\pi}{٤}\right)$ = ...

(أ) ظا ٢ س (ب) ٤ ظا س (جـ) ٢ ظا ٢ س (د) ٢ ظتا ٢ س

(٤٣) ظتا θ − ظتا ٢ θ = ...

(أ) حا θ (ب) حا ٢ θ (جـ) قتا θ (د) قتا ٢ θ

(٤٤) $\frac{حتا ٢ س}{حتا س - حا س}$ − حا س = ...

(أ) حا س (ب) حتا س (جـ) ظا س (د) قا س

(٤٥) $\frac{حا ٣ س}{حا س} - \frac{حتا ٣ س}{حتا س}$ = ...

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) حا س (د) حتا س

(٤٦) $\frac{٢ حا س - حا ٢ س}{حا^{٣} س}$ = ...

(أ) حتا^{٢} $\frac{س}{٢}$ (ب) ظا^{٢} $\frac{س}{٢}$ (جـ) حا^{٢} $\frac{س}{٢}$ (د) قا^{٢} $\frac{س}{٢}$

(٤٧) إذا كان : س ∈] ٠ ، $\frac{\pi}{٤}$ [وكان : (١٦ $^{حتا س}$)$^{حا س}$ = ٢ فإن : ظا ٢ س = ...

(أ) $\frac{\sqrt{٢}}{٢}$ (ب) $\frac{\sqrt{٣}}{٣}$ (جـ) $\frac{١}{٢}$ (د) ٢

(٤٨) إذا كان : ١ + ظتا^{٢} θ = $\frac{م}{حا^{٢} ٢ θ}$ فإن : م = ...

(أ) حتا^{٢} θ (ب) ٤ حتا^{٢} θ (جـ) حا^{٢} θ (د) ٤ حا^{٢} θ

(٤٩) إذا كان : $\frac{حا ٣ θ}{حا θ} + \frac{حتا ٣ θ}{حتا θ}$ = ٢ فإن : حتا ٢ θ = ...

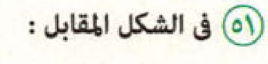
(أ) −$\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ (ب) $\frac{-١}{٢}$ (جـ) $\frac{١}{٢}$ (د) $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

(٥٠) مجموعة حل المعادلة : حتا س + حتا ٢ س = صفر حيث س ∈] ٠ ، π [هى ....



(أ) {π} (ب) {$\frac{\pi}{٦}$ ، π} (جـ) {$\frac{\pi}{٣}$} (د) {$\frac{\pi}{٣}$ ، π}

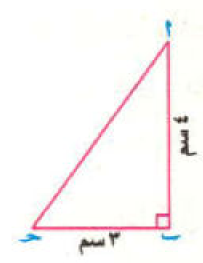
(٥١) في الشكل المقابل :



ظتا θ = ...

(أ) $\frac{٤}{٥}$ (ب) $\frac{٣}{٤}$ (جـ) $\frac{٢}{٣}$ (د) $\frac{٣}{٥}$

٥٢ في الشكل المقابل :

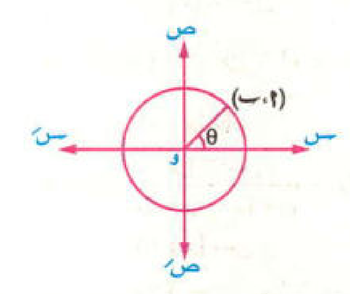


جا أ + جا ٢ حـ + جا ٣ ب = ...

(أ) $\frac{١٤}{٢٥}$ (ب) $\frac{١٣}{٢٥}$

(جـ) $\frac{١١}{١٢}$ (د) $\frac{١٦}{٢٥}$

٥٣ الشكل المقابل يمثل دائرة الوحدة

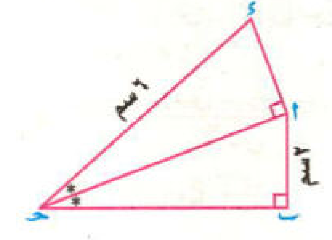


فإن : طا $\frac{\theta}{٢}$ = ...

(أ) $\frac{ب}{٢ أ}$ (ب) $\frac{ب}{١ + أ}$

(جـ) $\frac{٢ ب}{أ}$ (د) $\frac{١ + ب}{١ + أ}$

٥٤ في الشكل المقابل :

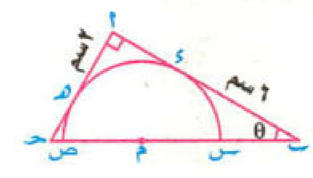


جا (ءحـ ب) = ...

(أ) $\frac{١}{٣}$ (ب) $\frac{١}{٢}$

(جـ) $\frac{٢}{٣}$ (د) $\frac{٣}{٤}$

٥٥ في الشكل المقابل :

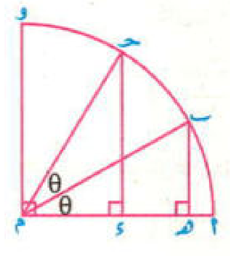


طا ٢ θ = ...

(أ) $\frac{٣}{٢}$ (ب) $\frac{٤}{٣}$

(جـ) $\frac{٣}{٤}$ (د) $\frac{٢}{٣}$

٥٦ في الشكل المقابل :



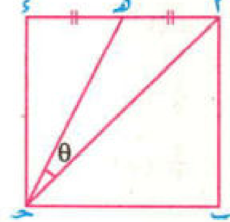
ربع دائرة م ، ب هـ = ٣ سم

، حـ ء = ٥ سم ، جتا θ = ...

(أ) $\frac{٥}{٦}$ (ب) $\frac{٢}{٣}$

(جـ) $\frac{١}{٢}$ (د) $\frac{١}{٦}$

٥٧ في الشكل المقابل :



أ ب حـ ء مربع ، طتا ٢ θ = ...

(أ) $\frac{٥}{٢}$ (ب) ٢

(جـ) $\frac{٣}{٢}$ (د) $\frac{٤}{٣}$

ثانيًا / الأسئلة المقالية

١ بدون استخدام الآلة الحاسبة أوجد قيمة كل مما يأتى :

① $٢\,\text{جا}\,٢٢^\circ\,٣٠'\,\text{جتا}\,٢٢^\circ\,٣٠'$ «$\frac{١}{\sqrt{٢}}$»

② $٢\,\text{جتا}^٢\,١٥^\circ - ١$ «$\frac{\sqrt{٣}}{٢}$»

③ $\text{جتا}^٢\,٦٧,٥^\circ - \text{جا}^٢\,٦٧,٥^\circ$ «$\frac{-١}{\sqrt{٢}}$»

④ $٤\,\text{جا}\,٧,٥^\circ\,\text{جتا}\,٧,٥^\circ\,\text{جتا}\,١٥^\circ$ «$\frac{١}{٢}$»

⑤ $\frac{٢\,\text{ظا}\,٢٢^\circ\,٣٠'}{١ - \text{ظا}^٢\,٢٢^\circ\,٣٠'}$ «١»

⑥ $\frac{٢\,\text{ظا}\,\frac{\pi}{٦}}{١ - \text{ظا}^٢\,\frac{\pi}{٦}}$ «$\sqrt{٣}$»

⑦ $\frac{\text{جتا}^٢\,٢٣^\circ - \text{جا}^٢\,٢٣^\circ}{٢\,\text{جا}^٢\,٢٣^\circ - ١}$ «-١»

⑧ $\frac{٣}{\text{قا}\,١٥^\circ\,\text{قتا}\,١٥^\circ}$ «$\frac{٣}{٤}$»

⑨ $\frac{\text{جتا}\,٤٠^\circ\,\text{جتا}\,١٠^\circ + \text{جا}\,٤٠^\circ\,\text{جا}\,١٠^\circ}{\text{جا}\,١٥^\circ\,\text{جتا}\,١٥^\circ}$ «$٢\sqrt{٣}$»

⑩ $\frac{٢\,\text{جتا}^٢\,١٦٥^\circ - ١}{\text{جا}\,٧٥^\circ\,\text{جتا}\,٧٥^\circ}$ «$٢\sqrt{٣}$»

---

٢ إذا كان : $\text{جا}\,أ = \frac{-٣}{٥}$ حيث $\pi < أ < \frac{٣\pi}{٢}$ أوجد قيمة كل من : جا ٢أ ، جتا ٢أ ، ظا ٢أ «$\frac{٢٤}{٢٥}$ ، $\frac{٧}{٢٥}$ ، $\frac{٢٤}{٧}$»

---

٣ إذا كان : $\text{جتا}\,حـ = \frac{٧}{٩}$ حيث $حـ \in]٠ ، \frac{\pi}{٢}[$ أوجد قيمة كل من : $\text{جا}\,\frac{حـ}{٢}$ ، $\text{جتا}\,\frac{حـ}{٢}$ ، $\text{ظا}\,\frac{حـ}{٢}$

«$\frac{١}{٣}$ ، $\frac{٢\sqrt{٢}}{٣}$ ، $\frac{\sqrt{٢}}{٤}$»

---

٤ أوجد بدون استخدام الآلة الحاسبة قيمة كل من : جا ٢θ ، جتا ٢θ ، ظا ٢θ إذا كان :

① $\text{جا}\,\theta = \frac{٤}{٥}$ ، $٠^\circ < \theta < ٩٠^\circ$

② $\text{جتا}\,\theta = \frac{١}{٣}$ ، $٠ < \theta < \frac{\pi}{٢}$

③ $\text{ظا}\,\theta = \frac{٣}{٢}$ ، $١٨٠^\circ < \theta < ٢٧٠^\circ$

④ $\text{جا}\,\theta = \frac{-١٢}{١٣}$ ، $\frac{٣\pi}{٢} < \theta < ٢\pi$

---

٥ أوجد بدون استخدام الآلة الحاسبة قيمة كل من : جا ٢θ ، جتا ٢θ ، $\text{جا}\,\frac{\theta}{٢}$ ، $\text{جتا}\,\frac{\theta}{٢}$ إذا كان :

① $\text{جتا}\,\theta = \frac{١}{٤}$ ، $٠^\circ < \theta < ٩٠^\circ$

② $\text{جا}\,\theta = \frac{٣}{٥}$ ، $٩٠^\circ < \theta < ١٨٠^\circ$

③ $\text{ظا}\,\theta = \frac{٤}{٣}$ ، $\pi < \theta < \frac{٣\pi}{٢}$

④ $\text{جتا}\,\theta = \frac{٥}{١٣}$ حيث θ قياس زاوية حادة

---

٦ إذا كان : $\text{جتا}\,٢س = \frac{١}{٨}$ أوجد قيمة كل من : جا س ، جتا س «$\pm\frac{\sqrt{٧}}{٤}$ ، $\pm\frac{٣}{٤}$»

---

٧ إذا كان : $\text{جا}\,\frac{حـ}{٢} = ٠,٦$ حيث $حـ \in]٠ ، \frac{\pi}{٢}[$ أوجد قيمة :

① ٣ جا حـ + ٤ جتا حـ

② قا حـ + ظا حـ «٤ ، ٧»

---

٨ إذا كان : $\text{جا}\,\frac{أ}{٢} = \frac{١}{٣}$ ، بدون استخدام الآلة الحاسبة أوجد قيمة كل من : $\text{جتا}\,\frac{أ}{٢}$ ، جا أ ، جتا أ

«$\pm\frac{٢\sqrt{٢}}{٣}$ ، $\pm\frac{٤\sqrt{٢}}{٩}$ ، $\frac{٧}{٩}$»

---

٩ إذا كان : أ قياس زاوية حادة ، $\text{جتا}\,٢أ = \frac{١١٩}{١٦٩}$ ، بدون استخدام الآلة الحاسبة

أوجد قيمة كل من : جا أ ، جتا أ ، ظا ٢أ «$\frac{٥}{١٣}$ ، $\frac{١٢}{١٣}$ ، $\frac{١٢٠}{١١٩}$»

١٠ إذا كان : حتا^2 أ = $\frac{٢٥}{١٦٩}$ حيث أ ∈] π ، $\frac{٣π}{٢}$ [أوجد قيمة كل من : حا ٢ أ ، حتا $\frac{أ}{٢}$ « $\frac{١٢٠}{١٦٩}$ ، $\frac{-٢}{\sqrt{١٣}}$ »

---

١١ إذا كان : ٢٥ حتا أ + ٧ = ٠ حيث أ أصغر زاوية موجبة ، ٤ ظاب − ٣ = ٠

حيث ب أكبر زاوية موجبة ، ب ∈] ٠ ، ٣٦٠° [أوجد قيمة :

① حتا ٢ أ ② ظا (أ − ٢ ب) « $\frac{-٥٢٧}{٦٢٥}$ ، $\frac{٣٣٦}{٥٢٧}$ »

---

١٢ إذا كان : ظا أ = $\frac{١}{٢}$ حيث أ ∈] ٠ ، $\frac{π}{٢}$ [، ظاب = $\frac{١}{٧}$ حيث ب ∈] ٠ ، $\frac{π}{٢}$ [

أوجد قيمة كل من : ظا (٢ أ + ب) ، ظا (أ − ٢ ب) ، ظا ٢ (أ + ب) « ١ ، $\frac{٣}{٧٩}$ ، $\frac{٤}{٣}$ »

---

١٣ إذا كان : حا (٢٧٠° + أ) = $\frac{٥}{١٣}$ ، ظاب = $\frac{٤}{٣}$ ، π < ب < أ < ٢ π أوجد قيمة :

① حتا (π + ٢ أ) ② ظتا ($\frac{π}{٢}$ − ٢ ب) « $\frac{١١٩}{١٦٩}$ ، $\frac{-٢٤}{٧}$ »

---

١٤ إذا كان : حا ٢ س = $\frac{١٢٠}{١٦٩}$ حيث ٢ س ∈] ٠ ، π [

فأوجد بدون استخدام الحاسبة قيمة المقدار : حاس + حتاس « $\frac{١٧}{١٣}$ »

---

١٥ إذا كان : حا ٢ س = $\frac{١}{٥}$ أوجد قيمة :

① حا ٣ س حتاس + حتا ٣ س حاس

② حتا ٥ س حتاس + حا ٥ س حاس « ± $\frac{٤\sqrt{٦}}{٢٥}$ ، $\frac{٢٣}{٢٥}$ »

---

١٦ إذا كان : حاس + حتاس = $\frac{٧}{٥}$ حيث س قياس زاوية حادة أثبت أن :

① حا ٢ س = $\frac{٢٤}{٢٥}$ ② قاس + قتاس = $\frac{٣٥}{١٢}$ ③ حتا ٢ س = ± $\frac{٧}{٢٥}$

---

١٧ 📖 إذا كان : ٤ حاهـ + ٣ حتاهـ = ٣

أثبت بدون استخدام الآلة الحاسبة أن : ظا $\frac{هـ}{٢}$ = $\frac{٤}{٣}$ حيث $\frac{هـ}{٢}$ قياس زاوية حادة موجبة.

---

١٨ إذا كان : أ ب حـ مثلث حاد الزوايا فيه : ظا أ = ٣ ، ٤ + ٣ ظا ٢ ب = صفر

أوجد بدون استخدام الآلة الحاسبة كلاً من : ظاب ، ق (∠ حـ) « ٢ ، ٤٥° »

---

١٩ إذا كان : ظا أ = $\frac{١}{٢}$ ، ظاب = ٧ أوجد : ظا ٢ أ ثم أثبت أن : ٢ أ + ب = ١٣٥°

حيث أ ، ب قياسا زاويتين حادتين. « $\frac{٤}{٣}$ »

---

٢٠ إذا كان : ظا ٢ أ = $\frac{٣}{٤}$ حيث أ ∈] ٠ ، $\frac{π}{٢}$ [، وكان ظاب = $\frac{٣}{٢}$ ظا أ حيث ب ∈] ٠ ، $\frac{π}{٢}$ [

أثبت أن : أ + ب = ٤٥°

---

٢١ بدون استخدام الآلة الحاسبة وباستخدام الدوال المثلثية لنصف الزاوية أوجد قيمة كل مما يأتى :

① 📖 حتا ٧٥° ② 📖 ظا ١٥° ③ 📖 حتا ٣٠ ٢٢° ④ ظا ٣٠ ٦٧°

٢٢ س ص ع مثلث فيه : س = ١٢ سم ، ص = ١٨ سم ، ع = ١٥ سم

أثبت أن : ق (∠ص) = ٢ ق (∠س)

---

٢٣ إذا كان أ ب حـ مثلث فيه : أ : ب : حـ = ٣ : ٤ : ٥ أوجد قيمة كل من : حا أ ، ظا ٢ أ «$\frac{٣}{٥}$ ، $\frac{٢٤}{٧}$»

---

٢٤ أ ب حـ مثلث فيه : أ = حـ أثبت أن : حا ب = ٢ حا أ حتا حـ

---

٢٥ أثبت أن :

① $\frac{\text{حتا } ٢ أ}{\text{حتا } أ - \text{حا } أ} = \text{حتا } أ + \text{حا } أ$

② حا ٨ أ = ٨ حا أ حتا أ حتا ٢ أ حتا ٤ أ

③ ٢ حا^{٢} ٢ أ + حتا ٤ أ = ١

④ $١ - ٢ \text{ حا}^{٢} \left(\frac{\pi}{٤} - \frac{٥ س}{٢} \right) = \text{حا } ٥ س$

⑤ حتا^{٤} س − حا^{٤} س = حتا ٢ س

⑥ $\frac{\text{حا } أ + \text{حتا } ٢ أ}{١ + ٢ \text{ حا } أ} = ١ - \text{حا } أ$

⑦ $\text{حا } أ = \frac{٢ \text{ ظا } \frac{أ}{٢}}{١ + \text{ظا}^{٢} \frac{أ}{٢}}$

⑧ $\text{ظا } س = \frac{\text{حا } س - ٢ \text{ حا}^{٣} س}{٢ \text{ حتا}^{٣} س - \text{حتا } س}$

⑨ $\frac{\text{حا } ٢ س}{١ + \text{حتا } ٢ س} = \text{ظا } س$

⑩ $\text{قا } ٢ س = \frac{\text{قا}^{٢} س}{١ - \text{ظا}^{٢} س}$

⑪ $\frac{\text{حا } ٢ س + \text{حا } س}{١ + \text{حتا } س + \text{حتا } ٢ س} = \text{ظا } س$

⑫ $\frac{١ - \text{حتا حـ} + \text{حا حـ}}{١ + \text{حتا حـ} + \text{حا حـ}} = \text{ظا } \frac{حـ}{٢}$

⑬ $\frac{\text{حتا}^{٢} أ}{\text{ظتا } \frac{أ}{٢} - \text{ظا } \frac{أ}{٢}} = \frac{١}{٤} \text{ حا } ٢ أ$

⑭ $\frac{١ - \text{حا } ٢ هـ}{\text{حتا } ٢ هـ} = \frac{١ - \text{ظا } هـ}{١ + \text{ظا } هـ}$

⑮ $\frac{١ - \text{حتا حـ}}{١ + \text{حتا حـ}} = \text{ظا}^{٢} \frac{حـ}{٢}$

⑯ $٤ \text{ حا } أ \text{ حتا}^{٣} أ - \text{حا } ٢ أ = \frac{١}{٢} \text{ حا } ٤ أ$

⑰ $\frac{١ - \text{حتا } ٢ أ}{٣ + \text{حتا } ٢ أ} = \frac{\text{حا}^{٢} أ}{١ + \text{حتا}^{٢} أ}$

⑱ $\frac{\text{ظتا } \theta - ١}{\text{ظتا } \theta + ١} = \frac{\text{حتا } ٢ \theta}{١ + \text{حا } ٢ \theta}$

⑲ (حا س + حتا س)^{٢} − (حا س − حتا س)^{٢} = ٢ حا ٢ س

⑳ ٢ حتا (٤٥° − ٢ أ) حتا (٤٥° + ٢ أ) = ١ − ٨ حا^{٢} أ حتا^{٢} أ

㉑ $(\text{حا } أ - \text{حا } ب)^{٢} + (\text{حتا } أ + \text{حتا } ب)^{٢} = ٤ \text{ حتا}^{٢} \left(\frac{أ + ب}{٢} \right)$

㉒ حتا^{٢} أ = $\frac{١}{٢}$ (١ + حتا ٢ أ) ومن ذلك أوجد قيمة : حتا ١٥° «$\frac{\sqrt{٦} + \sqrt{٢}}{٤}$»

㉓ قتا ٢ س + ظتا ٢ س = ظتا س ومن ذلك أوجد قيمة : ظتا ١٥° «$٢ + \sqrt{٣}$»

㉔ $\text{حتا } ٢ س = \frac{١ - \text{ظا}^{٢} س}{١ + \text{ظا}^{٢} س}$ ومن ذلك أوجد قيمة : $\frac{١ - \text{ظا}^{٢} ١٥°}{١ + \text{ظا}^{٢} ١٥°}$ «$\frac{\sqrt{٣}}{٢}$»

٢٦ بدون استخدام الآلة الحاسبة أثبت أن :

① ١٦ جا ٢٠° جا ٤٠° جا ٦٠° جا ٨٠° = ١ | ② جا $\frac{\pi ٥}{٢٤}$ جتا^{٣} $\frac{\pi ٥}{٢٤}$ − جا^{٣} $\frac{\pi ٥}{٢٤}$ جتا $\frac{\pi ٥}{٢٤}$ = $\frac{١}{٨}$

③ ظا^{٢} ١٥° + ٢ $\sqrt{٣}$ ظا ١٥° = ١

---

٢٧ أوجد مجموعة حل كل من المعادلات الآتية حيث س ∈]٠ ، ٢ π[:

① جا ٢ س = جا س «$\{\frac{\pi}{٣} ، \pi ، \frac{\pi ٥}{٣}\}$»

② جا ٢ س = $\sqrt{٣}$ جا س «$\{\frac{\pi}{٦} ، \pi ، \frac{\pi ١١}{٦}\}$»

③ جتا ٢ س + جا س = ٠ «$\{\frac{\pi ٧}{٦} ، \frac{\pi ١١}{٦} ، \frac{\pi}{٢}\}$»

④ $\sqrt{٣}$ جتا ٢ س = جتا س «$\{٣٠° ، ٣٣٠° ، ١٦َ ١٢٥° ، ٤٤َ ٢٣٤°\}$»

⑤ جتا ٢ س + ٣ جتا س + ٢ = ٠ «$\{\pi ، \frac{\pi ٢}{٣} ، \frac{\pi ٤}{٣}\}$»

⑥ جا^{٢} ٢ س + ٤ جا س جتا س + ١ = ٠ «$\{\frac{\pi ٣}{٤} ، \frac{\pi ٧}{٤}\}$»

⑦ جتا^{٢} س − جا^{٢} س = −$\frac{١}{٢}$ «$\{\frac{\pi}{٣} ، \frac{\pi ٢}{٣} ، \frac{\pi ٤}{٣} ، \frac{\pi ٥}{٣}\}$»

⑧ ظا^{٢} $\frac{س}{٢}$ + ٢ ظا $\frac{س}{٢}$ = ١ «$\{\frac{\pi}{٤} ، \frac{\pi ٥}{٤}\}$»

⑨ جتا س − ٢ جا^{٢} $\frac{١}{٢}$ س = ٠ «$\{\frac{\pi}{٣} ، \frac{\pi ٥}{٣}\}$»

---

٢٨ أوجد مجموعة حل المعادلة :

جا س جتا^{٣} س − جا^{٣} س جتا س = $\frac{\sqrt{٣}}{٨}$ حيث س ∈]٠ ، π[«$\{\frac{\pi}{١٢} ، \frac{\pi}{٦} ، \frac{\pi ٧}{١٢} ، \frac{\pi ٢}{٣}\}$»

---

٢٩ إذا كان : ٥ جتا س + ٤ = ٠ ، س ∈]٠ ، π[أوجد قيمة : جا ٣ س «$\frac{٤٤}{١٢٥}$»

---

٣٠ إذا كان ا ب حـ مثلث قائم الزاوية في حـ أثبت أن :

① جا ٢ ا = $\frac{٢ ا ب}{حـ^{٢}}$ | ② جتا ٢ ا = $\frac{ب^{٢} − ا^{٢}}{حـ^{٢}}$ | ③ جا $\frac{ا}{٢}$ = $\sqrt{\frac{حـ − ب}{٢ حـ}}$

---

٣١ ا ب حـ مثلث ، $\overleftrightarrow{اهـ}$ ينصف زاوية ا من الداخل بحيث يلاقي $\overline{ب حـ}$ في هـ أثبت أن : ا هـ = $\frac{٢ ب حـ}{ب + حـ}$ جتا $\frac{ا}{٢}$

---

٣٢ الربط بالميكانيكا :

ركل لاعب كرة القدم بزاوية قياسها ٣٠° مع سطح الأرض وبسرعة ابتدائية مقدارها ١٤,٧ م/ث

إذا كانت المسافة الأفقية ف التي تقطعها الكرة تعطى بالعلاقة : ف = $\frac{٢ ع^{٢} جا \theta جتا \theta}{ء}$

حيث ء عجلة السقوط الحر وتساوى ٩,٨ م/ث^{٢} ، ع تمثل السرعة الابتدائية.

① ضع العلاقة السابقة في أبسط صورة.

② أوجد المسافة الأفقية ف التي تقطعها الكرة بالمتر. «١٩ م»

ثالثاً مسائل تقيس مهارات التفكير

١ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

① إذا كان : $\frac{\text{جا}^2 3\text{أ}}{\text{جا}^2 \text{أ}} - \frac{\text{جتا}^2 3\text{أ}}{\text{جتا}^2 \text{أ}} = 2$ فإن : جتا ٢ أ = ...

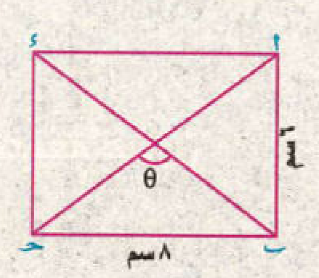
(أ) $\frac{1}{4}$ (ب) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ (جـ) $\frac{1}{\sqrt{3}}$ (د) $\frac{1}{2}$

② فى الشكل المقابل :

إذا كان أ ب جـ ء مستطيل فيه : أ ب = ٦ سم

، ب جـ = ٨ سم

فإن : جا θ = ...



(أ) $\frac{24}{5}$ (ب) $\frac{24}{25}$

(جـ) $\frac{4}{5}$ (د) $\frac{12}{25}$

③ مجموعة حل المعادلة : جتا ٣ س − جتا ٢ س + جتا س = ٠ حيث س زاوية حادة هى ....

(أ) {٣٠° ، ٦٠°} (ب) {٣٠° ، ٤٥°} (جـ) {٤٥° ، ٦٠°} (د) {١٥° ، ٧٥°}

④ إذا كان : ٣ أ + ٢ ب = ١٨٠° فإن : $\frac{\text{جا } 2\text{أ} \text{ جتا ب} - \text{جتا } 2\text{أ} \text{ جا ب}}{\text{جا أ جتا } 3\text{ب} + \text{جتا أ جا } 3\text{ب}} =$ ....

(أ) −١ (ب) صفر (جـ) ١ (د) ٢

⑤ إذا كان : ٠ < θ < $\frac{\pi}{4}$ فإن : $\sqrt{1 + \text{جا } 2\theta} - \sqrt{1 - \text{جا } 2\theta} =$ ....

(أ) جا θ (ب) جتا θ (جـ) ٢ جا θ (د) ٢ جتا θ

---

٢ بدون استخدام الآلة الحاسبة أثبت أن :

① جا ٥٤° جا ١٨° = $\frac{1}{4}$ ② جا ٥٤° − جا ١٨° = $\frac{1}{2}$

---

٣ بدون استخدام الآلة الحاسبة أثبت أن : ظا ٢٠° ظا ٣٠° ظا ٤٠° = ظا ١٠°

---

٤ أثبت أن : ظا ٣ هـ = $\frac{3 \text{ ظا هـ} - \text{ظا}^3 \text{هـ}}{1 - 3 \text{ ظا}^2 \text{هـ}}$ ومن ثم أثبت أن : ظا ٥٠° ظا ٦٠° ظا ٧٠° = ظا ٨٠°

---

٥ فى المثلث ء هـ و إذا علم أن : هـ ء = ٢ $\sqrt{3}$ ء ، ق (∠ و) = ٣٠°

فأثبت بدون استخدام حاسبة الجيب أن : ظا ء = $\frac{\sqrt{3}}{9}$



الدرس

4

صيغة هيرون

! تذكر أن :

* مساحة المثلث = $\frac{1}{2}$ طول القاعدة × الارتفاع
* مساحة المثلث = $\frac{1}{2}$ حاصل ضرب طولى ضلعين × جيب الزاوية المحصورة بينهما

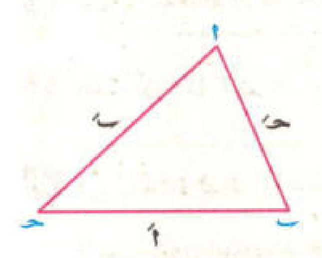
قاعدة هيرون لحساب مساحة المثلث

إذا رمزنا لأطوال أضلاع المثلث أ ب حـ بالرموز أَ ، بَ ، حـَ ورمزنا لمحيط المثلث بالرمز ٢ ع

أى أن : ٢ ع = أَ + بَ + حـَ

فإن مساحة (△ أ ب حـ) = $\sqrt{ع (ع - أ) (ع - ب) (ع - حـ)}$

البرهان (لا يمتحن فيه الطالب)



نعلم من قاعدة جيب التمام أن :

$$جتا حـ = \frac{أ^{٢} + ب^{٢} - حـ^{٢}}{٢ أ ب} \quad (١)$$

، ∵ جا² حـ + جتا² حـ = ١ ∴ جا² حـ = ١ - جتا² حـ

$$∴ جا حـ = \sqrt{١ - جتا^{٢} حـ} \quad (٢)$$

ويرفض الحل السالب لأن [٠° < حـ < ١٨٠° أى (جا حـ) موجبة]

وبالتعويض من (١) فى (٢) :

$$\therefore \text{جا حـ} = \sqrt{1 - \frac{(\text{أ}^2 + \text{ب}^2 - \text{حـ}^2)^2}{\text{٤أ}^2\text{ب}^2}} = \sqrt{\frac{\text{٤أ}^2\text{ب}^2 - (\text{أ}^2 + \text{ب}^2 - \text{حـ}^2)^2}{\text{٤أ}^2\text{ب}^2}}$$

$$= \frac{1}{\text{٢أب}} \sqrt{\text{٤أ}^2\text{ب}^2 - (\text{أ}^2 + \text{ب}^2 - \text{حـ}^2)^2}$$

$$= \frac{1}{\text{٢أب}} \sqrt{[\text{٢أب} + (\text{أ}^2 + \text{ب}^2 - \text{حـ}^2)]\,[\text{٢أب} - (\text{أ}^2 + \text{ب}^2 - \text{حـ}^2)]}$$

$$= \frac{1}{\text{٢أب}} \sqrt{[(\text{أ} + \text{ب})^2 - \text{حـ}^2]\,[\text{حـ}^2 - (\text{أ} - \text{ب})^2]}$$

$$= \frac{1}{\text{٢أب}} \sqrt{(\text{أ} + \text{ب} + \text{حـ})(\text{ب} + \text{حـ} - \text{أ})(\text{أ} + \text{حـ} - \text{ب})(\text{أ} + \text{ب} - \text{حـ})}$$

$$= \frac{1}{\text{٢أب}} \sqrt{\text{٢ع}(\text{أ} + \text{ب} + \text{حـ} - \text{٢أ})(\text{أ} + \text{ب} + \text{حـ} - \text{٢ب})(\text{أ} + \text{ب} + \text{حـ} - \text{٢حـ})}$$

$$= \frac{1}{\text{٢أب}} \sqrt{\text{٢ع}(\text{٢ع} - \text{٢أ})(\text{٢ع} - \text{٢ب})(\text{٢ع} - \text{٢حـ})}$$

$$= \frac{1}{\text{٢أب}} \sqrt{\text{١٦ع}(\text{ع} - \text{أ})(\text{ع} - \text{ب})(\text{ع} - \text{حـ})}$$

$$= \frac{٤}{\text{٢أب}} \sqrt{\text{ع}(\text{ع} - \text{أ})(\text{ع} - \text{ب})(\text{ع} - \text{حـ})}$$

$$= \frac{٢}{\text{أب}} \sqrt{\text{ع}(\text{ع} - \text{أ})(\text{ع} - \text{ب})(\text{ع} - \text{حـ})}$$

، $\because$ مساحة $(\Delta\, \text{أبحـ}) = \frac{1}{2}\, \text{أ ب جا حـ}$

$\therefore$ مساحة $(\Delta\, \text{أبحـ}) = \frac{1}{2}\, \text{أ ب} \times \frac{٢}{\text{أب}} \sqrt{\text{ع}(\text{ع} - \text{أ})(\text{ع} - \text{ب})(\text{ع} - \text{حـ})}$

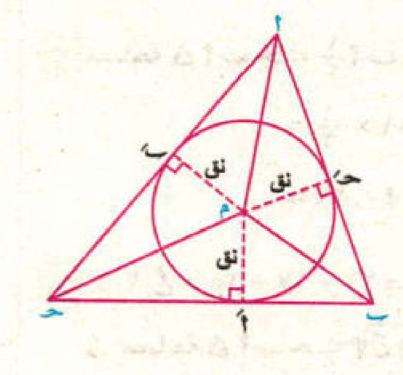
$$= \sqrt{\text{ع}(\text{ع} - \text{أ})(\text{ع} - \text{ب})(\text{ع} - \text{حـ})}$$

إيجاد طول نصف قطر الدائرة المرسومة داخل المثلث وتمس جميع أضلاعه

إذا كان طول نصف قطر الدائرة المرسومة داخل المثلث وتمس جميع أضلاعه = نق

ومساحة المثلث = Δ ، ومحيط المثلث = ٢ ع فإن : $\boxed{\text{نق} = \frac{\Delta}{\text{ع}}}$

البرهـان



من هندسة الشكل المقابل نلاحظ أن :

مساحة $(\Delta\, \text{أبحـ})$ = مساحة $(\Delta\, \text{ب م حـ})$ + مساحة $(\Delta\, \text{أ م حـ})$

+ مساحة $(\Delta\, \text{أ م ب})$

$\therefore$ مساحة $(\Delta\, \text{أبحـ}) = \frac{1}{2}\, \text{أ نق} + \frac{1}{2}\, \text{ب نق} + \frac{1}{2}\, \text{حـ نق}$

$\therefore \Delta = \frac{1}{2}\, \text{نق} (\text{أ} + \text{ب} + \text{حـ})$ $\qquad$ $\therefore \Delta = \frac{1}{2}\, \text{نق} \times \text{٢ع}$

$\therefore \Delta = \text{نق} \times \text{ع}$

$$\therefore \text{نق} = \frac{\Delta}{\text{ع}} = \frac{\text{مساحة المثلث}}{\frac{1}{2}\ \text{محيط المثلث}} = \frac{\sqrt{\text{ع}(\text{ع} - \text{أ})(\text{ع} - \text{ب})(\text{ع} - \text{حـ})}}{\text{ع}}$$

ملاحظة

الكميات $(ع - أ)$ ، $(ع - ب)$ ، $(ع - ح)$ كميات موجبة ولا يمكن أن تكون سالبة أو تساوى الصفر.

أى أن : نصف محيط المثلث (ع) > طول أى ضلع فى المثلث

أما إذا كان ع ≤ طول أحد الأضلاع فلا يوجد مثلث وبالتالى لا يمكن إيجاد مساحته.

مثال ١

احسب مساحة المثلث أ ب حـ فى كل من الحالات الآتية :

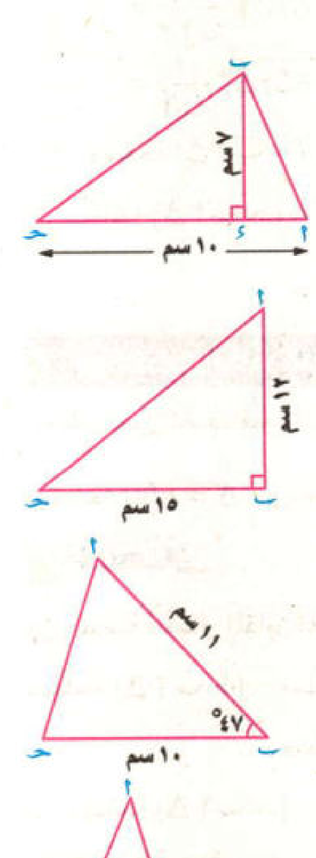
١ أ حـ = ١٠ سم وطول العمود المرسوم من ب على $\overline{أحـ}$ يساوى ٧ سم

٢ أ ب = ١٢ سم ، ب حـ = ١٥ سم ، ق (∠ب) = ٩٠°

٣ أ ب = ١١ سم ، ب حـ = ١٠ سم ، ق (∠ب) = ٤٧° مقربًا الناتج لأقرب رقمين عشريين.

٤ أ ب = ٢٥ سم ، ب حـ = ١٧ سم ، أ حـ = ٢٦ سم

الحل



١ مساحة Δ أ ب حـ = $\frac{1}{2}$ أ حـ × ب ء

$= \frac{1}{2} \times ١٠ \times ٧$

= ٣٥ سم^2

٢ مساحة Δ أ ب حـ = $\frac{1}{2}$ ب حـ × أ ب

$= \frac{1}{2} \times ١٥ \times ١٢$

= ٩٠ سم^2

٣ مساحة Δ أ ب حـ = $\frac{1}{2}$ أ ب × ب حـ × جا ب

$= \frac{1}{2} \times ١١ \times ١٠ \times$ جا ٤٧°

≈ ٤٠,٢٢ سم^2

٤ ∵ ٢ ع = ٢٥ + ١٧ + ٢٦ = ٦٨ ∴ ع = ٣٤ سم

∴ مساحة Δ أ ب حـ = $\sqrt{ع(ع - أ)(ع - ب)(ع - حـ)}$

$= \sqrt{٣٤ \times (٣٤ - ١٧)(٣٤ - ٢٦)(٣٤ - ٢٥)}$

$= \sqrt{٣٤ \times ١٧ \times ٨ \times ٩}$ = ٢٠٤ سم^2

مثال ٢

أوجد مساحة كل مما يأتى (إن أمكن) :

١ مثلث أ ب حـ فيه : أ = ٩ سم ، ب = ٤٠ سم ، حـ = ٤١ سم

٢ مثلث أطوال أضلاعه ٥ ، ٦ ، ١٣ من السنتيمترات

الحل

١ ∵ ٢ ع = ٩ + ٤٠ + ٤١ = ٩٠ ∴ ع = ٤٥ سم

∴ مساحة Δ أ ب حـ = $\sqrt{ع (ع - أ) (ع - ب) (ع - حـ)}$

= $\sqrt{٤٥ (٤٥ - ٩) (٤٥ - ٤٠) (٤٥ - ٤١)}$ = ١٨٠ سم^{٢}

حل آخر :

∵ حـ^{٢} = $(٤١)^{٢}$ = ١٦٨١ ، أ^{٢} + ب^{٢} = $(٩)^{٢}$ + $(٤٠)^{٢}$ = ١٦٨١

∴ حـ^{٢} = أ^{٢} + ب^{٢} ∴ المثلث أ ب حـ قائم الزاوية فى حـ

∴ المساحة = $\frac{١}{٢}$ × ٩ × ٤٠ = ١٨٠ سم^{٢}

٢ ∵ ٢ ع = ٥ + ٦ + ١٣ = ٢٤

∴ ع = ١٢ سم

، ∵ ع < طول أحد الأضلاع (١٣ سم)

∴ لا يوجد مثلث وبالتالى لا يمكن

إيجاد مساحته.

لاحظ أن :

نعلم أن متباينة المثلث هى :

«مجموع طولى أى ضلعين فى مثلث يكون أكبر من طول الضلع الثالث»

، ∵ (٥ + ٦) سم < (١٣) سم

∴ الأطوال ٥ سم ، ٦ سم ، ١٣ سم لا تكون أطوال أضلاع للمثلث.

مثال ٣

أوجد طول نصف قطر الدائرة التى تمس أضلاع Δ أ ب حـ الذى فيه :

أ = ٧ سم ، ب = ٩ سم ، حـ = ١٢ سم

الحل

∵ ٢ ع = ٧ + ٩ + ١٢ = ٢٨ ∴ ع = ١٤ سم

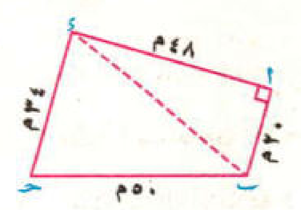
∴ مساحة (Δ أ ب حـ) = $\sqrt{١٤ (١٤ - ٧) (١٤ - ٩) (١٤ - ١٢)}$

∴ Δ = $\sqrt{١٤ × ٧ × ٥ × ٢}$ = ١٤ $\sqrt{٥}$ سم^{٢}

، ∵ نق = $\frac{\Delta}{ع}$ = $\frac{١٤ \sqrt{٥}}{١٤}$ = $\sqrt{٥}$ سم

∴ طول نصف قطر الدائرة التى تمس أضلاع المثلث أ ب حـ = $\sqrt{٥}$ سم

مثال ٤



الشكل المقابل يمثل قطعة أرض رباعية الشكل

أوجد مساحتها.

الحل

* نرسم $\overline{\text{ب ء}}$

في Δ أ ب ء القائم الزاوية في أ ∵ ب ء $= \sqrt{(٢٠)^٢ + (٤٨)^٢} =$ ٥٢ م

∴ مساحة (Δ أ ب ء) $= \frac{١}{٢} \times$ أ ب × أ ء $= \frac{١}{٢} \times ٢٠ \times ٤٨ = ٤٨٠$ م^٢

، في Δ ب حـ ء :

∵ ٢ ع = ٥٢ + ٥٠ + ٣٤ = ١٣٦ ∴ ع = ٦٨

∴ مساحة (Δ ب حـ ء) $= \sqrt{٦٨ (٦٨ - ٥٠) (٦٨ - ٣٤) (٦٨ - ٥٢)} = ٨١٦$ م^٢

∴ مساحة قطعة الأرض = مساحة (Δ أ ب ء) + مساحة (Δ ب حـ ء)

= ٤٨٠ + ٨١٦ = ١٢٩٦ م^٢

تمارين 19 على صيغة هيرون



من أسئلة الكتاب المدرسى • فهم • تطبيق • مستويات عليا

أولًا أسئلة الاختيار من متعدد

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) مساحة سطح المثلث الذى طولا ضلعين فيه ٦ ، ٨ من السنتيمترات وقياس الزاوية المحصورة بينهما ٣٠° تساوى .... سم^2

(أ) ١٠ (ب) ١٢ (جـ) ١٤ (د) ٢٤

(٢) مساحة المثلث أ ب جـ الذى فيه : أ ب = ٧ سم ، ب جـ = ٨ سم ، ق(∠ب) = ٥٠° تساوى .... (لأقرب رقمين عشريين)

(أ) ٢١,٤٥ (ب) ٤٥,٢١ (جـ) ٧,٥٦ (د) ٨,٤٥

(٣) أ ب جـ مثلث متساوى الأضلاع مساحته ٣٦ $\sqrt{3}$ سم^2 فإن طول ضلعه = ... سم

(أ) ٦ (ب) ٦ $\sqrt{3}$ (جـ) ١٢ (د) ١٢ $\sqrt{3}$

(٤) مساحة المثلث المتساوى الساقين الذى طول أحد ساقيه ١٠ سم وقياس إحدى زاويتى قاعدته ٤٥° تساوى .... سم^2

(أ) ٢٥ (ب) ٥٠ (جـ) ١٠٠ (د) ٢٠٠

(٥) المعين الذى قياس إحدى زواياه ٥٠° وطول ضلعه ٦ سم تكون مساحته .... (لأقرب سم^2)

(أ) ٢٠ (ب) ٢٤ (جـ) ٢٨ (د) ٣٢

(٦) مساحة المثلث المتساوى الأضلاع الذى طول ضلعه س سم تساوى .... سم^2

(أ) س^2 (ب) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ س^2 (جـ) $\frac{\sqrt{3}}{4}$ س^2 (د) $\frac{1}{2}$ س^2

(٧) إذا كان محيط مثلث هو ٦٠ سم وطول أحد أضلاعه ٢٦ سم فإن طولى ضلعيه الآخرين بالسنتيمتر يمكن أن يكونا ....

(أ) ٤ ، ٣٠ (ب) ٣١ ، ٣ (جـ) ٢٠ ، ١٤ (د) ٢ ، ٣٢

(٨) مساحة المثلث أ ب جـ الذى فيه : ع − أ = ٣ سم ، ع − ب = ٥ سم ، ع − جـ = ٩ سم حيث ع نصف محيط المثلث تساوى .... سم^2

(أ) ٣ $\sqrt{7}$ (ب) ٤ $\sqrt{215}$ (جـ) ٣ $\sqrt{255}$ (د) ٤٦

(٩) مساحة سطح المثلث الذى أطوال أضلاعه ٦ سم ، ٨ سم ، ١٠ سم تساوى .... سم^2

(أ) ٢٤ (ب) ٣٠ (جـ) ٤٠ (د) ٤٨

(١٠) مساحة المثلث أ ب جـ الذى فيه : أ ب = أ جـ = ٦ سم ، طا أ = $\frac{24}{7}$ تساوى .... سم^2

(أ) ٦١,٧١ (ب) ٣٤,٥٦ (جـ) ١٧,٢٨ (د) ٥,٠٤

(١١) مساحة المثلث الذى أطوال أضلاعه ٢٤ سم ، ٣٦ سم ، ٦٠ سم تساوى .... سم^2

(أ) ٦٠ (ب) صفر (جـ) ٤٨ (د) ٧٢

(١٢) مثلث محيطه ٥٩٠ سم والنسبة بين أطوال أضلاعه ١٤ : ٢٠ : ٢٥ فإن مساحته ≃ .... سم^2

(أ) ١٣٩٨١ (ب) ١٤١٨٢ (جـ) ١٤١٨١ (د) ١٣٩٨٢

(١٣) النسبة بين أطوال اضلاع مثلث ٧ : ٥ : ٣ وكان مساحته = ٢٥٩٨ سم^2

فإن محيط المثلث ≃ ....

(أ) ١٠٠ (ب) ٢٠٠ (جـ) ٣٠٠ (د) ٤٠٠

(١٤) إذا كانت أطوال أضلاع مثلث هى ٣٥ سم ، ٥٤ سم ، ٦١ سم

فإن أطول ارتفاعاته = ... سم

(أ) ١٦ (ب) ٢٤ $\sqrt{5}$ (جـ) ٢٨ (د) ٤٠ $\sqrt{2}$

(١٥) في الشكل المقابل :

مساحة سطح △ أ ب جـ

تساوى .... سم^2

(أ) ٢٠ (ب) ٤ $\sqrt{5}$

(جـ) ٢ $\sqrt{5}$ (د) ١٠

أ ، ب ، جـ ، ٣ سم ، ٣ سم ، ٤ سم

(١٦) مساحة المثلث المتساوى الساقين الذى طول أحد ساقيه ١٤ سم ومحيطه ٣٦ سم

تساوى .... سم^2

(أ) ١٢ $\sqrt{5}$ (ب) ١٨ $\sqrt{5}$ (جـ) ٢٤ $\sqrt{5}$ (د) ٣٠ $\sqrt{5}$

(١٧) مساحة الشكل الرباعى أ ب جـ د الذى فيه : ق(∠ب) = ٩٠° ، أ ب = ٥ سم ، ب جـ = ١٢ سم

، أ د = جـ د = ١٣ سم ≃ .... (لأقرب سم^2)

(أ) ١٠٤ (ب) ١٠٣ (جـ) ٩٨ (د) ١٠٥

(١٨) في الشكل المقابل :

مساحة الشكل الرباعى لأقرب سم^2 هو ....

(أ) ٣١ (ب) ٣٩

(جـ) ٤٥ (د) ٨٠

د ، أ ، ب ، جـ ، ٧ ، ٧ ، ٦ ، ٤ ، ٦

(١٩) في الشكل المقابل :

مساحة △ أ ب جـ = ... سم^2

(أ) ٦ $\sqrt{6}$ (ب) ٩ $\sqrt{6}$

(جـ) ٩ $\sqrt{3}$ (د) ٢ $\sqrt{6}$

أ ، ب ، جـ ، د ، ٥ سم ، ٧ سم ، ٩ سم ، ٦ سم

(٢٠) في الشكل المقابل :

مساحة المنطقة المظللة = ... سم^2

(أ) ٩٦ (ب) ٣٨٤

(جـ) ٤٨٠ (د) ٥٧٦

أ ، ب ، جـ ، د ، ١٢ سم ، ٥٢ سم ، ١٦ سم ، ٤٨ سم

(٢١) إذا كانت (Δ) هى مساحة مثلث وكان (٢ ع) هو محيط نفس المثلث فإن طول قطر الدائرة المرسومة داخل المثلث وتمس جميع أضلاعه يساوى ....

(أ) $\frac{\Delta}{ع}$ (ب) $\frac{\Delta}{٢ ع}$ (جـ) $\frac{٢ \Delta}{ع}$ (د) $\frac{٣ \Delta}{٢ ع}$

(٢٢) أى مما يأتى يساوى طول نصف قطر الدائرة التى تمس أضلاع Δ أ ب حـ من الداخل ؟

(أ) $\frac{أ}{٢ ط أ}$ (ب) $\frac{أ + ب + حـ}{ط أ + ط ب + ط حـ}$ (جـ) $\frac{أ ب ط حـ}{أ + ب + حـ}$ (د) $\frac{١}{٢}$ أ حـ ط ب

(٢٣) طول نصف قطر الدائرة التى تمس أضلاع المثلث أ ب حـ من الداخل حيث
أ = ٢٥ سم ، ب = ١٧ سم ، حـ = ٢٦ سم يساوى .... سم

(أ) ٨ (ب) ١٠ (جـ) ٧ (د) ٦

(٢٤) إذا كان محيط مثلث = ٢٥ سم ، طول نصف قطر الدائرة التى تمس أضلاعه من الداخل = ٤ سم فإن مساحته = ... $سم^٢$

(أ) ٤ π (ب) ٢٥ (جـ) ٥٠ (د) ٧٥

(٢٥) فى الشكل المقابل :
مجموع طولى نصفى قطرى الدائرتين الداخلة والخارجة للمثلث أ ب حـ يساوى .... سم

أ، ب، حـ ، ٣ سم ، ٤ سم

(أ) ٤ (ب) ٣ (جـ) ٥ (د) ٣,٥

(٢٦) النسبة بين نصفا قطرى الدائرة الداخلة والخارجة عن المثلث المتساوى الأضلاع = ...

(أ) ١ : ٤ (ب) ١ : ٣ (جـ) ١ : $\sqrt{٣}$ (د) ١ : ٢

(٢٧) فى الشكل المقابل :
النسبة بين طول نصف قطر الدائرة الداخلة والخارجة عن المثلث أ ب حـ = ...

أ، ب، حـ ، ١٠ سم ، ١٠ سم ، ١٦ سم

(أ) ٣ : ٨ (ب) ٨ : ٢٥ (جـ) ٣ : ٢٥ (د) ٣ : ٤

(٢٨) مثلث أطوال أضلاعه س ، س + ٢ ، ٢ س − ٢ حيث س $\geq$ ٣
فإن مساحة سطحه = ... وحدة مربعة.

(أ) $\sqrt{٢}$ س (ب) س $\sqrt{س - ٢}$ (جـ) ٣ س $\sqrt{س - ٢}$ (د) ٢ س $\sqrt{س - ٢}$

ثانيًا الأسئلة المقالية

١ أوجد مساحة المثلث أ ب حـ (إن أمكن) فى كل من الحالات الآتية :

(١) أ = ٤٠ سم ، ب = ٢٤ سم ، حـ = ٣٢ سم «٣٨٤ $سم^٢$»

(٢) ب = ١٦ سم ، حـ = ٢٠ سم ، ق(∠ أ) = ٦٠° «٨٠ $\sqrt{٣}$ $سم^٢$»

(٣) أ = ٥ سم ، ب = ١٢ سم ، حـ = ١٣ سم «٣٠ سم²»

(٤) أطوال أضلاعه ١٢ ، ١٤ ، ٣٠ من السنتيمترات.

---

٢ أوجد طول نصف قطر الدائرة التى تمس أضلاع المثلث أ ب حـ فى كل من الحالتين الآتيتين :

(١) أ = ٧ سم ، ب = ٩ سم ، حـ = ١٤ سم «$\frac{4\sqrt{5}}{5}$ سم»

(٢) أ = ٥ سم ، ب = ٦ سم ، ق(∠حـ) = ٦٠° «١,٦ سم»

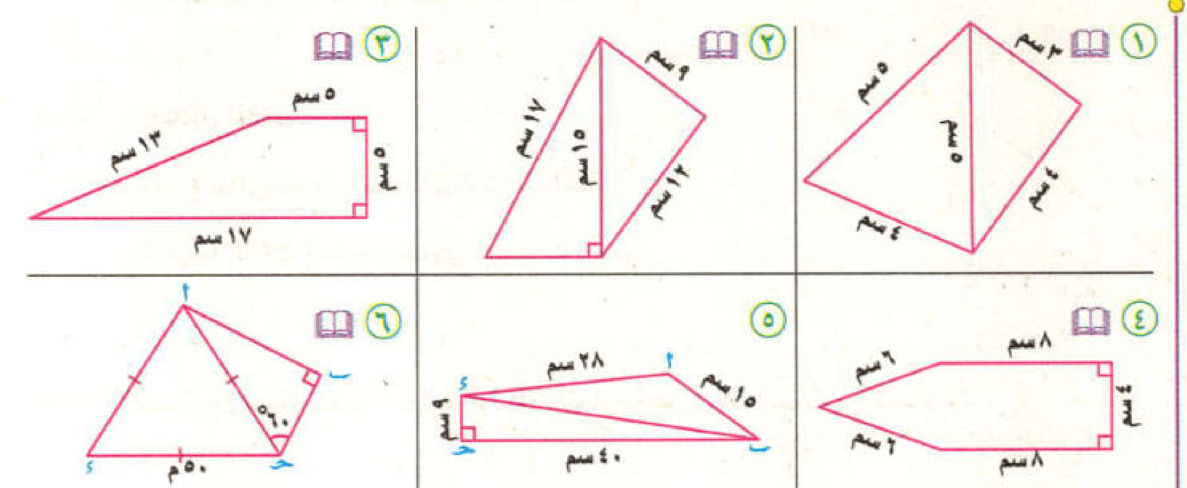
---

٣ حدائق : حديقة على شكل مثلث النسبة بين أطوال أضلاعه هى ٧ : ٥ : ٣

فإذا كان محيط الحديقة يساوى ٣٠٠ متر فأوجد مساحتها. «٢٥٩٨ م²»

---

٤ أوجد مساحة كل شكل من الأشكال الآتية مستخدمًا البيانات المبينة على الرسم :

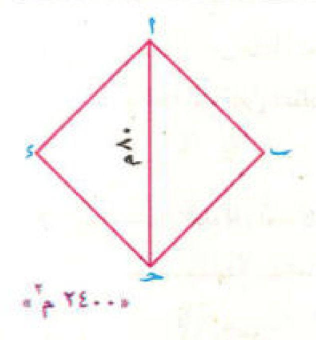


---

٥ الشكل المقابل يمثل قطعة أرض على شكل معين محيطها

٢٠٠ متر وطول $\overline{أحـ}$ = ٨٠ متر

أوجد مساحتها.



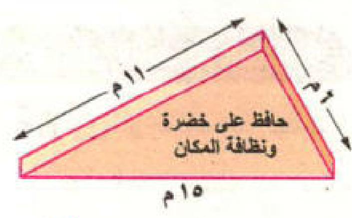
«٢٤٠٠ م²»

---

٦ الربط بالبيئة :

يبين الشكل المقابل حديقة مثلثة الشكل

أوجد مساحتها.



«$20\sqrt{2}$ م²»



الرياضيات

البحتة

- اختبارات تراكمية
- اختبارات شهرية
- امتحانات نهائية

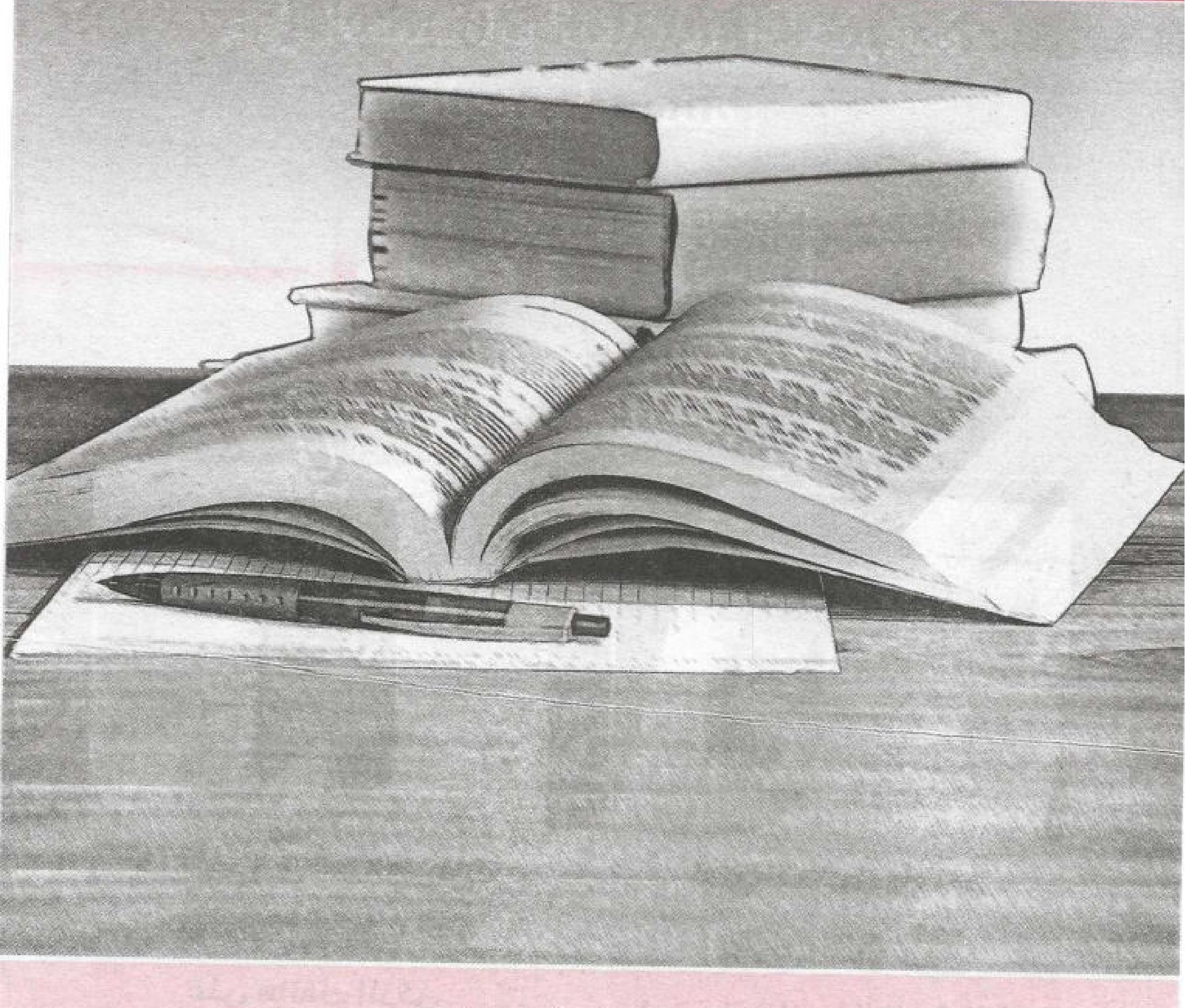




إعداد نخبة من خبراء التعليم

الصف الثانى الثانوى
القسم العلمى
الفصل الدراسى الثانى

محتويات الكتاب



- الاختبارات التراكميـة القصيـرة.
- الاختبارات الشهرية.
- امتحانـات الكتـاب المدرسـى.
- الامتحانـات النهائيـة.
- الإجابـات.

الاختبارات التراكمية القصيرة



أولًا : اختبارات تراكمية قصيرة في الجبر.

ثانيًا : اختبارات تراكمية قصيرة في التفاضل والتكامل.

ثالثًا : اختبارات تراكمية قصيرة في حساب المثلثات.

أولاً اختبارات تراكمية قصيرة فى الجبر

الدرجة الكلية
......
١٢

اختبار 1 على درس 1 من الوحدة الأولى

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

① المتتابعة $(ح_ن)$ المعرفة كالآتى : $ح_١ = ٣$ ، $ح_{ن+١} = ح_ن - ١$ حيث $ن \geq ١$
فإن الحد الثالث يساوى ....

(أ) ٢ (ب) ١ (جـ) ٤ (د) ٣

② الحد العام للمتتابعة : (٢ ، –٤ ، ٦ ، –٨ ، ١٠ ، ...) هو $ح_ن =$ ....

(أ) $٢ن$ (ب) $-٢ن$

(جـ) $(-١)^ن \times ٢ن$ (د) $(-١)^{ن+١} \times ٢ن$

③ الحد النونى للمتتابعة : $(٢ ، ٢ ، \frac{٨}{٣} ، ٤ ، ...)$ يساوى ....

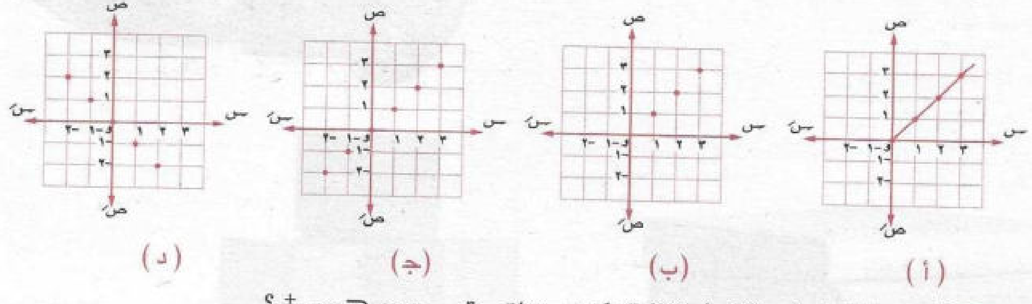
(أ) $ن - ١$ (ب) $٢^ن - ١$ (جـ) $٢^{ن-١}$ (د) $\frac{٢^ن}{ن}$

④ يقال للمتتابعة $(ح_ن)$ إنها تزايدية لجميع قيم $ن \in ص^+$ إذا كان : ....

(أ) $\frac{ح_ن}{ح_{ن+١}} > ١$ (ب) $ح_ن = ح_{ن+١}$

(جـ) $ح_{ن+١} > ح_ن$ (د) $٠ > \frac{ح_ن}{ح_{ن+١}} > -١$

⑤ أى الأشكال الآتية يمثل متتابعة ؟



(أ) (ب) (جـ) (د)

⑥ أى من المتتابعات $(ح_ن)$ التالية تكون متناقصة حيث $ن \in ص^+$ ؟

(أ) $(ح_ن) = (-ن^٢)$ (ب) $(ح_ن) = (ن)$

(جـ) $(ح_ن) = (ن^٣)$ (د) $(ح_ن) = (ن + ١)$

⑦ المتابعة $(ح_ن) = \left(\left(\frac{١}{٢}\right)^ن\right)$ هى متتابعة ....

(أ) تزايدية. (ب) تناقصية. (جـ) ثابتة. (د) تذبذبية.

⑧ الحد العام للمتتابعة : $\left(١ ، \frac{١}{١٠} ، \frac{١}{١٠٠} ، \frac{١}{١٠٠٠} ، ...\right)$ هو $ح_ن$ = ...

(أ) $ن^{ن-١}$ (ب) $(١٠)^{-ن}$ (جـ) $\left(\frac{١}{١٠}\right)^{ن-١}$ (د) $(٠,١)^{ن+١}$

⑨ الحد العاشر من حدود المتتابعة : (حا π ، حا $\frac{π}{٢}$ ، حا $\frac{π}{٣}$ ، حا $\frac{π}{٤}$ ، ...) يساوى ....

(أ) حا ١٠ π (ب) حا $\frac{٩ π}{١٠}$ (جـ) حا $\frac{٢}{٥}$ π (د) حا $\frac{٢ π}{٥}$

⑩ الحد الذى قيمته صفر فى المتتابعة : (-٢٠ ، -١٨ ، -١٦ ، -١٤ ، ...) هو ....

(أ) $ح_{١٠}$ (ب) $ح_{١١}$ (جـ) $ح_٨$ (د) $ح_٥$

⑪ عدد حدود المتتابعة : (١ ، ٤ ، ٩ ، ١٦ ، ... ، ٦٢٥) هو ....

(أ) ٢٥ (ب) ١٢٥ (جـ) ٦٢٥ (د) ٥٠

⑫ الحد التالى فى المتتابعة : $\left(\frac{٣}{٥} ، \frac{٧}{٤} ، \frac{١١}{٣} ، \frac{١٥}{٢} ، ...\right)$ هو ....

(أ) $\frac{١٩}{٢}$ (ب) ١٩ (جـ) $-\frac{٢٦}{٥}$ (د) $\frac{١٦}{٣}$

الدرجة الكلية

....

١٢

اختبار 2 حتى درس 2 من الوحدة الأولى

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

① قيمة المتسلسلة : $\sum_{ر=٧}^{٢٣} ٣ ر$ = ...

(أ) ٢٥٥ (ب) ٧٦٥ (جـ) ٨٠٧ (د) ٨٢٨

② الحد النونى للمتتابعة : (٢ ، ٤ ، ٨ ، ...) هو ....

(أ) $٢ + ٢^{ن-١}$ (ب) $٢^ن$ (جـ) $٢^{ن-١}$ (د) $٢^{ن+١}$

③ المتابعة $(ح_ن) = \left(\frac{٢}{ن} - ٣\right)$ ....

(أ) تزايدية. (ب) تناقصية. (جـ) ثابتة. (د) غير ذلك.

④ قيمة المتسلسلة (٧ + ١٢ + ١٧ + ٢٢) باستخدام رمز التجميع هى ....

(أ) $\sum_{ر=١}^{٤}$ (٧ ر + ١)　　(ب) $\sum_{ر=١}^{٤}$ (٤ ر + ٣)

(جـ) $\sum_{ر=١}^{٤}$ (٥ ر + ٢)　　(د) $\sum_{ر=١}^{٤}$ (٣ ر + ٤)

⑤ $\sum_{ر=م}^{ن}$ ٢ ر = ...

(أ) $\sum_{ر=م}^{ن}$ ٢ × $\sum_{ر=م}^{ن}$ ر　　(ب) $\sum_{ر=١}^{م}$ ٢ ر − $\sum_{ر=م}^{ن}$ ٢ ر

(جـ) $\frac{٢ (ن) (ن + ١)}{٢} - \frac{٢ (م) (م - ١)}{٢}$　　(د) $\frac{(ن) (ن + ١)}{م (م + ١)}$

⑥ ٥ + ١٠ + ١٥ + ٢٠ + ... + ن = ...

(أ) $\frac{٥ ن (ن + ١)}{٢}$　　(ب) $\sum_{ر=١}^{ن-٥}$ ٥ ر

(جـ) $\sum_{ر=١}^{\frac{ن}{٥}}$ ر　　(د) $\frac{ن (\frac{ن}{٥} + ١)}{٢}$

⑦ $\sum_{ر=١}^{ن}$ (ر^{٢} + ٢) = ...

(أ) $\left(\sum_{ر=١}^{ن} ر\right)^{٢}$ + $\sum_{ر=١}^{ن}$ ٢　　(ب) $\frac{ن (ن + ١)}{٢}$ + ٢ ن

(جـ) $\frac{ن (ن + ١) (٢ ن + ١)}{٦}$ + ٢ ن　　(د) ن (ن^{٢} + ٢)

⑧ إذا كان : د (س) = ٢ س − ١ ، $\sum_{ر=١}^{ن}$ ر^{٢} = ٥٥ ، $\sum_{ر=١}^{ن}$ ر = ١٥ ، $\sum_{ر=١}^{ن}$ ١ = ٥

فإن : $\sum_{ر=١}^{ن}$ [د (ر)]^{٢} = ...

(أ) ٤٠　　(ب) ٨　　(جـ) ١٢٠　　(د) ١٦٥

⑨ $\sum_{س=١°}^{٩٠°}$ (جتا س − جا س) = ...

(أ) −١　　(ب) ١　　(جـ) صفر　　(د) ٩٠°

⑩ فى المتتابعة (ح$_{ن}$) إذا كان : ح$_{ن}$ = ٢ + ن ب ، ح$_{١}$ = ٥ ، ح$_{٢}$ = ١١

فإن : ب = ...

(أ) ٧　　(ب) ٦　　(جـ) ١١　　(د) ٥

(١١) الحد العام للمتتابعة : ((٣ × ٥) ، (٤ × ٦) ، (٥ × ٧) ، (٦ × ٨) ، ...)
هو $ح_ن$ = ...

(أ) $ن(ن+١)$ (ب) $٣ن × (ن+٢)$
(جـ) $(ن+٢)(ن+٤)$ (د) $ن^٢ + ٥ن + ٦$

(١٢) يقال للمتتابعة $(ح_ن)$ إنها تزايدية لجميع قيم $ن \in ص^+$ إذا كان ....

(أ) $\frac{ح_ن}{ح_{ن+١}} > ١$ (ب) $ح_ن = ح_{ن+١}$
(جـ) $ح_{ن+١} > ح_ن$ (د) $\frac{ح_ن}{ح_{ن+١}} > -١$

الدرجة الكلية
....
١٢

اختبار 3 حتى درس 3 من الوحدة الأولى

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) قيمة الحد الأوسط فى المتتابعة : (٢ ، ٥ ، ٨ ، ١١ ، ..... ، ١٢٨) هى ....

(أ) ٢٢ (ب) ٤٣ (جـ) ٦٥ (د) ٢٧٩٥

(٢) قيمة المتسلسلة : $\sum_{ر=١}^{١٥} (ر^٢ + ر + ١)$ = ...

(أ) ١٣٧٥ (ب) ٣٧٢٠ (جـ) ١٤٤٠٠ (د) ٢٢٣٢٠٠٠

(٣) إذا كانت : (س ، -٣ ، ٤س - ١ ، ...) متتابعة حسابية فإن : س = ...

(أ) $\frac{٤}{٥}$ (ب) $\frac{-٢}{٥}$ (جـ) -١ (د) -٥

(٤) عدد حدود المتتابعة : (٧ ، ١١ ، ١٥ ، ... ، ٢٧١) هو ....

(أ) ٣٤ (ب) ١٦٩ (جـ) ٦٧ (د) ٣١٣

(٥) إذا كانت أ ، ب ، جـ فى تتابع حسابى فأى مما يأتى صحيح ؟

(أ) أ + ب = ب + جـ (ب) أ + ب = ٢ جـ
(جـ) $\frac{ب}{أ} = \frac{جـ}{ب}$ (د) أ + جـ = ٢ ب

(٦) عند إدخال ن وسط حسابى بين أ ، ب يكون أساس المتتابعة الحسابية هو ....

(أ) $\frac{أ - ب}{ن + ١}$ (ب) $\frac{أ - ب}{ن + ٢}$ (جـ) $\frac{ب - أ}{ن + ١}$ (د) $\frac{ب - أ}{ن + ٢}$

⑦ إذا كان : $\sum_{ك=1}^{ن} ك = س$ ، $\sum_{ك=1}^{ن} ك^٢ = ٧ س$ فإن : ن = ...

(أ) ٨ (ب) ١٠ (جـ) ١٢ (د) ١٥

⑧ إذا كانت الكميات : $\frac{أ}{ب}$ ، $\frac{ب}{حـ}$ ، $\frac{حـ}{ب}$ فى تتابع حسابى فإن : حـ (حـ + أ) = ...

(أ) $ب^٢$ (ب) $٤ ب^٢$ (جـ) $٢ ب^٢$ (د) ٢ ب

⑨ قيمة المتسلسلة : ٤ + ٩ + ١٤ + ... + (٥ ن − ١) باستخدام رمز التجميع هى ....

(أ) $\sum_{ر=٤}^{ن} (٥ ر - ١)$ (ب) $\sum_{ر=١}^{ن} (٥ ر + ١)$

(جـ) $\sum_{ر=١}^{ن} (٥ ر - ١)$ (د) $\sum_{ر=١}^{٥ن-١} (٣ ر + ١)$

⑩ عند إدخال ٧ أوساط حسابية بين العددين −٢٤ ، ١٦ فإن قيمة الوسط الرابع هى ....

(أ) صفر (ب) −٩ (جـ) ١ (د) −٤

⑪ أول حد سالب فى المتتابعة (٣٥ ، ٣٣ ، ٣١ ، ٢٩ ، ...) هو ....

(أ) $ح_{١٨}$ (ب) $ح_{١٩}$ (جـ) $ح_{٣٦}$ (د) $ح_{٢٤}$

⑫ متتابعة حسابية فيها : $ح_ن = م^٢$ ، $ح_م = ن^٢$ فإن أساس المتتابعة = ...

(أ) $م^٢ + ن^٢ - ٢$ (ب) م + ن (جـ) − م − ن (د) − م + ن

الدرجة الكلية

١٢

اختبار 4 حتى درس 4 من الوحدة الأولى

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

① مجموع ٢٥ حدًا الأولى من حدود المتتابعة : (٣ − ٢ ن) يساوى ....

(أ) ٦٥٠ (ب) ٦٠٠ (جـ) −٥٧٥ (د) −٦٠٠

② الوسط الحسابى للعددين : ٣ س − ٧ ، ٥ س + ٣ هو ....

(أ) ٤ س − ٥ (ب) ٤ س − ٢ (جـ) ٤ س + ٢ (د) ٨ س − ٤

(٣) قيمة المتسلسلة : $\sum_{ر=٣}^{٧} (٣ر - ١) = $ ....

(أ) ٦٢ (ب) ٧٠ (جـ) ٧٥ (د) ٧٧

(٤) المتسلسلة : ٧ + ١٤ + ٢١ + ... + ١٤٠ رمز المجموع لها على الصورة ....

(أ) $\sum_{ر=١}^{٢٠} ٧ر$ (ب) $\sum_{ر=١}^{١٠} ٧ر$

(جـ) $\sum_{ر=١}^{١٠} (ر + ٦)$ (د) $\sum_{ر=١}^{١٠} (٦ر + ١)$

(٥) $\sum_{س=١°}^{٩٠°} (\text{جتا}\, س - \text{جا}\, س) = $ ....

(أ) -١ (ب) ١ (جـ) صفر (د) ٩٠°

(٦) إذا كان : $\sum_{ر=١}^{ن} ١ + \sum_{ر=١}^{ن} ٢ + \sum_{ر=١}^{ن} ٣ + ... + \sum_{ر=١}^{ن} ٢٠ = ٤٢٠$

فإن : ن = ...

(أ) ٢ (ب) ٣ (جـ) ٤ (د) ٥

(٧) إذا كان $(ح_ن)$ متتابعة حسابية وكان $ح_٣ + ح_٧ + ح_{١١} + ح_{١٥} = ٧٢$

فإن $جـ_{١٧}$ الأولى من هذه المتتابعة يساوى ....

(أ) ٣٠٦ (ب) ٢٠٤ (جـ) ١٥٣ (د) ٦١٢

(٨) أى المتتابعات الحسابية الآتية مجموع العشرين حدًا الأولى منها ٨٢٠ ؟

(أ) (٢ ، ٦ ، ١٠ ، ...) (ب) (١ ، ٥ ، ٩ ، ...)

(جـ) (٣ ، ٧ ، ١١ ، ...) (د) (٤ ، ٨ ، ١٢ ، ...)

(٩) الحد الأوسط فى المتتابعة الحسابية (-٥ ، ٠ ، ٥ ، ... ، ٩٥) هو ....

(أ) $ح_{١٠}$ (ب) $ح_{١٥}$ (جـ) $ح_٩$ (د) $ح_{١١}$

(١٠) لإيجاد أكبر مجموع لحدود المتتابعة (٦٧ ، ٦٤ ، ٦١ ، ...) بدءًا من حدها الأول نوجد ....

(أ) $جـ_{٢٤}$ (ب) $جـ_{٢٥}$ (جـ) $جـ_{٢٣}$ (د) $جـ_{٣٠}$

(١١) مجموع الوسطين الحسابيين الأول والأخير بين العددين ٧ ، ٣١ يساوى ....

(أ) ١٩ (ب) ٣٨ (جـ) ٢٤ (د) ١٣

(١٢) $\sum_{ر=١}^{م} م^٢ = ...$

(أ) $\frac{م (م + ١)}{٢}$ (ب) $\frac{م (م + ١) (٢ م + ١)}{٦}$

(جـ) $م^٣$ (د) $م^٢ ر$

الدرجة الكلية

١٢

اختبار 5 حتى درس 5 من الوحدة الأولى

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) إذا كانت : س > ٠ فإن أساس المتتابعة الهندسية :

(٤ ، س − ٣ ، ٢ س + ٦ ، ...) هو ....

(أ) ٥ (ب) ١٥ (جـ) ٣ (د) ٢٤

(٢) الحد النونى للمتتابعة الهندسية : $(\frac{-١}{٢} ، \frac{١}{٤} ، \frac{-١}{٨} ، ...)$ يساوى ....

(أ) $(\frac{-١}{٢})^{ن-١}$ (ب) $(\frac{١}{٢})^{ن-١}$ (جـ) $(\frac{١}{٢})^{ن}$ (د) $(-\frac{١}{٢})^{ن}$

(٣) الحد التالى فى المتتابعة الهندسية : $(٨ ، ٦ ، \frac{٩}{٢} ، \frac{٢٧}{٨} ، ...)$ يساوى ....

(أ) $\frac{١٣}{٨}$ (ب) $\frac{٢٧}{١٦}$ (جـ) $\frac{٩}{٤}$ (د) $\frac{٨١}{٣٢}$

(٤) إذا كان : $\sum_{ك=١}^{ن} ك = س$ ، $\sum_{ك=١}^{ن} ك^٣ = ٧ س$ فإن : ن = ...

(أ) ٨ (ب) ١٠ (جـ) ١٢ (د) ١٥

(٥) لأى متتابعة هندسية يكون $ح_١ × ح_٥ = ...$

(أ) $(ح_٣)^٢$ (ب) $(ح_١)^٢$ (جـ) $(ح_٥)^٢$ (د) $(ح_٢)^٢$

(٦) إذا كانت $(أ^٢ ، أ ب ، ب^٢ − ٩)$ متتابعة حسابية فأى مما يأتى صحيح ؟

(أ) أ + ب = ٣ (ب) $(أ − ب)^٢ = ٩$

(جـ) أ − ب > ٣ (د) أ + ب = −٣

(٧) رتبة آخر حد سالب فى المتتابعة الحسابية : (−٩٨ ، −٩٦ ، −٩٤ ، ...) تساوى ....

(أ) ٤٩ (ب) ٥٠ (جـ) ٥١ (د) ٤٨

(٨) جميع المتتابعات الآتية هندسية ما عدا المتتابعة ....

(أ) (٣ ، −٦ ، ١٢ ، −٢٤ ، ...) (ب) (لو أ ، لو $أ^{٢}$ ، لو $أ^{٣}$ ، لو $أ^{٤}$ ، ...)

(جـ) $\left(\frac{٣}{٢} ، ١ ، \frac{٢}{٣} ، \frac{٤}{٩} ، ...\right)$ (د) $\left(\frac{٣ب}{أ^{٢}} ، ٣ ، \frac{٦أ}{ب} ، \frac{١٢أ^{٢}}{ب^{٢}} ، ...\right)$

(٩) إذا كان أ ، ب ، حـ فى تتابع هندسى وأساس المتتابعة يساوى ر

فإن جميع العبارات الآتية صحيحة ما عدا ....

(أ) $ر = \frac{ب}{أ}$ (ب) $ر = \frac{حـ}{ب}$ (جـ) $ر = \frac{ب^{٢}}{أحـ}$ (د) $ر = \frac{ب + حـ}{أ + ب}$

(١٠) الوسط الحسابى لعددين حقيقيين موجبين مختلفين .... وسطهما الهندسى.

(أ) $=$ (ب) $>$ (جـ) $<$ (د) $\geq$

(١١) إذا كانت $(ح_ن)$ ، $(ح'_ن)$ متتابعتين هندسيتين فأى مما يأتى يمثل متتابعة هندسية ؟

(أ) $(ح_ن)^{ك}$ (ب) $(ك ح'_ن)$ (جـ) $(ح_ن ح'_ن)$ (د) كل ما سبق.

(١٢) إذا كان (أ ، ب ، حـ ، ...) متتابعة هندسية تزايدية وكان (٣أ ، ٢ب ، حـ ، ...) متتابعة حسابية فإن أساس المتتابعة الهندسية يساوى ....

(أ) ٢ (ب) ٣ (جـ) ٤ (د) ٥

اختبار 6 حتى درس 6 من الوحدة الأولى

الدرجة الكلية ١٢

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) مجموع حدود المتتابعة الهندسية : (٨١ ، ٢٧ ، ٩ ، .....) يساوى ....

(أ) $\frac{٢٤٣}{٤}$ (ب) ١١٧ (جـ) ١١٨ (د) $\frac{٢٤٣}{٢}$

(٢) عدد حدود المتتابعة الحسابية : (٧ ، ١١ ، ١٥ ، ..... ، ٢٧١) هو ....

(أ) ٣٤ (ب) ٦٧ (جـ) ١٦٩ (د) ٩٣١٣

③ إذا كانت : س ، ص ، ع ثلاثة أعداد مختلفة فى تتابع هندسى فإن : ....

(أ) ٢ ص < س + ع (ب) ص^{٢} > س ع

(جـ) ص = س ع (د) $\sqrt{ص}$ = س ع

④ متتابعة مجموع ن حدًا الأولى منها يعطى بالعلاقة : حـ$_{ن}$ = ٣$^{ن+١}$ − ٤

فإن الحد الثالث منها يساوى ....

(أ) ١٨ (ب) ٢٣ (جـ) ٥٤ (د) ٧٧

⑤ متتابعة حسابية حدها النونى = م ، حدها الميمى = ن فإن : ح$_{م+ن}$ = ...

حيث م ≠ ن

(أ) م + ن (ب) م + ن + ٣ (جـ) ٢ م − ن (د) صفر

⑥ متتابعة هندسية لانهائية حدها الأول = س ومجموع حدودها = ٥ فإن : ....

(أ) س ≤ ١٠ (ب) ٠ < س < ١٠

(جـ) س < −١٠ (د) −١٠ < س < ٠

⑦ قيمة المتسلسلة : $\sum_{ر=٧}^{٢٣}$ ٣ ر = ...

(أ) ٢٥٠ (ب) ٧٦٥ (جـ) ٨٠٧ (د) ٨٢٨

⑧ الحد النونى للمتتابعة : (٢ ، ٢ ، $\frac{٨}{٣}$ ، ٤ ، ...) يساوى ....

(أ) ن − ١ (ب) ٢$^{ن-١}$ (جـ) ٢^{ن} − ١ (د) $\frac{٢^{ن}}{ن}$

⑨ إذا كان الوسط الحسابى بين أ ، ب هو ٨ والوسط الحسابى بين ٤ أ ، ٢ ب هو ٢٠

فإن : أ − ب = ...

(أ) ٨ (ب) ١٦ (جـ) −٨ (د) ٢٠

⑩ متتابعة هندسية عدد حدودها ٢ ن وأساسها (ر) فإن النسبة بين مجموع حدودها الفردية الرتبة إلى مجموع حدودها الزوجية الرتبة تساوى ....

(أ) $\frac{١}{ر}$ (ب) $\frac{١}{ر^{٢}}$ (جـ) ر^{٢} (د) $\frac{ن}{ر}$

⑪ الوسط الحسابى للعددين : (أ + ب)^{٢} ، (أ − ب)^{٢} هو ....

(أ) ٢ أ (ب) أ + ب (جـ) أ^{٢} + ب^{٢} (د) أ^{٢} − ب^{٢}

⑫ $\sum_{ر=٠}^{\infty}$ (جتا ٦٠°)^{ر} = ...

(أ) ١ (ب) −٣ (جـ) $\frac{١}{٢}$ (د) ٢

الدرجة الكلية
....
١٢

اختبار 7 حتى درس 1 من الوحدة الثانية

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

① عدد طرق ترتيب جلوس ٥ أشخاص حول مائدة على شكل دائرة هو ....

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) ٢٤ (د) ١٢٠

② عدد طرق تكوين عدد من رقمين من الأرقام ٠ ، ١ ، ٢ ، ٣ يساوى ....

(أ) ١٢ (ب) ١٦ (جـ) ٩ (د) ٨

③ إذا كان : (س ، ص ، ع) فى تتابع هندسى فإن : $ص^2$ = ...

(أ) س ع (ب) $\pm\sqrt{س ع}$

(جـ) $س^2 ع^2$ (د) $\frac{س + ع}{٢}$

④ إذا كان : $^{٥}ل_{ر+١} = ٦٠$ فإن : ر = ...

(أ) ٥ (ب) ٤ (جـ) ٣ (د) ٢

⑤ مجموع المتسلسلة : $\left(١ + \frac{٤}{٥} + \frac{٧}{٥^٢} + \frac{١٠}{٥^٣} + \frac{١٣}{٥^٤} + ... \text{إلى ٢٥ حدًا}\right)$ = ...

(أ) $\frac{٣٥}{١٦}$ (ب) $\frac{٧}{٤}$ (جـ) ٢,١٨ (د) $\frac{١٧}{١٣}$

⑥ إذا كان : $^{ن}ل_{س} + ^{س}ل_{ن} = ١٤٤٠$ فإن : $^{ن+٤}ق_{س-٥}$ = ...

(أ) ٧٢٠ (ب) ٢٤ (جـ) ٦ (د) ١٠

⑦ مجموع ن وسطًا حسابيًا بين العددين أ ، ب = ...

(أ) ن(أ + ب) (ب) $\frac{ن}{٢}$ (أ + ب)

(جـ) $\frac{(ن + ١)(أ + ب)}{٢}$ (د) $\frac{أ + ب}{٢}$

⑧ إذا كان : $\underline{|ن - ١} = ١٢٠$ ، $\underline{|ن - ر} = ٦$ فإن : $^{ن}ل_{ر}$ = ...

(أ) ٧٢٠ (ب) ٦ × ٥ × ٤ (جـ) ٣ × ٤ × ٥ (د) ٦ × ٥

(٩) متتابعة حسابية فيها : $\frac{ح_٧}{ح_٣} = \frac{١٥}{٧}$ فإن : $\frac{ح_٧}{ح_٣}$ = ...

(أ) $\frac{٢٢}{١٧}$ (ب) $\frac{٢١}{٥}$ (جـ) $\frac{١٦}{١٥}$ (د) $\frac{١٥}{٧}$

(١٠) إذا كان : ن| ٢ ن - ١ = ١٢ فإن : ن= ....

(أ) ٤ (ب) ٢ (جـ) ٦ (د) ٥

(١١) إذا كان رقم الآحاد فى |ن لا يساوى صفر فإن : ....

(أ) ن> ٤ (ب) ن< ٥ (جـ) ن> ٩ (د) ن عدد فردى.

(١٢) إذا كان : $\sum_{ر=١}^{ن}$ لو $\left(\frac{ر+١}{ر}\right) = ٢$ فإن : ن= ....

(أ) ١٠ (ب) ٢٠ (جـ) ٩٩ (د) ١٠٠

الدرجة الكلية

١٢

اختبار 8 حتى درس 2 من الوحدة الثانية

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) عدد الأزواج المرتبة (أ ، ب) التى يمكن تكوينها من عناصر المجموعة {١ ، ٢ ، ٣}
حيث أ ≠ ب هو ....

(أ) ٢ (ب) ٣ (جـ) ٦ (د) ٩

(٢) إذا كان : $ق_{١٠}^{ن} = ق_{١٤}^{ن}$ فإن : $^{٢٥}ق_{ن}$ = ...

(أ) ٢٤ (ب) ٢٥ (جـ) ١ (د) ٤٩

(٣) إذا كان مجموع عدد غير منته من حدود المتتابعة الهندسية التى حدها الأول ١٢ هو ٩٦
فإن أساسها يساوى ....

(أ) $\frac{١}{٣}$ (ب) $\frac{١}{٢}$ (جـ) $\frac{٧}{٨}$ (د) $\frac{٣}{٤}$

(٤) إذا كان : $^{٥}ل_{ر} = ٦٠$ فإن : ر = ...

(أ) ٤ (ب) ٣ (جـ) ٢ (د) ٥

⑤ متتابعة حسابية عدد حدودها $ن$ فإن الحد الذى رتبته $ك$ من النهاية هو الحد التى رتبته .... من البداية.

(أ) $ك$ (ب) $ن - ك$ (جـ) $ن - ك + ١$ (د) $ن - ك + ٢$

⑥ يراد تقسيم ٨ ألعاب مختلفة بين ثلاثة أطفال بحيث يأخذ الطفل الأول ٣ ألعاب والثانى لعبتين والثالث يأخذ الباقى فبكم طريقة يمكن إجراء التقسيم ؟

(أ) $^{٨}ق_{٣} + {}^{٨}ق_{٢} + {}^{٨}ق_{٨}$ (ب) $^{٨}ق_{٣} \times {}^{٨}ق_{٢}$

(جـ) $^{٨}ق_{٣} \times {}^{٥}ق_{٢} \times {}^{٥}ق_{٢}$ (د) $^{٨}ق_{٣} \times {}^{٥}ق_{٢}$

⑦ إذا كانت : $^{٦}ق_{س} = {}^{٤}ق_{س}$ فإن : $س$ = ...

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) ٤ (د) ١٠

⑧ شخص له ٥ أصدقاء فإن عدد طرق دعوة صديق أو أكثر منهم للعشاء = ...

(أ) ٣٢ (ب) ٣١ (جـ) ٢٥ (د) ١٦

⑨ عدد الحدود التى يلزم أخذها من حدود المتتابعة : (−٤٣ ، −٣٦ ، −٢٩ ، ...) ابتداء من حدها الأول ليكون المجموع ٢٢١ هو ....

(أ) ١٨ (ب) ١٦ (جـ) ١٩ (د) ١٧

⑩ مجموع الحدود الفردية الرتبة من حدود المتتابعة الحسابية (٢ ، ٥ ، ٨ ، ... ، ١١٠) يساوى ....

(أ) ١٠٠٨ (ب) ١٠٢٤ (جـ) ١٠٦٤ (د) ١٠٢٠

⑪ إذا كان : $س > ٠$ فإن أساس المتتابعة الهندسية : (٤ ، $س - ٣$ ، $٢س + ٦$ ، ...) يساوى ....

(أ) ١ (ب) ٥ (جـ) ٣ (د) ٢٤

⑫ عددان وسطهما الحسابى $م$ ووسطهما الهندسى $ن$ فإن مجموع مربعيهما = ...

(أ) $٤م^{٢} - ٢ن^{٢}$ (ب) $م^{٢} + ن^{٢}$ (جـ) $٢م^{٢} - ن^{٢}$ (د) $٤م^{٢}$



ثانيًا اختبارات تراكمية قصيرة فى التفاضل والتكامل

الدرجة الكلية ١٢

اختبار 1 على درس 1 من الوحدة الثالثة

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

① متوسط تغير الدالة د حيث د (س) = $س^٢$ عندما تتغير س من ٣ إلى ٣,١

يساوى ....

(أ) ٠,٦١ (ب) ٦,١ (جـ) ٩ (د) ٩,٦١

② معدل تغير الدالة د : د (س) = $س^٢$ عند س = ١ هو ....

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) صفر (د) ٣

③ إذا كان متوسط التغير فى د يساوى ٧ عندما تتغير س من ٣ إلى ٥

وكانت : د (٣) = ٨ فإن : د (٥) = ...

(أ) ٢٢ (ب) ١٢ (جـ) ٧ (د) غير ذلك.

④ متوسط التغير فى حجم مكعب عندما يتغير طول حرفه من ٥ سم إلى ٧ سم

يساوى ....

(أ) ١٢٥ (ب) ٣٤٣ (جـ) ٢١٨ (د) ١٠٩

⑤ متوسط التغير فى الدالة د : د (س) = $\frac{١}{\sqrt{٣}}$ س عندما تتغير س من ١ إلى ٢

هو ....

(أ) $\frac{١}{\sqrt{٣}}$ (ب) $\sqrt{٣}$

(جـ) $-\sqrt{٣}$ (د) $\frac{١}{٢}$

⑥ عندما تتغير س من $س_١$ إلى $س_٢$ فإن التغير فى الدالة د يساوى ....

(أ) د ($س_٢$ − $س_١$) (ب) د ($س_١$) − د ($س_٢$)

(جـ) د ($س_٢$) − د ($س_١$) (د) د ($س_١$ − $س_٢$)

(٧) دائرة طول نصف قطرها نق فإن متوسط التغير فى محيط الدائرة عندما تتغير نق من $نق_١$ إلى $نق_٢$ هو ....

(أ) ٢ π $نق_١$ (ب) ٢ π ($نق_٢$ – $نق_١$)

(جـ) π $نق_١$ (د) ٢ π

(٨) أى الدوال الآتية يكون التغير فى د يساوى صفر لجميع قيم التغير فى س من أ إلى أ + هـ ؟

(أ) د : د (س) = $س^٢$ (ب) د : د (س) = ٣ س – ٢

(جـ) د : د (س) = ٧ (د) د : د (س) = |س|

(٩) صفيحة على شكل مربع تتمدد بانتظام محتفظة بشكلها فإن معدل التغير فى مساحتها عندما يكون طول ضلعها ٥ سم يساوى ....

(أ) ١٠ (ب) ٥ (جـ) ٢٥ (د) ١٠٠

(١٠) إذا كانت : د (س) = أ س + ب فإن متوسط التغير للدالة د عندما تتغير س من $س_١$ إلى $س_٢$ هو ....

(أ) – أ (ب) أ (جـ) أ + ب (د) ١

(١١) إذا كانت : د (س) = $\begin{cases} س^٢ & ، \quad س < ٤ \\ ٣ - س & ، \quad س \geq ٤ \end{cases}$ فإن معدل التغير فى د عندما س = ٧ هو ....

(أ) ٣ (ب) –١ (جـ) –٢ (د) $\frac{-١}{٣}$

(١٢) إذا كانت : د (س) = $س^٥$ فإن : $\lim_{هـ \to ٠} \frac{د(س + هـ) - د(س)}{هـ}$ = ...

(أ) ٥ (ب) ٥ $س^٤$ (جـ) $س^٥$ (د) غير موجودة.

الدرجة الكلية

......

١٢

اختبار 2 حتى درس 2 من الوحدة الثالثة

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

① متوسط تغير الدالة د : د (س) = س^٢ عندما تتغير س من ٤ إلى ٤,١ يساوى ....

(أ) ٨,١ (ب) ٠,٨١ (جـ) ١٦ (د) ١٦,٨١

② إذا كانت الدالة د : د (س) = { س^٢ + أ ، س ≤ ٢ ؛ أ س + ب ، س > ٢ }

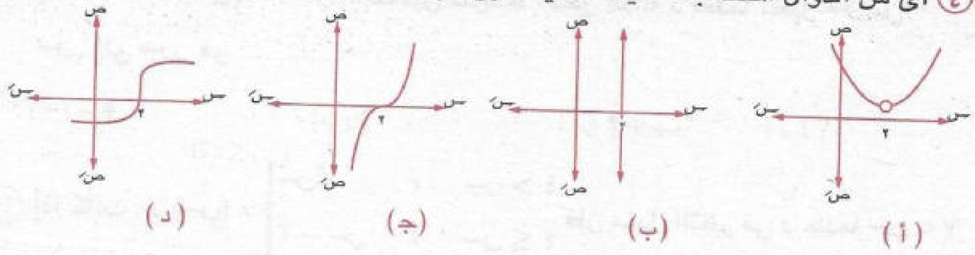
قابلة للاشتقاق عند س = ٢ فإن : أ + ب = ...

(أ) ٤ (ب) −٤ (جـ) ٨ (د) −٨

③ معدل التغير للدالة د : د (س) = ٣ س^٢ + ٢ عند س = ٢ هو ....

(أ) ٤ (ب) ١٢ (جـ) ١٠ (د) ١٤

④ أى من الدوال الممثلة بالمنحنيات الآتية تكون قابلة للاشتقاق عند س = ٢ ؟



(أ) (ب) (جـ) (د)

⑤ نهـــا (هـ ← ٠) [د (هـ + ٣) − د (هـ − ٢) + د (−٢) − د (٣)] / هـ = ...

(أ) دَ (٣) + دَ (−٢) (ب) دَ (٣)

(جـ) دَ (−٢) (د) دَ (٣) − دَ (−٢)

⑥ إذا كان منحنى الدالة د : د (س) = س^٢ − ١ يمر بالنقطتين أ (٢ ، د (٢)) ، ب (٣ ، د (٣)) فإن : (ميل القاطع ‎$\overleftrightarrow{أب}$‎) / (ميل المماس للمنحنى عند أ) = ...

(أ) ٥ (ب) $\frac{٥}{٤}$ (جـ) $\frac{٤}{٥}$ (د) ١

(٧) إذا كانت الدالة د : د (س) = ٣ س − ٢

فإن دالة التغير ت (هـ) = ... عند س = ١

(أ) ٦ هـ (ب) ٣ هـ (جـ) هـ (د) ٣

(٨) إذا كانت : د دالة ، د (أ) = ٠ ، دَ (أ) = ب ، ب > ٠

وكان : ر (س) = | د (س) | فإن : رَ (أ) = ...

(أ) ب (ب) − ب (جـ) غير معرف. (د) صفر

(٩) كل مما يأتى يكون كافيًا لإثبات أن الدالة د قابلة للاشتقاق عند س = ٢ ماعدا ....

(أ) د (٢^+) = د (٢^-) = د (٢) (ب) نهـا$_{هـ \leftarrow ٠}$ $\frac{د (٢ + هـ) - د (٢)}{هـ}$ موجودة.

(جـ) دَ (٢^+) = دَ (٢^-) (د) د كثيرة حدود مجالها ح

(١٠) الدالة د : د (س) = $\frac{س^٢ - ٤}{س + ٢}$ تكون ....

(١) متصلة عند س = −٢ (٢) قابلة للاشتقاق عند س = −٢

(٣) لها نهاية عند س = −٢

(أ) (١) فقط. (ب) (٢) فقط. (جـ) (٢) ، (٣) فقط. (د) (٣) فقط.

(١١) إذا كانت : د دالة وكان : د (٣) = ٥ ، دَ (٣) = ١ فإن : نهـا$_{س \leftarrow ٣}$ د (س) = ...

(أ) ٥ (ب) ١ (جـ) ٣ (د) غير موجودة.

(١٢) إذا كانت : د (س) = $\begin{cases} س^٢ &، س \leq ٢ \\ ٤ س &، س > ٢ \end{cases}$ فإن : دَ (٢) = ...

(أ) ٢ (ب) ٤ (جـ) ٨ (د) غير موجودة.

الدرجة الكلية

......

١٢

اختبار 3 حتى درس 3 من الوحدة الثالثة

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) عندما تتغير قيمة س من ١ إلى ١٫٣ حيث د (س) = $س^٣$

فإن متوسط التغير للدالة يساوى ....

(أ) ٢٫١٩٧ (ب) ١ (جـ) ٧٫٣٢ (د) ٣٫٩٩

(٢) إذا كان : د (س) = $\frac{١}{س + ١}$ فإن : دَ (١) = ...

(أ) $\frac{١}{٤}$ (ب) $-\frac{١}{٤}$ (جـ) ١ (د) -١

(٣) معدل تغير الدالة د : د (س) = $س^{١٥}$ عند س = ١ هو ....

(أ) ١ (ب) ١٥ (جـ) ١٤ (د) صفر

(٤) إذا كانت : $\frac{ء}{ءس}$ $[(أس)^٣]$ = ٢٤ عندما س = ١ فإن قيمة أ تساوى ....

(أ) ٨ (ب) ٢ (جـ) ١ (د) ٢٤

(٥) إذا كانت : د (س) = ٤ س + ١ فإن التغير فى د عندما تتغير س من ٢ إلى ٢٫١ يساوى ....

(أ) ٠٫٤ (ب) ٠٫١ (جـ) ٤٫١ (د) ٤

(٦) إذا كان : س ص = ٨١ فإن : $\frac{ءص}{ءس}$ = ... عند س = ٩

(أ) -٩ (ب) -١ (جـ) ١ (د) ٩

(٧) إذا كانت : ص = $\frac{س^٢ + ٦}{س^٢ + ٥}$ فإن : صَ عندما س = ١ تساوى ....

(أ) $-\frac{١}{٤}$ (ب) $\frac{٦}{٥}$ (جـ) $\frac{٧}{٦}$ (د) $\frac{١١}{١٢}$

(٨) إذا كانت د : د (س) دالة قابلة للاشتقاق عند س = ٢ ، د (٢) = ٣

، دَ (٢) = $\frac{١}{٢}$ ، ر (س) = $س^٢$. د (س) فإن : رَ (٢) = ...

(أ) ٢ (ب) $\frac{٣}{٢}$ (جـ) ١٢ (د) ١٤

⑨ إذا كان للدالة د مماس أفقي عند س = −٣ فإن : ....

(أ) د غير قابلة للاشتقاق عند س = −٣ (ب) دَ (−٣) = −٣

(ج) نهـا ه ← ٠ $\frac{د(-٣ + هـ) - د(-٣)}{هـ}$ = صفر (د) د (س) = −٣

⑩ إذا كانت : ص = ٣ $\sqrt[٤]{س}$ فإن : $\frac{ءص}{ءس}$ = ...

(أ) ١٢ س٣ (ب) ١٢ $\sqrt[٣]{س}$ (ج) $\frac{٣}{٤ \sqrt[٣]{س^٤}}$ (د) $\frac{٣}{٤ \sqrt[٤]{س^٣}}$

⑪ إذا كانت : د (س) = أ حيث أ ثابت فإن متوسط التغير للدالة د هو ....

(أ) أ (ب) − أ (ج) صفر (د) ١

⑫ إذا كانت د دالة فردية قابلة للاشتقاق لكل س ∈ ح

فإن : دَ (أ) + دَ (− أ) = ... حيث أ ∈ ح

(أ) صفر (ب) ٢ دَ (أ) (ج) ١ (د) ٢ د (− أ)

الدرجة الكلية .... / ١٢

اختبار 4 حتى درس 4 من الوحدة الثالثة

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

① إذا كانت : د (س) = $\frac{١}{س}$ فإن : دَ (١) = ...

(أ) ١ (ب) صفر (ج) −١ (د) ٢

② إذا كان : ص = $\sqrt{٢ - س}$ فإن : $\frac{ءص}{ءس}$ = ...

(أ) $\frac{-١}{٢ ص}$ (ب) −١ (ج) −٢ ص − ١ (د) −٢ ص

③ $\frac{ء}{ءس}$ (ص٥) = ...

(أ) ٥ ص٤ (ب) ٥ ص٤ صَ (ج) ص٥ صَ (د) $\frac{٥ ص^٤}{صَ}$

④ إذا كانت : د (س) = (س٢ − ٢)٥ فإن : دَ (١) = ...

(أ) ٥ (ب) ١٠ (ج) −٥ (د) −١٠

⑤ إذا كان منحنى الدالة د هو مستقيم يمر بالنقطتين (١ ، ٢) ، (٢ ، ٣)

فإن متوسط التغير للدالة د عندما تتغير س من ١ إلى ٢ هو ....

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) صفر (د) -١

⑥ إذا كانت د دالة زوجية قابلة للاشتقاق على ح وكان : دَ (٢) = ٣

فإن : دَ (-٢) = ...

(أ) ٣ (ب) -٣ (جـ) $\frac{١}{٣}$ (د) $-\frac{١}{٣}$

⑦ إذا كان : ص = ع^٥ ، ع = س^٢ - ١ فإن : $\left(\frac{ءص}{ءس}\right)_{س=٢}$ = ...

(أ) $\frac{٣٢}{٣}$ (ب) ١٦٢٠ (جـ) ١٢٦٠ (د) ٩٦

⑧ تكون الدالة د قابلة للاشتقاق عند ﻫ إذا كانت ....

(أ) د (ﻫ^+) = د (ﻫ^-) (ب) د متصلة عند ﻫ

(جـ) $\lim_{س \to ﻫ}$ د (س) = د (ﻫ) (د) $\lim_{هـ \to ٠} \frac{د(ﻫ + هـ) - د(ﻫ)}{هـ}$ موجودة.

⑨ إذا كان متوسط التغير فى د يساوى ٧ عندما تتغير س من ٣ إلى ٥ وكانت د (٣) = ٨

فإن : د (٥) = ...

(أ) ٢٢ (ب) ١٢ (جـ) ٧ (د) غير ذلك.

⑩ إذا كانت : د دالة وكانت : د (١) = ٥ ، دَ (١) = ٤

فإن : $\lim_{س \to ١}$ د (س) = ...

(أ) ٥ (ب) ٤ (جـ) ٩ (د) غير موجودة.

⑪ $\frac{ء}{ءس}$ (س^{$\frac{١}{٢}$}) = ...

(أ) $\frac{١}{٢}$ س^{$-\frac{٢}{٢}$} (ب) $\frac{١}{٢}$ س^{$\frac{٢}{٢}$} (جـ) $\frac{١}{\sqrt[٢]{س}}$ (د) -س

⑫ إذا كان : ص = (س + ك)^٣ ، $\frac{ءص}{ءس}$ = ١٢ عند س = صفر

فإن : ك = ...

(أ) ٢ (ب) ± ٢ (جـ) -٢ (د) ٤



الدرجة الكلية

١٢

اختبار 5 حتى درس 5 من الوحدة الثالثة

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

① إذا كان : ص = حا ٢ س فإن : $\frac{ءص}{ءس}$ عند س = $\frac{\pi}{٦}$ تساوى ....

(أ) ٢ (ب) ١ (جـ) $\frac{١}{٢}$ (د) $\sqrt{٣}$

② إذا كان : ص = قا س فإن : صَ = ...

(أ) قتا س (ب) قا س طا س (جـ) $\frac{١}{حا س}$ (د) $\frac{١}{حتا س}$

③ $\underset{هـ \to ٠}{نهـا} \frac{حا\left(\frac{\pi}{٤} + هـ\right) - حا \frac{\pi}{٤}}{هـ}$ = ...

(أ) $\frac{حا هـ}{هـ}$ (ب) حا هـ (جـ) حتا هـ (د) حتا $\frac{\pi}{٤}$

④ إذا كانت : د (س) = $\sqrt{س^٢ + ٩}$ فإن : دَ (٤) = ...

(أ) $\frac{-٤}{٥}$ (ب) $\frac{٤}{٥}$ (جـ) $\frac{١}{١٠}$ (د) $\frac{-١}{١٠}$

⑤ إذا كان : س^٢ + ص^٢ = ص فإن : ....

(أ) $\frac{ءص}{ءس}$ = ٢ س + ٢ ص (ب) ٢ س + ٢ ص = ١

(جـ) $\frac{ءص}{ءس} = \frac{٢ س}{١ - ٢ ص}$ (د) $\frac{ءص}{ءس} = \frac{س^٢}{ص - س^٢}$

⑥ $\frac{ء}{ءس}\left(طا \frac{\pi}{٤}\right)$ = ...

(أ) ١ (ب) قا^٢ $\frac{\pi}{٤}$ (جـ) صفر (د) ٢

⑦ إذا كان : ص^٥ = س^٢ فإن : $\frac{ءص}{ءس}$ = ...

(أ) $\frac{٢}{٥}$ س$^{\frac{٢}{٥}}$ (ب) $\frac{س^٢}{٤ ص^٣}$ (جـ) $\frac{٢ س^٢}{ص^٣}$ (د) $\frac{٣}{٥ \sqrt[٥]{س^٢}}$

⑧ إذا كانت : د (س) = طا (٥ س − π) فإن : دَ $\left(\frac{\pi}{٤}\right)$ = ...

(أ) ٥ (ب) ٥ $\sqrt{٢}$ (جـ) ١٠ (د) ١٠ $\sqrt{٣}$

(٩) إذا كانت : ص = (حاس + حتاس)^{٢} فإن : $\left(\frac{ءص}{ءس}\right)_{س = \frac{\pi}{٤}}$ = ...

(أ) ٢ (ب) −٢ (جـ) صفر (د) −١

(١٠) إذا كانت د : د (س) = $\begin{cases} س^{٢} - س &، س \geq ٣ \\ ٥ س - ٩ &، س < ٣ \end{cases}$ فإن : دَ (٥) = ...

(أ) غير موجودة. (ب) ٩ (جـ) ٥ (د) ٦

(١١) دائرة طول نصف قطرها نق فإن متوسط التغير فى مساحة الدائرة عندما تتغير نق من (نق$_{١}$) إلى (نق$_{١}$ + هـ) هو ....

(أ) ٢ π نق$_{١}$ (ب) π (٢ نق$_{١}$ + هـ)

(جـ) π هـ^{٢} (د) π (هـ + نق$_{١}$)^{٢}

(١٢) إذا كانت : ص = حا^{٢} س + حتا^{٢} س فإن : $\frac{ءص}{ءس}$ = ...

(أ) ٢ حاس حتاس (ب) حتا ٢ س (جـ) صفر (د) ١

الدرجة الكلية

....

١٢

اختبار 6 حتى درس 6 من الوحدة الثالثة

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) ميل المماس لمنحنى الدالة د حيث د (س) = ٣ س^{٢} + ٢ س − ١ عندما س = ٢ يساوى ....

(أ) ٤ (ب) ٨ (جـ) ١٨ (د) ١٤

(٢) $\frac{ء}{ءس}$ (حاس حتاس) = ...

(أ) حاس (ب) حتاس (جـ) $\frac{١}{٢}$ حتا ٢ س (د) حتا ٢ س

(٣) معادلة المماس لمنحنى الدالة د حيث د (س) = س^{٢} + ٣ عندما س = ١ هى ....

(أ) ص = ٢ س (ب) ص − ٢ س = ٥

(جـ) س + ص = ٢ (د) ٢ س − ص + ٢ = صفر

④ إذا كانت معادلة العمودى للمنحنى : ص = د (س) عند النقطة (٢ ، −١)
هى س − ٢ ص = ٤ فإن : دَ (٢) = ...

(أ) ٢ (ب) −٢ (جـ) ١ (د) −١

⑤ $\frac{ء}{ءس}$ (س^٢ ∛(س + ١)) = ... عند س = ٧

(أ) $\frac{٣٨٥}{١٢}$ (ب) $\frac{٧}{٦}$ (جـ) ٩٨ (د) $\frac{٢٨٠}{٣}$

⑥ إذا كانت : ص = د (أ) حيث أ ثابت فإن : $\frac{ءص}{ءس}$ = ...

(أ) دَ (أ) (ب) $\frac{د (أ + هـ) − د (أ)}{هـ}$

(جـ) ١ (د) صفر

⑦ النقطة الواقعة على منحنى الدالة ص = $\frac{١}{س − ٣}$ والتى عندها المماس يوازى المستقيم
س + ص = ٠ من النقط التالية هى ....

(أ) (−٢ ، −$\frac{١}{٥}$) (ب) (٤ ، −٤) (جـ) (٤ ، ١) (د) (٢ ، −٢)

⑧ إذا كان المستقيم : ص + س − ١ = ٠ يمس منحنى الدالة د : د (س) = س^٢ − ٣ س + أ
فإن : أ = ...

(أ) ٢ (ب) ٣ (جـ) ٤ (د) ٥

⑨ إذا كان : د (س) = س^٢ + ٢ ، هـ (س) = س + ٢

فإن : $\frac{ء}{ءس}$ [(د ∘ هـ) (س)] عند س = ١ تساوى ....

(أ) ٥ (ب) ٦ (جـ) ٨ (د) ١٠

⑩ التغير فى الدالة د عندما تتغير س من ٥ إلى ٥,٢ هى ....

(أ) د (٥,٢) − د (٥) (ب) $\frac{د (٥,٢) − د (٥)}{٠,٢}$

(جـ) د (٥,٢) − د (هـ) (د) نهـــا$_{هـ ← ٠}$ $\frac{د (٥ + هـ) − د (٥)}{هـ}$

⑪ متوسط التغير فى حجم مكعب عندما يتغير طول حرفه من ٥ سم إلى ٧ سم
يساوى ....

(أ) ١٢٥ (ب) ٣٤٣ (جـ) ٢١٨ (د) ١٠٩

(١٢) إذا كان : ص = ظاس فإن : $\frac{ءص}{ءس}$ = ...

(أ) قا^{٢} س (ب) جاس (جـ) جتاس (د) ظتاس

الدرجة الكلية

١٢

اختبار 7 حتى درس 7 من الوحدة الثالثة

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) ∫ (٢ س + ١)^{٥} ءس = ... + ث

(أ) (٢ س + ١)^{٦} (ب) $\frac{١}{٢}$ (٢ س + ١)^{٦}

(جـ) $\frac{١}{١٢}$ (٢ س + ١)^{٦} (د) $\frac{١}{٦}$ (٢ س + ١)^{٦}

(٢) ∫ س^{٢} (٢ س^{٣} + ٨)^{٤} ءس = ... + ث

(أ) $\frac{١}{٣٠}$ (٢ س^{٣} + ٨)^{٥} (ب) $\frac{١}{٦}$ (٢ س^{٣} + ٨)^{٥}

(جـ) (٢ س^{٣} + ٨)^{٥} (د) $\frac{١}{٢٠}$ س^{٤} (٢ س^{٣} + ٨)^{٥}

(٣) ∫ قا^{٢} $\frac{\pi}{٣}$ ءس = ... + ث

(أ) ظا $\frac{\pi}{٣}$ (ب) (ظا $\frac{\pi}{٣}$) س

(جـ) (قا^{٢} $\frac{\pi}{٣}$) س (د) قا^{٢} $\frac{\pi}{٣}$

(٤) ميل المماس لمنحنى الدالة د حيث د (س) = ٣ س^{٢} + ٢ س − ١

عندما س = ٢ يساوي ....

(أ) ٤ (ب) ٨ (جـ) ١٧ (د) ١٤

(٥) إذا كان : د (س) = م س^{٢} + ن س + ل حيث م ، ن ، ل ثوابت

فإن : دَ (١) + دَ (٤) − دَ (٥) = ...

(أ) م (ب) − م (جـ) ن (د) − ن

(٦) $\int$ حا^2 س حا ٢ س ء س = ... + ث

(أ) حا^2 س　(ب) حا ٢ س　(جـ) $\frac{١}{٢}$ حا^3 س　(د) $\frac{١}{٢}$ حا^4 س

(٧) $\int \frac{ء}{ء س}$ (٥ + حا س) ء س = ...

(أ) ٥ س − حتا س　(ب) ٥ س + حا س + ث

(جـ) حا س + ث　(د) ٥ س − حتا س + ث

(٨) $\int$ طا^7 س طتا^7 س ء س = ... + ث

(أ) − س + طا س　(ب) س + طا س　(جـ) − س + طتا س　(د) س

(٩) $\int$ (٢ س + ٣) (س − ٤) ء س = ... + ث

(أ) $\frac{١}{٤}$ (٢ س + ٣)^2　(ب) ٢ س^2 − ٥ س − ١٢

(جـ) $\frac{٢}{٣}$ س^3 − $\frac{٥}{٢}$ س^2 − ١٢ س　(د) $\frac{٢}{٣}$ س^3 − $\frac{٣}{٢}$ س^2 − ١٢ س

(١٠) $\int$ (حا^2 س + حتا^2 س) ء س = ...

(أ) $\frac{١}{٣}$ حا^3 س + $\frac{١}{٣}$ حتا^3 س + ث　(ب) − حتا^2 س + حا^2 س + ث

(جـ) قا^2 س + ث　(د) س + ث

(١١) إذا كان منحنى الدالة د يمر بالنقطتين (١ ، ٢) ، (٢ ، ٣) فإن متوسط التغير للدالة د عندما تتغير س من ١ إلى ٢ هو ....

(أ) ١　(ب) ٢　(جـ) صفر　(د) −١

(١٢) $\frac{ء}{ء س}$ ((س − ١) (س + ٣)) = ...

(أ) ٢ س　(ب) ٢ س + ١　(جـ) ٢ س − ٣　(د) ٢ س + ٢

ثالثًا اختبارات تراكمية قصيرة فى حساب المثلثات

الدرجة الكلية

......

١٢

اختبار 1 على درس 1 من الوحدة الرابعة

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) إذا كان قياس زاوية ارتفاع النقطة أ بالنسبة إلى النقطة ب يساوى ٥٠°

فإن قياس زاوية انخفاض ب بالنسبة إلى أ يساوى ....

(أ) ٥٠° (ب) ٤٠° (جـ) ٩٠° (د) ١٣٠°

(٢) فى الشكل المقابل :

$\overline{بحـ}$ (ارتفاع المنزل) ≃ .... مترًا.

(أ) ٤٢ (ب) ٢٦

(جـ) ٣١ (د) ٥٠

(٣) فى الشكل المقابل :

نقطة أ تقع .... نقطة (و)

(أ) شمال (ب) غرب

(جـ) ٣٠° شمال الغرب (د) ٣٠° غرب الشمال

(٤) من شرفة منزل على ارتفاع ٨ أمتار من سطح الأرض قيست زاويتا ارتفاع وانخفاض قمة وقاعدة شجرة مقابلة على نفس المستوى الأفقى فكانتا متساويتان فى القياس فإن ارتفاع الشجرة = ... متر.

(أ) ٨ (ب) $٨\sqrt{٢}$ (جـ) ١٦ (د) ٢٤

(٥) تحركت سفينة من نقطة معينة فى اتجاه ٦٠° شمال الغرب بسرعة ٢٦ كم/س ، فى نفس اللحظة ومن نفس المكان تحركت سفينة أخرى فى اتجاه الشرق بسرعة ١٥ كم/س فإن البعد بين السفينتين بعد ٣ ساعات ≃ .... كم.

(أ) ١٨٠ (ب) ١٢٣ (جـ) ١٠٨ (د) ١٥٥

(٦) من نقطة على سطح الأرض رصدت زاوية ارتفاع قمة برج تقع قاعدته على سطح الأرض فوجد أن قياسها ٣٢° ثم سار الراصد فى خط مستقيم أفقيًا ٥٠ مترًا نحو قاعدة البرج فوجد أن قياس زاوية ارتفاع قمة البرج ٤٢° ، فإن ارتفاع البرج ≃ .... متر.

(أ) ١٠٢ (ب) ١١٤ (جـ) ٨٥ (د) ١٠٧

(٧) فى الشكل المقابل :

أ ء = ... متر.

(أ) ١٥٩ (ب) ٩٥

(جـ) ١٢٠ (د) ١٥٧

(٨) نظر طفل من نقطة على سطح الأرض إلى قمة برج ارتفاعه ٥٠ متر فإذا كان الطفل يبعد ٥٠ $\sqrt{٣}$ متر عن قاعدة البرج فإن قياس زاوية ارتفاع قمة البرج = ...

(أ) ٤٥° (ب) ١٢٠° (جـ) ٦٠° (د) ٣٠°

(٩) يقف رجل عند نقطة ب فشاهد جسمًا عند نقطة حـ التى تبعد ٦٠ مترًا شرق ب وعندما سار من ب إلى أ فى اتجاه ٦٠° شمال الشرق وجد أن النقطة حـ فى اتجاه ٣٠° جنوب الشرق من أ ، فإن بعد حـ عن أ = ... متر.

(أ) ٥٧ (ب) ٣٠ $\sqrt{٣}$ (جـ) ٣٠ (د) ٣٠ $\sqrt{٢}$

(١٠) يقف شخص فى منتصف المسافة بين مبنى وشجرة على نفس المستوى الأفقى فنظر إلى قمتى الشجرة والمبنى فكان زاويتا ارتفاعيهما ٣٠° ، ٦٠° على الترتيب فإذا كان ارتفاع الشجرة ١٥ متر فإن ارتفاع المبنى = ... متر.

(أ) ٤٠ (ب) ١٥ $\sqrt{٣}$ (جـ) ٣٠ $\sqrt{٣}$ (د) ٤٥

(١١) من بداية طريق يميل على المستوى الأفقى بزاوية قياسها ١٥° لأعلى رصد رجل قمة فنار موجود على المستوى المائل فوجد قياس زاوية ارتفاع قمة الفنار ٣٠° ثم سار على الطريق المائل مسافة ٥٠ مترًا ثم أعاد قياس زاوية ارتفاع قمة الفنار فكانت ٦٠° فإن ارتفاع الفنار ≃ .... متر.

(أ) ١٥ (ب) ١٩ (جـ) ٢٦ (د) ٤٥

⑫ بسبب الرياح كسر الجزء العلوى لشجرة فصنع مع الأرض زاوية قياسها ٦٠° فإذا كانت نقطة تلاقى قمة الشجرة تبعد عن قاعدة الشجرة ١٠ أمتار فإن طول الشجرة لأقرب متر ≃ .... متر.

(أ) ٣٧ (ب) ٤٩ (جـ) ٢٩ (د) ٥٢

الدرجة الكلية

....

١٢

اختبار 2 حتى درس 2 من الوحدة الرابعة

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

① جتا ٧٠° جتا ١٠° − جا ٧٠° جا ١٠° = ...

(أ) جتا ٨٠° (ب) جا ٨٠° (جـ) جتا ٦٠° (د) جا ٦٠°

② جا $\frac{\pi}{٢}$ جتا θ − جتا $\frac{\pi}{٢}$ جا θ = ...

(أ) جتا θ (ب) − جتا θ (جـ) جا θ (د) ١ + جا θ

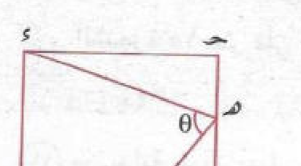
③ إذا كانت : ∠ أ تكمل ∠ ب فإن : جتا أ جتا ب − جا أ جا ب = ...

(أ) −١ (ب) ١٨٠ (جـ) ١ (د) صفر

④ إذا كان : ظا أ = $\frac{١}{٢}$ ، ظا ب = $\frac{١}{٣}$ فإن : ظا (أ + ب) = ...

(أ) ١ (ب) $\frac{-٥}{٦}$ (جـ) $\frac{١}{٦}$ (د) $\frac{٥}{٦}$

⑤ فى الشكل المقابل :



أ ب حـ ء مربع ، و منتصف $\overline{أب}$

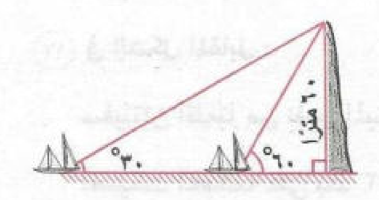
، $\frac{حـ هـ}{هـ ب} = \frac{١}{٢}$

فإن : ظا θ = ...

(أ) ٢ (ب) ٣

(جـ) ٤ (د) −٣

(٦) فى الشكل المقابل :



المسافة بين القاربين = ... متر.

(أ) ٦٠ (ب) $٤٠\sqrt{٣}$

(جـ) $\frac{٦٠}{\sqrt{٣}}$ (د) $٦٠\sqrt{٣}$

(٧) إذا كان : ظا أ + ظا ب = ٣ − ٣ ظا أ ظا ب فإن : ظا (أ + ب) = ...

(أ) $\frac{١}{٢}$ (ب) ٣ (جـ) ١ (د) $\sqrt{٣}$

(٨) Δ أ ب حـ فيه : حتا أ = $\frac{-٣}{٥}$ ، حا ب = $\frac{٥}{١٣}$ فإن : حا حـ = ...

(أ) $\frac{٣٢}{٦٥}$ (ب) $\frac{١٧}{٦٥}$ (جـ) $\frac{٣٣}{٦٥}$ (د) $\frac{٣}{١٣}$

(٩) فى الشكل المقابل :

ظا θ = ...

(أ) $\frac{٢}{١١}$ (ب) $\frac{٣}{١١}$

(جـ) $\frac{١}{٢}$ (د) $\frac{٣}{٤}$

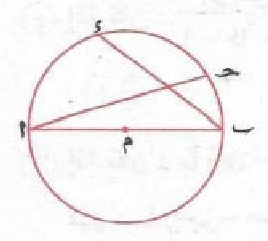


(١٠) إذا كان : س + ص = $\frac{٥\pi}{٦}$

فإن : $(\text{حا س} - \text{حتا ص})^٢ + (\text{حتا س} - \text{حا ص})^٢$ = ...

(أ) ١ (ب) $\frac{٣}{٢}$ (جـ) ٢ (د) ٣

(١١) فى الشكل المقابل :

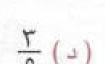


م دائرة طول قطرها ٢٥ سم

، أ حـ = ٢٤ سم ، ب ء = ٢٠ سم

فإن : حا (أ + ب) = ...

(أ) $\frac{٤}{٣}$ (ب) $-\frac{٤}{٥}$ (جـ) $\frac{٤}{٥}$ (د) $\frac{٣}{٥}$



⑫ في الشكل المقابل :

شمال
غرب
شرق
جنوب

سفينتان أقلعتا من نفس الميناء وبعد مرور ساعتين أصبحت أحدهما على بعد ١٣ كم في الاتجاه الشمالي الشرقي للميناء والأخرى على بعد ٢٢ كم في اتجاه 30° جنوب شرق الميناء

فإن المسافة بينهما حينئذ ≃ .... كم

(أ) ٢٦ (ب) ٢٤ (جـ) ٢٢ (د) ٥٠٥

الدرجة الكلية
....
١٢

اختبار 3 حتى درس 3 من الوحدة الرابعة

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

① إذا كان : جا أ = $\frac{3}{5}$ فإن : جتا ٢ أ = ...

(أ) $\frac{16}{25}$ (ب) $\frac{7}{25}$ (جـ) $\frac{-7}{25}$ (د) $\frac{-16}{25}$

② إذا كان : جتا^4 س − جا^4 س = جتا أ س فإن : أ = ...

(أ) ٤ (ب) ٨ (جـ) ٦ (د) ٢

③ ١ + جتا ٢ س = ...

(أ) ٢ جا س (ب) ٢ جتا^2 س (جـ) ٢ جا^2 س (د) ٢ جا س جتا س

④ إذا كان : $\frac{\text{ظا س}}{\text{١ − ظا}^2\text{ س}} = \frac{5}{2}$ فإن : ظا ٢ س = ...

(أ) $\frac{5}{2}$ (ب) ٥ (جـ) $\frac{2}{5}$ (د) ٢

⑤ إذا كان : جا س − جتا ص = $\frac{1}{6}$ ، جتا س + جا ص = $\frac{5}{6}$

فإن : جا (س − ص) = ...

(أ) $\frac{23}{36}$ (ب) $\frac{19}{24}$ (جـ) $\frac{17}{23}$ (د) $\frac{25}{48}$

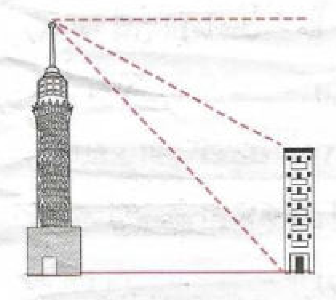
(٦) إذا كانت : جتا ٢ س = $\frac{١}{٨}$ فإن : جتا س = ...

(أ) $\pm\frac{٩}{٨}$ (ب) $\pm\frac{٩}{١٦}$ (جـ) $\pm\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ (د) $\pm\frac{٣}{٤}$

(٧) إذا كان : جتا أ = $\frac{٥}{١٣}$ حيث أ زاوية حادة ، جا ب = $\frac{٣}{٥}$ حيث ب قياس أكبر زاوية موجبة ، ب ∈]٠ ، ٢ π[فإن : ظا (أ − ب) = ...

(أ) $\frac{٣٣}{٥٦}$ (ب) $\frac{٩}{٨}$ (جـ) $\frac{-٦٣}{١٦}$ (د) $\frac{٩}{١٧}$

(٨) من قمة برج القاهرة استخدم شخص المنظار ليرصد زاويتي انخفاض قمة وقاعدة منزله القريب من البرج فكان قياسيهما ٤٥° ، ٦٠° على الترتيب فإذا كانت قاعدتي المنزل والبرج على نفس المستوى الأفقي وارتفاج البرج ١٨٧ متر



فإن ارتفاع المنزل ≃ .... متر.

(أ) ٩٦ (ب) ٨٧ (جـ) ١٠٨ (د) ٧٩

(٩) إذا كان : جا س + جتا س = $\frac{\sqrt{٢}}{٣}$ فإن : جا ٢ س = ...

(أ) $-\frac{١}{٣}$ (ب) $\frac{٢}{٣}$ (جـ) $-\frac{٧}{٩}$ (د) $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

(١٠) جا ٥ س جا ٣ س + جتا ٥ س جتا ٣ س = ...

(أ) جتا ٢ س (ب) جتا ٨ س (جـ) جا ٨ س (د) جا ٢ س

(١١) إذا كان : ظا (θ + ٤٥°) = $\frac{٣}{٢}$ فإن : ظا θ = ...

(أ) $\frac{١}{٥}$ (ب) $\frac{٣}{٥}$ (جـ) $\frac{٩}{٤}$ (د) $\frac{٢}{٣}$

(١٢) ١ + جتا ٢ س = ...

(أ) جا^٢ س (ب) ٢ − ٢ جا^٢ س (جـ) جا ٢ س (د) جا^٢ ٢ س

الدرجة الكلية

١٢

اختبار 4 حتى درس 4 من الوحدة الرابعة

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

① حا ١٠٥° حتا ١٥° − حتا ١٠٥° حا ١٥° = ...

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) صفر (د) $\sqrt{٢}$

② إذا كان : (حاس − حتاس) (حاس + حتاس) = $\frac{٣}{٥}$ فإن : حتا ٢ س = ...

(أ) ١ (ب) $\frac{٣}{٥}$ (جـ) $-\frac{٣}{٥}$ (د) $\frac{٩}{٢٥}$

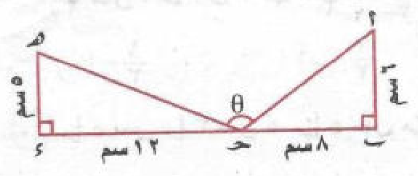
③ المثلث الذى محيطه = ١٢ سم ومساحته = ٦ سم² يكون طول نصف قطر الدائرة التى تمس جميع أضلاعه من الداخل = ... سم.

(أ) ١ (ب) $\frac{١}{٢}$ (جـ) ٢ (د) ٥

④ إذا كان : حتا هـ = $\frac{٢}{٣}$ فإن : حتا ٢ هـ = ...

(أ) $\frac{٤}{٩}$ (ب) $\frac{٣}{٢}$ (جـ) $\frac{-١}{٩}$ (د) $\sqrt{٣}$

⑤ فى الشكل المقابل :

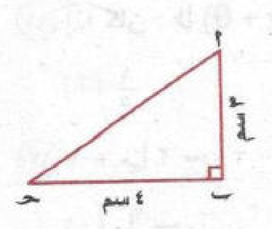


حا θ = ...

(أ) $\frac{٥٦}{٦٥}$ (ب) $\frac{١٦}{٦٥}$

(جـ) $\frac{٦٤}{٦٥}$ (د) $\frac{١٣}{١٢}$

⑥ فى الشكل المقابل :



مجموع طولى نصفى قطرى الدائرتين الداخلة والخارجة للمثلث أ ب حـ يساوى .... سم

(أ) ٤ (ب) ٣

(جـ) ٥ (د) ٣٫٥

(٧) أى مما يأتى يساوى طول نصف قطر الدائرة التى تمس أضلاع Δ أ ب حـ من الداخل ؟

(أ) $\frac{أ}{٢ حا أ}$ (ب) $\frac{أ + ب + حـ}{حا أ + حا ب + حا حـ}$

(جـ) $\frac{أ ب حا حـ}{أ + ب + حـ}$ (د) $\frac{١}{٢}$ أ حـ حا ب

(٨) فى Δ أ ب حـ إذا كان : طا أ = ٣ ، طا ب = ٥ فإن : طا حـ = ...

(أ) $-\frac{١}{٧}$ (ب) $\frac{١}{٧}$ (جـ) $-\frac{٤}{٧}$ (د) $\frac{٤}{٧}$

(٩) أ ب حـ ء معين فيه : أ ب = ٦ سم ، ق (∠ أ) = ٥٠°

فإن مساحته = ... سم^{٢}

(أ) ١٨ حا ٥٠° (ب) ٣٦ حا ١٣٠° (جـ) ٢٤ (د) ٢٩

(١٠) إذا كانت : طتا $\frac{أ}{٢}$ − طا $\frac{أ}{٢}$ = ٤ فإن : طا أ = ...

(أ) $\frac{٣}{٤}$ (ب) $\frac{١}{٣}$ (جـ) $\frac{١}{٢}$ (د) $\frac{٣}{٥}$

(١١) مساحة المثلث متساوى الأضلاع الذى طول ضلعه س سم تساوى .... سم^{٢}

(أ) س^{٢} (ب) $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ س^{٢} (جـ) $\frac{\sqrt{٣}}{٤}$ س^{٢} (د) $\frac{١}{٢}$ س^{٢}

(١٢) حتا^{٢} حـ − حتا ٢ حـ = ...

(أ) حا حـ (ب) حتا حـ (جـ) حا^{٢} حـ (د) طا حـ



الاختبـارات الشهرية

أولًا : نماذج اختبارات شهر مارس.

ثانيًا : نماذج اختبارات شهر أبريل.

محتوى امتحان شهر مارس

الجبـر

من : الوحدة (١) – الدرس (١) : المتتابعات.

إلى : الوحدة (١) – الدرس (٦) : المتسلسلات الهندسية.

التفاضل والتكامل

من : الوحدة (٣) – الدرس (١) : معدل التغير.

إلى : الوحدة (٣) – الدرس (٤) : مشتقة دالة الدالة (قاعدة السلسلة)

حساب المثلثات

من : الوحدة (٤) – الدرس (١) : زوايا الارتفاع والانخفاض.

إلى : الوحدة (٤) – الدرس (٢) : الدوال المثلثية لمجموع وفرق قياسى زاويتين.

محتوى امتحان شهر أبريل

الجبـر

من : الوحدة (٢) – الدرس (١) : مبدأ العد – التباديل.

إلى : الوحدة (٢) – الدرس (٢) : التوافيق

التفاضل والتكامل

من : الوحدة (٣) – الدرس (٥) : مشتقة الدوال المثلثية.

إلى : الوحدة (٣) – الدرس (٧) : التكامل

حساب المثلثات

من : الوحدة (٤) – الدرس (٣) : الدوال المثلثية لضعف قياس الزاوية.

إلى : الوحدة (٤) – الدرس (٤) : صيغة هيرون

الدرجة الكلية
....
٢٠

نموذج ١

١ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة : (١٢ درجة)

① إذا كان الوسط الهندسي للعددين ٩ ، ص هو ١٥ فإن : ص = ...

(أ) ١٣٥ (ب) ١٠ (جـ) ٢٥ (د) ± ٢٥

② إذا كان : $\sum_{ر=١}^{٢٥} (٣ + ك ر) = ١٠٠$ فإن : ك = ...

(أ) ٢٥ (ب) ١٣ (جـ) $\frac{١}{١٣}$ (د) $\frac{١}{٢٥}$

③ إذا كان : ص = (س^٢ + ٢) (٥ − س) فإن : $\frac{ء ص}{ء س}$ = ... عند س = ١

(أ) −١٥ (ب) ٥ (جـ) −٥ (د) ٢

④ إذا كانت : جا أ = $\frac{٤}{٥}$ حيث ٠° < أ < ٩٠° ، جتا ب = $\frac{-١٢}{١٣}$ حيث ٩٠° < ب < ١٨٠°

فإن : قتا (أ − ب) = ...

(أ) $\frac{-٦٣}{٦٥}$ (ب) $\frac{-٦٥}{٦٣}$ (جـ) $\frac{٦٣}{٦٥}$ (د) $\frac{٦٥}{٦٣}$

⑤ متوسط التغير للدالة د : د (س) = س^٢ + ١ عندما تتغير س من ٢ إلى ٢,٥ يساوى ....

(أ) ٤,٥ (ب) ٥,٤ (جـ) ٠,٥٤ (د) ٠,٤٥

⑥ متتابعة حسابية فيها : ح$_٩$ − ح$_٤$ = ٢٠ ، ح$_٨$ − ح$_٧$ = ٢٩ فإن : ح$_{١٥}$ = ...

(أ) ٤٩ (ب) ٩٨ (جـ) ١٥٥ (د) ١٥٨

⑦ عدد حدود المتتابعة الهندسية التي حدها الأول = ٢٤٣ وحدها الأخير = ١ ومجموع حدودها = ٣٦٤ يساوى ....

(أ) ٦ (ب) ٧ (جـ) ٤ (د) ٨

⑧ إذا كانت الدالة د : د (س) = $\begin{cases} أ س^٢ + ١ & \text{عند } س \le ٢ \\ ٤ س - ٣ & \text{عند } س > ٢ \end{cases}$

قابلة للاشتقاق عند س = ٢ فإن : أ = ...

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) ٣ (د) ٤

⑨ إذا كانت : ص = ع^3 − ٥ ، ع = ٢ س^2 − ٣ س فإن : $\frac{ءص}{ءس}$ = ………… عند س = ١

(أ) ١ (ب) ٥ (جـ) ٣ (د) ٧

⑩ إذا كانت : س ∈ [٠ ، π[وكان : $\frac{\text{طا س} - \text{طا } ٥٥°}{١ + \text{طا س طا } ٥٥°}$ = ١ فإن : س = …………

(أ) $\frac{\pi}{٩}$ (ب) $\frac{٤\pi}{٩}$ (جـ) $\frac{٥\pi}{٩}$ (د) $\frac{٤\pi}{٩}$ أو $\frac{١٣\pi}{٩}$

⑪ إذا كان : $(ح_ن) = (٣ \times ٢^{-ن})$ متتابعة هندسية فإن مجموع عدد لا نهائى من حدودها ابتداءً من حدها الأول = …………

(أ) ٢ (ب) ٣ (جـ) ٤ (د) ٩

⑫ إذا كان مجموع الوسطين الثانى والرابع من متتابعة حسابية يساوى ١٢ ، والوسط السابع يزيد عن الوسط الثالث بمقدار ٤ فإن المتتابعة هى …………

(أ) (٣ ، ٤ ، ٥ ، …) (ب) (٣ ، ٥ ، ٧ ، …)

(جـ) (٥ ، ٤ ، ٣ ، …) (د) (٣ ، ٧ ، ١١ ، …)

---

٢ أجب عن السؤالين الآتيين :

① أوجد عدد الحدود اللازم أخذها من المتتابعة الحسابيه (٢٥ ، ٢٣ ، ٢١ ، …) ابتداءً من حدها الأول ليكون مجموعها ١٢٠. **(٤ درجات)**

② من قمة تل رصد رجل زاويتى انخفاض قمة برج وقاعدته فكان قياساهما ٢٢° ، ٣٠° على الترتيب حيث إن قاعدتى التل والبرج في مستوى أفقى واحد فإذا كان ارتفاع البرج ٥٠ مترًا أوجد ارتفاع التل لأقرب متر. **(٤ درجات)**

الدرجة الكلية
......
٢٠

نموذج ٢

١ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة : **(١٢ درجة)**

① إذا كانت : (٢٩ ، س ، ... ، ٣ س ، ٩٥) متتابعة حسابية فإن : س = ...

(أ) ٢١ (ب) ٣١ (جـ) ٩٥ (د) ١٢٤

② قيمة المتسلسلة $\sum_{ر=٣}^{٧}$ (٣ ر − ١) تساوى ....

(أ) ٦٢ (ب) ٧٠ (جـ) ٧٥ (د) ٧٧

③ إذا كان : د (س) = ٥ ر (س) + ٢٠ فإن : رَ (س) = ...

(أ) دَ (س) (ب) دَ (س) − ٢٠ (جـ) ٥ دَ (س) (د) $\frac{١}{٥}$ دَ (س)

④ الدالة د : د (س) = { س² + ٢ س ، س ≤ ١ ؛ ٤ س − ١ ، س > ١ } تكون .... عند س = ١

(أ) متصلة وغير قابلة للاشتقاق (ب) متصلة وقابلة للاشتقاق

(جـ) غير متصلة وغير قابلة للاشتقاق (د) غير متصلة وقابلة للاشتقاق

⑤ فى الشكل المقابل :

ظا س = ...

(أ) $\frac{٧}{١٧}$ (ب) $\frac{٥}{١٣}$

(جـ) $\frac{٥}{١٢}$ (د) $\frac{١٢}{٣٥}$

أ، ب، جـ، ء، ٥ سم، ٥ سم، ٧ سم، س

⑥ إذا كان متوسط التغير فى د يساوى ٢,٤ عندما تتغير س من ٤ إلى ٤,٢ فإن التغير فى د = ...

(أ) ٠,٣٢ (ب) ٠,٤٨ (جـ) ٣,٦ (د) ٧,٢

⑦ متتابعة هندسية حدها الأول يساوى مجموع الحدود التالية إلى ما لا نهاية فإن أساس هذه المتتابعة يساوى ....

(أ) ٠,٥ (ب) ٠,٣٣٣ (جـ) ٠,٢٥ (د) ٠,٦٦٦

(٨) إذا كانت : (س ، ٧ ، ص) فى تتابع حسابى ، وكانت : (س + ٢ ، ٥ ، ص − ٦) فى تتابع هندسى فإن : ص − س = ...

(أ) ٣ (ب) ٨ (جـ) ١١ (د) ١٤

(٩) متتابعة حسابية تتكون من ١٥ حدًا ، حدها الأوسط ٢٣
فإن مجموع حدود هذه المتتابعة تساوى ....

(أ) ٣٤٥ (ب) ٢٢٥ (جـ) ٤٥٠ (د) ٦٩٠

(١٠) إذا كانت أ ، ب زاويتين حادتين وكانت : ظا أ = $\frac{٥}{٦}$ ، ظا ب = $\frac{١}{١١}$
فإن : أ + ب = ...

(أ) ٣٠° (ب) ٦٠° (جـ) ٤٥° (د) ٧٥°

(١١) $\frac{ء}{ءس}$ (٣ س^{٢} + ٥ س) عند س = −١ تساوى ....

(أ) −١ (ب) −٣ (جـ) −٦ (د) ٣

(١٢) متتابعة مجموع ن حدًا الأولى منها يعطى بالعلاقة حـ$_{ن}$ = ن^{٢} − ٢ ن
فإن حدها الخامس = ...

(أ) ٣٥ (ب) ١٥ (جـ) ١٠ (د) ٧

---

٢ أجب عن السؤالين الآتيين :

(١) متتابعة هندسية متناقصة فيها مجموع الحدين الأول والرابع = ٧٠ ، مجموع الحدين الثانى والثالث = ٦٠ أوجد مجموع عدد غير منته من حدودها ابتداء من الحد الأول.

(٤ درجات)

(٢) أوجد المشتقة الأولى للدالة د : د (س) = (٤ س^{٢} − ١) (٧ س^{٣} + س) عند س = ١

(٤ درجات)

الدرجة الكلية
....
٢٠

نموذج ١

١ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة : (١٢ درجة)

① $\int \frac{س^{٢} + ٣ س}{س}$ ءس = ... + ث

(أ) $\frac{١}{٢}$ س^{٢} + ٣ س (ب) س + ٣

(جـ) س^{٢} + ٣ س (د) $\frac{س^{٢} + ٣ س^{٢}}{س^{٢}}$

② عدد طرق جلوس ٤ طلاب على ٤ مقاعد فى صف يساوى ....

(أ) ٤ + ٤ (ب) ٤ × ٤

(جـ) ٤ × ٣ × ٢ × ١ (د) ١

③ مساحة سطح المثلث الذى أطوال أضلاعه ٥ ، ٦ ، ٧ سم تساوى .... سم^{٢}

(أ) ٣ $\sqrt{٦}$ (ب) ٦ $\sqrt{٦}$ (جـ) ١٥ (د) ١٠٥

④ إذا كانت : ص = ظا س فإن : $\frac{ءص}{ءس}$ = ...

(أ) ١ + ص (ب) ١ − ص (جـ) ١ + ص^{٢} (د) ١ − ص^{٢}

⑤ إذا كان : |ن + ١ = ٣٠ |ن − ١ فإن : ن = ...

(أ) ٥ (ب) ٦ (جـ) ٢٩ (د) ٣٠

⑥ إذا كانت : هـ ∈]٠ ، $\frac{\pi}{٢}$[، جا هـ = $\frac{٣}{٥}$ فإن : ظا ٢ هـ = ...

(أ) $\frac{١٥}{٨}$ (ب) $\frac{٢٤}{١٧}$ (جـ) $\frac{٣}{٤}$ (د) $\frac{٢٤}{٧}$

⑦ ميل المماس للمنحنى ص = ٣ س^{٢} + ٢ س + ١ عند س = ٢ يساوى ....

(أ) ٥ (ب) ٨ (جـ) ١٤ (د) ١٧

⑧ إذا كان رقم الآحاد فى |ن لا يساوى صفر فإن : ....

(أ) ن عدد فردى (ب) ن > ٤ (جـ) ن > ٩ (د) ن < ٥

⑨ مجموعة حل المعادلة : $\frac{\lfloor س}{١٠} = {}^{س-١}ل_{س-٢}$ هى ....

(أ) $\{٥\}$ (ب) $\{٦\}$ (جـ) $\{٧\}$ (د) $\{٨\}$

⑩ المشتقة الأولى للدالة : ص = $(٦ س^٢ + ٣ س + ١٠)^{١٠}$ عند س = -١

تساوى ....

(أ) -١٥٠ (ب) -٥٠ (جـ) ٥٠ (د) ٢١٠

⑪ إذا كان : $\lfloor ٧ = {}^{٧}ل_{س}$ فإن : س = ...

(أ) ٦ أ، ٧ (ب) ٧ (جـ) ١ أ، صفر (د) ٥٠٤٠

⑫ إذا كان : $(ن^٢ + ٩ ن + ٢٠) = \frac{\lfloor ن + ٥}{س}$ فإن : س = ...

(أ) ن + ٣ (ب) $\lfloor ن + ٣$ (جـ) ن + ٤ (د) ${}^{ن+٥}ل_{٢}$

---

٢ أجب عن السؤالين الآتيين :

① كم عددًا زوجيًا مكونًا من ٣ أرقام مختلفة يمكن تكوينه من

مجموعة الأرقام $\{٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٧\}$ ؟ **(٤ درجات)**

② أوجد مجموعة حل المعادلة : حاس - ٢ حا^٢ $\frac{١}{٢}$ س = ٠ حيث ٠° < س < ٣٦٠°

(٤ درجات)

الدرجة الكلية
......
٢٠

نموذج ٢

١ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة : **(١٢ درجة)**

① ميل المماس للمنحنى ص = جا ٢ س عند س = $\frac{\pi}{٢}$ يساوى ....

(أ) ١ (ب) صفر (جـ) −١ (د) −٢

② إذا كانت : جتا ٢ أ = $\frac{٧}{٢٥}$ فإن : جا أ = ... حيث أ ∈] ٠ ، $\frac{\pi}{٢}$ [

(أ) $\frac{١٦}{٢٥}$ (ب) $\frac{٣}{٥}$ (جـ) $\frac{٤}{٥}$ (د) $\frac{٥}{٤}$

③ $^{ن+١}ل_{ر+١}$ = ... × $^{ن}ل_{ر}$

(أ) ن − ١ (ب) ن (جـ) ن + ١ (د) ن + ٢

④ فى الشكل المقابل :

مساحة △ أ ب جـ = ... سم^٢

(أ) ٦ $\sqrt{٦}$ (ب) ٩ $\sqrt{٦}$



(جـ) ٩ $\sqrt{٣}$ (د) ٢ $\sqrt{٦}$

⑤ إذا كانت : ص = (ع + ١)^٢ ، ع = س^٥ − ١ فإن : $\frac{ءص}{ءس}$ = ...

(أ) س^{١٥} (ب) س^{٨} (جـ) ١٥ س^{١٤} (د) ٨ س^{٧}

⑥ مجموعة الحل فى ح للمعادلة : ⌊س = ١ هى ....

(أ) {١} (ب) {صفر} (جـ) {٠ ، ١} (د) {١ ، −١}

⑦ قياس الزاوية الموجبة التى يصنعها المماس لمنحنى الدالة د حيث د (س) = $\frac{س + ٢}{س − ٢}$ مع الاتجاه الموجب لمحور السينات عند النقطة (٠ ، −١) تساوى ....

(أ) ٤٥° (ب) ٦٧ $\frac{١}{٢}$° (جـ) ١٣٥° (د) ١٥٠°

⑧ عدد طرق جلوس ٥ طلاب على ٧ مقاعد فى صف واحد يساوى ....

(أ) ⌊٧ (ب) ⌊٥ (جـ) $^{٧}ل_{٥}$ (د) $^{٧}ق_{٥}$

⑨ $\int$ (٢ س + ١)$^{-٤}$ ء س = ... + ث

(أ) (٢ س + ١)$^{-٣}$ (ب) (٢ س + ١)^{٥}

(جـ) $\frac{-١}{٦}$ (٢ س + ١)$^{-٣}$ (د) –٨ س^{٢}

⑩ المضاعف المشترك الأصغر للأعداد : |ن ، |ن + ١ ، |ن + ٢ هو ....

(أ) |ن (ب) |ن + ٢ (جـ) ن (د) ن + ٢

⑪ $\frac{{}^{٧}ل_{ر}}{{}^{٧}ل_{ر-١}}$ = ...

(أ) ر (ب) ر – ١ (جـ) ٧ – ر (د) ٨ – ر

⑫ إذا كان : $\frac{١}{|٩} + \frac{١}{|١٠} = \frac{س}{|١١}$ فإن : س = ...

(أ) ١ (ب) ١١ (جـ) ١٢١ (د) ١٣٢

---

٢ أجب عن السؤالين الآتيين :

① إذا كان $^{ن-١}ل_{٣} : {}^{ن+١}ل_{٣}$ = ٥ : ١٢ فأوجد قيمة : |ن – ٣ **(٤ درجات)**

② أوجد معادلة العمودى على المنحنى ص = طا (π – $\frac{٣}{٤}$ س)
عند النقطة (π ، ١) **(٤ درجات)**

امتحانات الكتاب المدرسى

أولًا : نماذج اختبارات الكتاب المدرسى فى الجبر.

ثانيًا : نماذج اختبارات الكتاب المدرسى فى التفاضل والتكامل وحساب المثلثات.

الاختبار الأول

أجب عن الأسئلة الآتية :

1 اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

① إذا كان : $\underline{|ن + ١} = ٣٠ \underline{|ن - ١}$ فإن : ن = ...

(أ) ٥ (ب) ٦ (جـ) ٢٩ (د) ٣٠

② قيمة المتسلسلة : $\sum_{ر=١}^{١٥} (ر^٢ + ر + ١) =$ ....

(أ) ١٣٧٥ (ب) ٣٧٢٠ (جـ) ١٤٤٠٠ (د) ٢٢٣٢٠٠٠

③ عدد حدود المتتابعة الحسابية : (٧ ، ١١ ، ١٥ ، ..... ، ٢٧١) هو ....

(أ) ٣٤ (ب) ٦٧ (جـ) ١٦٩ (د) ٩٣١٣

④ إذا كانت : س > ٠ فإن أساس المتتابعة الهندسية :

(٤ ، س − ٣ ، ٢ س + ٦ ، ...) يساوى ....

(أ) ١ (ب) ٥ (جـ) ٣ (د) ٢٤

---

2 (أ) إذا كان : $^{٥}ل_{ر} = ٢ \times {}^{٦}ل_{ر-١}$ فما قيمة : ر ؟

(ب) أوجد رتبة أول حد سالب من حدود المتتابعة (١٥٢ − ٩ ن) ، ثم أوجد أكبر مجموع يمكن الحصول عليه من حدود هذه المتتابعة.

---

3 (أ) أوجد كم عددًا زوجيًا مكونًا من ٣ أرقام مختلفة يمكن تكوينه من مجموعة الأرقام {٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٧}

(ب) متتابعة هندسية حدودها موجبة ، مجموع الحدود الثلاثة الأولى منها ١٤ ، ويزيد حدها الأول عن حدها الثانى بمقدار ٤ ، أوجد المتتابعة ومجموع عدد لا نهائى من حدودها ابتداء من حدها الأول.

٤ **(أ)** متتابعة هندسية مجموع الحدود الثلاثة الأولى منها يساوى $\frac{١٧١}{٣٢}$ ، وحدها الثانى يساوى $\frac{٢٧}{١٦}$ ، أوجد المتتابعة وحدها العاشر.

(ب) مسرح به ٢٥ صفًا من الكراسى، يحتوى الصف الأول على ٢٠ كرسيًا، ويحتوى الصف الثانى على ٢٢ كرسيًا ويحتوى الصف الثالث على ٢٤ كرسيًا وهكذا، أوجد عدد الكراسى فى جميع صفوف المسرح.

---

٥ **(أ)** إذا كان : ${}^{٢ن+م}ق_{٢} = ١٩٠$ ، ${}^{ن-٢م}ل_{٢} = ٦٠$ **فأوجد قيمة كل من : ن ، م**

(ب) متتابعة حسابية مجموع حديها الأول والأخير ٢٦ ، ومجموع حدودها ٤٦٨ ، أوجد عدد حدودها وإذا كان حدها العاشر يساوى ٤٧ فأوجد المتتابعة.

الاختبار الثانى

أجب عن الأسئلة الآتية :

١ **اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :**

(١) عدد الأزواج المرتبة (أ ، ب) التى يمكن تكوينها من عناصر المجموعة {١ ، ٢ ، ٣} حيث أ ≠ ب هو ....

(أ) ٢ (ب) ٣ (جـ) ٦ (د) ٩

(٢) الحد النونى للمتتابعة : (٢ ، ٢ ، $\frac{٨}{٣}$ ، ٤ ، ...) يساوى ....

(أ) (ن − ١) (ب) $٢^{ن} - ١$ (جـ) $٢^{ن-١}$ (د) $\frac{٢^{ن}}{ن}$

(٣) مجموع ٢٥ حدًا الأولى من حدود المتتابعة : (٣ − ٢ن) يساوى ....

(أ) ٦٥٠ (ب) ٦٠٠ (جـ) −٥٧٥ (د) −٦٠٠

(٤) إذا كانت (س ، ص ، ع ، ...) فى تتابع هندسى فإن : ....

(أ) ٢ ص < س + ع (ب) $ص^{٢}$ > س ع

(جـ) ص = س ع (د) $\sqrt{ص}$ = س ع

٢ **(أ)** إذا كان : $^{٢٥}\text{ق}_{٢\text{س}+١} = {}^{٢٥}\text{ق}_{٢\text{س}-١}$ **فما قيمة : س ؟**

(ب) **أوجد عدد الحدود التى يلزم أخذها من حدود المتتابعة الحسابية :**

(−٤٣ ، −٣٦ ، −٢٩ ، ...) ابتداءً من حدها الأول ليكون مجموعها ٢٢١

---

٣ **(أ)** **يدرس الطالب فى إحدى السنوات الدراسية بالجامعة ثمانى مواد مختلفة ولا يحق له الانتقال إلى السنة التالية إلا إذا نجح فى ٦ منها على الأقل، فبكم طريقة يمكن للطالب الانتقال إلى السنة التالية ؟**

(ب) متتابعة هندسية مجموع عدد لا نهائى من حدودها ابتداءً من حدها الأول يساوى ١٠٨ ، ويزيد حدها الأول عن حدها الثانى بمقدار ١٢

، أوجد المتتابعة ومجموع حدودها السبعة الأولى.

---

٤ **(أ)** **أوجد مجموع الحدود الفردية الرتبة من حدود المتتابعة الحسابية :**

(٢ ، ٥ ، ٨ ، ..... ، ١١٠)

(ب) شركة لتخزين المحاصيل الزراعية لديها سبعة صوامع لتخزين القمح ، تسع الصومعة الأولى ٢٧٠ طنًا من القمح، وكل صومعة بعد ذلك تسع ثلثى الكمية التى تسعها الصومعة السابقة لها، هل يمكن للشركة أن تقوم بتخزين ٨٠٠ طن من القمح ؟ وما أكبر كمية تستطيع الشركة تخزينها بصوامعها مقربًا الناتج لأقرب طن ؟

---

٥ **(أ)** إذا كان : $\lfloor\underline{٣\text{ن} - ٧} = ١٢٠$ **فما قيمة :** $^{\text{ن}}\text{ق}_{\text{ن}-١}$ ؟

(ب) أدخل ٢٨ وسطًا حسابيًا بين ٤ ، ٩١ ثم أوجد مجموع حدود المتتابعة الحسابية الناتجة.

ثانيًا نماذج اختبارات الكتاب المدرسى فى التفاضل والتكامل وحساب المثلثات

الاختبار الأول

أجب عن الأسئلة الآتية :

1 اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) إذا كان : ص = حا ٢ س فإن : $\frac{ءص}{ءس}$ عند س = $\frac{\pi}{٦}$ تساوى ....

(أ) ٢ (ب) ١ (جـ) $\frac{١}{٢}$ (د) $\sqrt{٣}$

(٢) إذا كان : حتا هـ = $\frac{٢}{٣}$ فإن : حتا ٢ هـ = ...

(أ) $\frac{٤}{٩}$ (ب) $\frac{٣}{٢}$ (جـ) $\frac{-١}{٩}$ (د) $\sqrt{٣}$

(٣) $\int$ (٢ س + ٣)^{٤} ءس = ...

(أ) $\frac{١}{٥}$ (٢ س + ٣)^{٥} + ث (ب) $\frac{١}{١٠}$ (٢ س + ٣)^{٥} + ث

(جـ) $\frac{١}{١٠}$ (٢ س + ٣)^{٣} + ث (د) ١٠ (٢ س + ٣)^{٣} + ث

(٤) متوسط تغير الدالة د حيث د (س) = س^{٢} عندما تتغير س من ٣ إلى ٣,١ يساوى ....

(أ) ٠,٦١ (ب) ٦,١ (جـ) ٩ (د) ٩,٦١

---

2 (أ) أوجد المشتقة الأولى إذا كان : ص = س^{٢} حا ٢ س

(ب) أثبت أن : $\frac{\text{حا ٢ س}}{\text{١ + حتا ٢ س}}$ = طا س

---

3 (أ) أوجد ميل المماس لمنحنى الدالة د حيث د (س) = $\frac{س^{٢} + ٣}{س - ٢}$ عند س = ١

(ب) أوجد :

(١) $\int$ (س^{٢} + ٢ س) ءس (٢) $\int$ (حا س − حتا س)^{٢} ءس

٤ (أ) أوجد النقط الواقعة على منحنى الدالة : $ص = \frac{١}{س - ٣}$ والتي عندها المماس يوازي المستقيم س + ص = صفر

(ب) من قمة منزل ارتفاعه ٢٥ مترًا كان قياس زاوية ارتفاع قمة برج ٧٠°، قياس زاوية انخفاض قاعدة البرج ٣٠° ، أوجد ارتفاع البرج علمًا بأن قاعدتي المنزل والبرج في مستوى أفقي واحد.

الاختبار الثاني

أجب عن الأسئلة الآتية :

١ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

① ميل المماس لمنحنى الدالة د حيث د (س) = ٣ $س^٢$ + ٢ س − ١ عندما س = ٢ يساوي ....

(أ) ٤ (ب) ٨ (جـ) ١٧ (د) ١٤

② جا أ جتا ب − جتا أ جا ب = ...

(أ) جا (أ + ب) (ب) جتا (أ + ب)
(جـ) جا (أ − ب) (د) جتا (أ − ب)

③ $\int \frac{س^٢ + ٣ س}{س}$ ءس = ...

(أ) س + ٣ (ب) $\frac{١}{٢}$ $س^٢$ + ٣ س + ث
(جـ) $س^٢$ + ٣ س + ث (د) $\frac{س^٣ + ٣ س^٢}{س^٢}$

④ $\frac{ء}{ءس}$ (جاس جتاس) = ...

(أ) جاس (ب) جتاس (جـ) $\frac{١}{٢}$ جتا ٢ س (د) جتا ٢ س

٢ (أ) إذا كانت ص = د (س) حيث ص = $س^٢$ − ٤ س ، فأوجد ميل المماس لمنحنى الدالة د عند النقطة (٣ ، ٠) الواقعة عليه.

(ب) إذا كان : ظا ٢ = $\frac{٥}{٤}$ ، قتا ب = $\frac{١٣}{٥}$ حيث ٢ ، ب قياسا زاويتين حادتين

فأوجد : ظا (٢ – ب)

---

٣ (أ) **ابحث قابلية اشتقاق الدالة د حيث :**

$$د(س) = \begin{cases} س^٢ & ، \quad س < ٢ \\ ٤ س - ١ & ، \quad س \geq ٢ \end{cases} \quad \text{عند } س = ٢$$

(ب) **أوجد :** $\int (١ - جتا س)^٢ \, ء س$

---

٤ (أ) تحركت سفينة من نقطة معينة فى اتجاه °٦٠ شمال الغرب بسرعة ٢٦ كم/س ، وفى نفس اللحظة ومن نفس المكان تحركت سفينة أخرى فى اتجاه الشرق بسرعة ١٥ كم/س. أوجد البعد بين السفينتين بعد ٣ ساعات.

(ب) إذا كان : ص = ع^٥ + ٣ ، ع = (س – ١)^٣

فأوجد قيمة : $\frac{ء ص}{ء س}$ عندما س = ٢

---

٥ (أ) إذا كان : ص = $\left(\frac{س^٢ + ١}{س - ٣}\right)^٥$ **فأوجد :** $\frac{ء ص}{ء س}$ عندما س = ١

(ب) **أوجد معادلة المماس للمنحنى :** ص = ٢ س جا س جتا س عندما س = π


الامتحانات النهائية
امتحانات بعض مدارس المحافظات
يمكنك حل
الامتحانات
التفاعلية من خلال
مسح QR code
الخاص بكل امتحان



١ محافظة القاهرة

إدارة روض الفرج
توجيه الرياضيات


اختبار تفاعلى ①

أولًا أسئلة الاختيار من متعدد

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

① عدد حدود المتتابعة الهندسية (٣ ، ٦ ، ١٢ ، ... ، ٧٦٨) هو ....

(أ) ٦ (ب) ٧ (جـ) ٨ (د) ٩

② رتبة الحد الذى قيمته ٩٩ فى المتتابعة الحسابية (٧ ، ٩ ، ١١ ، ...) هو ....

(أ) $ح_{٤٥}$ (ب) $ح_{٤٦}$ (جـ) $ح_{٤٧}$ (د) $ح_{٤٨}$

③ مجموع ٢٠ حدًا الأولى من المتتابعة التى فيها : $ح_ن = ٢ن + ٣$ يساوى ....

(أ) ١٠٢٠ (ب) ٢٠١٠ (جـ) ٢١٠٠ (د) ١٢٠٠

④ متتابعة حسابية فيها : $حـ_٥ - حـ_٤ = ٢٠$ ، $حـ_٨ - حـ_٧ = ٢٩$

فإن : $حـ_{٢٠} =$ ....

(أ) ٣٧٠ (ب) ٧٣٠ (جـ) ٢٧٥ (د) ٥٢٧

⑤ قيمة $ح_{١٠}$ فى المتتابعة الحسابية (٣ ، ٥ ، ٧ ، ...) يساوى ....

(أ) ٩ (ب) ١٥ (جـ) ٢١ (د) ٢٥

⑥ مجموع عدد لانهائى من حدود المتتابعة الهندسية (١٦ ، ٨ ، ٤ ، ...) يساوى ....

(أ) ١٦ (ب) ٨ (جـ) ٣٠ (د) ٣٢

⑦ إذا كان الوسط الهندسى للعددين : ٩ ، ص هو ١٥ فإن : ص = ...

(أ) ١٣٥ (ب) ١٠ (جـ) ٢٥ (د) ± ٢٥

⑧ إذا كان : $ق_{١٠} = ق_{٢٠}$ فإن : $ق_{٢٩} =$ ....

(أ) ١٠ (ب) ٢٠ (جـ) ٢٩ (د) ٣٠

⑨ إذا كان : $^{٧}ل_ر = ٨٤٠$ فإن : $\lfloor ر - ٣ =$ ....

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) ٣ (د) ٤

(١٠) إذا كان : $^{ن}ق_{ن-٢} = ٣٥$ فإن : قيمة $\underline{|ن - ٥}$ = ...

(أ) ٤ (ب) ٣ (جـ) ٢ (د) ١

(١١) المقدار : $^{ن}ل_{ر} : {}^{ن}ل_{ر-١}$ = ...

(أ) ن − ر
(ب) ن + ر
(جـ) ن − ر − ١
(د) ن − ر + ١

(١٢) إذا كان : $^{س+ص}ل_{٢} = ٢١٠$ ، $^{ص-٢}ق_{٢} = ٣٥$ فإن : $\underline{|٢س - ص}$ = ...

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) ٥ (د) ١٠

(١٣) إذا كان : $\underline{|٢ن - ٧} = ١٢٠$ فما قيمة : $^{ن}ق_{ن-١}$

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) ٤ (د) ٥

(١٤) $\int (٢س + ٣)^{٤}\, ءس$ = ...

(أ) $\frac{١}{٥}(٢س + ٣)^{٥} + ث$
(ب) $\frac{١}{١٠}(٢س + ٣)^{٥} + ث$
(جـ) $\frac{١}{١٠}(٢س + ٣)^{٣} + ث$
(د) $١٠(٢س + ٣)^{٣} + ث$

(١٥) $\int (جا^{٢}س + جتا^{٢}س)\, ءس$ = ... + ث

(أ) $\frac{١}{٣}جا^{٣}س - \frac{١}{٣}جتا^{٣}س$
(ب) $- جتا^{٣}س + جا^{٣}س$
(جـ) $قا^{٢}س$
(د) س

(١٦) متوسط تغير الدالة د حيث $د(س) = س^{٢}$ عندما تتغير س من ٢ إلى ٢,١ يساوى ....

(أ) ٠,٤١ (ب) ٤,١ (جـ) ٤ (د) ٤,٤١

(١٧) إذا كانت : $د(س) = س^{٢} + أس + ب$ وكان : $دَ(٣) = ٥$ فإن : أ = ...

(أ) −١ (ب) −٢ (جـ) ١ (د) ٢

(١٨) إذا كانت : ص = جا ٢س فإن : $\frac{ءص}{ءس}$ عند $س = \frac{\pi}{٦}$ يساوى ....

(أ) $\frac{١}{٢}$ (ب) ١ (جـ) ٢ (د) $\sqrt{٣}$

(١٩) إذا كانت : $ص = ع^{٢} - ٥$ ، $ع = ٢س^{٢} - ٣س$ فإن : $\frac{ءص}{ءس}$ عند س = ١ يساوى ....

(أ) ١ (ب) ٣ (جـ) ٥ (د) ٧



(٢٠) إذا كان : حا ٩ = $-\frac{٣}{٥}$ فإن : حتا ٢ ٩ = ...

(أ) $\frac{١٦}{٢٥}$ (ب) $-\frac{١٦}{٢٥}$ (جـ) $\frac{٧}{٢٥}$ (د) $-\frac{٧}{٢٥}$

(٢١) إذا كان : حتا^{٤} س − حا^{٤} س = حتا ك س فإن : قيمة ك = ...

(أ) ٤ (ب) ٨٣ (جـ) ٦ (د) ٢

(٢٢) حتا ٥ س حتا ٣ س + حا ٥ س حا ٣ س = ...

(أ) حتا ٢ س (ب) حتا ٨ س (جـ) حا ٨ س (د) حا ٢ س

(٢٣) إذا كان : ظا ٩ = $\frac{١}{٢}$ ، ظا ب = $\frac{١}{٣}$ فإن : ظا (٩ + ب) = ...

(أ) $\frac{٥}{٦}$ (ب) $-\frac{٥}{٦}$ (جـ) $\frac{١}{٦}$ (د) ١

(٢٤) ١ + حتا ٤ ٩ = ...

(أ) ٢ حتا^{٤} ٤ ٩ (ب) ٢ حتا^{٢} ٢ ٩ (جـ) حتا^{٤} ٢ ٩ (د) حتا^{٢} ٢ ٩

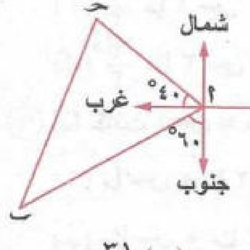
(٢٥) مساحة المثلث الذى أطوال أضلاعه ٦ سم ، ٨ سم ، ١٠ سم = ... سم^{٢}

(أ) ٣٠ (ب) ٤٠ (جـ) ٢٤ (د) ٤٨

(٢٦) $\frac{\text{حتا}^{٢}\text{ ص} - \text{حا}^{٢}\text{ ص}}{٢ \text{ حا ص حتا ص}}$ = ...

(أ) ظا ٢ ص (ب) ظتا ٢ ص (جـ) $\frac{١}{٢}$ ظا ٢ ص (د) $\frac{١}{٢}$ ظتا ٢ ص

(٢٧) فى الشكل المقابل :



تحركت سفينة من نقطة معينة ٩ فى اتجاه ٦٠° غرب الجنوب بسرعة ١٠ كم/ساعة وفى نفس اللحظة تحركت سفينة أخرى من نفس المكان فى اتجاه ٤٠° شمال الغرب بسرعة ٥ كم/ساعة فإن البعد بين السفينتين بعد ٣ ساعات يساوى .... كم.

(أ) ٢٨ (ب) ٢٩ (جـ) ٣٠ (د) ٣١

ثانيًا **الأسئلة المقالية**

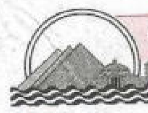
أجب عن السؤالين الآتيين :

١ متتابعة هندسية حدها الرابع = ٢٤ وحدها السابع = ١٩٢

أوجد مجموع الخمسة عشر حدًا الأولى منها.

---

٢ أوجد معادلة المماس للمنحنى : ص = $\frac{٤ \text{ س} + ٣}{\text{س}^{٢} + ١}$ عند النقطة (٠ ، ٣) الواقعة على المنحنى.



٢ محافظة الجيزة

إدارة الوراق - مديرية التربية والتعليم
نموذج (أ) مسائى



اختبار تفاعلى ٢

أولا أسئلة الاختيار من متعدد

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

① إذا كان : $^{9}ل_{ر - 1} = ٥٠٤$ فإن : ر + ١ = ...

(أ) ٥ (ب) ٢٤ (جـ) ١٢٠ (د) ٧٢٠

② (١ + جتا ٢ س) ظا س = ...

(أ) قا ٢ س (ب) ظتا ٢ س (جـ) جتا ٢ س (د) جا ٢ س

③ إذا كان : ظا ٢ س = $\frac{٤}{٣}$ حيث س قياس زاوية حادة فإن : ظا س = ...

(أ) −٢ (ب) $\frac{٢}{٣}$ (جـ) $\frac{١}{٢}$ (د) $\frac{-١}{٢}$

④ إذا كان : $\underline{|ن + ١}$ = ٣٠ $\underline{|ن - ١}$ فإن : ن = ...

(أ) ٥ (ب) ٦ (جـ) ٢٩ (د) ٣٠

⑤ $\int$ (١ − ٢ $جا^{٢}$ س) ءس = ... + ث

(أ) $\frac{١}{٢}$ جا ٢ س (ب) $\frac{١}{٢}$ جتا ٢ س

(جـ) $\frac{٢}{٣}$ جتا ٣ س − ١ (د) $\frac{٢}{٣}$ جتا ٣ س − س

⑥ إذا كانت : ص = جتا $\left(\frac{\pi}{٢} - س\right)$ + جا (π − ٢ س) فإن : $\frac{ءص}{ءس}$ = ...

(أ) جا س + جا ٢ س (ب) جا س + ٢ جا ٢ س

(جـ) جتا س + جتا ٢ س (د) جتا س + ٢ جتا ٢ س

⑦ $\int$ (س + ٢) ($س^{٢}$ − ٢ س + ٤) ءس = ... + ث

(أ) $\frac{١}{٤}$ $س^{٤}$ + ٤ $س^{٣}$ + ٨ س (ب) $\frac{١}{٣}$ $س^{٣}$ + $س^{٢}$ + ٤ س

(جـ) $\frac{١}{٤}$ $س^{٤}$ − ٨ س (د) $\frac{١}{٤}$ $س^{٤}$ + ٨ س

⑧ من نقطة على سطح الأرض رصد رجل زاوية ارتفاع قمة مبنى فوجدها هـ°
فإن قياس زاوية انخفاض موضع الرجل فى نفس اللحظة من قمة المبنى هى ....

(أ) هـ° (ب) ٩٠° − هـ° (جـ) هـ° − ٩٠° (د) ١٨٠° − هـ°

(٩) جتا س جتا $\left(س + \frac{\pi}{٣}\right)$ + جا س جا $\left(س + \frac{\pi}{٣}\right)$ = ...

(أ) $\frac{١}{٢}$ (ب) $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ (جـ) $-\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ (د) $\frac{-١}{٢}$

(١٠) متتابعة هندسية حدودها موجبة إذا كان حدها الأول = ٥٤ وحدها الرابع = ٢

فإن مجموع الأربعة الحدود الأولى منها تساوى ....

(أ) ٥٠ (ب) ٦٠ (جـ) ٧٠ (د) ٨٠

(١١) إذا كان : ظا س + ظا ص = ٤ ، ظتا س + ظتا ص = $\frac{٢}{٣}$

فإن : ظا (س + ص) = ...

(أ) $\frac{-٢}{٣}$ (ب) $\frac{-٤}{٥}$ (جـ) $\frac{٣}{٥}$ (د) ١

(١٢) إذا كان : $^{ن}ل_{ر} = {^{ن}ق_{ر}}$ فإن : ر = ...

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) صفر أ، ١ (د) ١ أ، ٢

(١٣) $\sum_{ر=١}^{٥} (٢ ر + ١)$ = ...

(أ) ٣٥ (ب) ٤٥ (جـ) ٥٥ (د) ١٥

(١٤) إذا كان : ظا أ + ظا ب = ٤ - ٤ ظا أ ظا ب فإن : ظا (أ + ب) = ...

(أ) $\frac{١}{٢}$ (ب) ٤ (جـ) ١ (د) ٢

(١٥) ٨ جا س جتا س جتا ٢ س = ...

(أ) ٨ جا س جتا س (ب) ٢ جا ٤ س

(جـ) ٤ جا ٢ س (د) ٤ جا ٢ س

(١٦) إذا كان : $\lfloor\frac{١}{٢}ن$ = ١٢٠ فإن : $^{ن}ل_{٢}$ = ...

(أ) ٣٠ (ب) ٦٠ (جـ) ١٢٠ (د) ٧٢٠

(١٧) مجموع عدد غير منتهى من حدود المتتابعة الهندسية (٣٢ ، ١٦ ، ٨ ، ...) = ...

(أ) ١٣٢ (ب) ١٦٤ (جـ) ١١٦ (د) ٦٤

(١٨) إذا كان الوسط الهندسى للعددين ٤ ، س هو ١٦ فإن : قيمة س = ...

(أ) ٦٤ (ب) ١٦ (جـ) ٣٢ (د) ١٢٨

(١٩) عدد أقطار الشكل السداسى = ... قطر

(أ) ٧ (ب) ١٠ (جـ) ٥ (د) ٩

(٢٠) إذا كان : ١٨ق ر + ٩ = ١٨ق ٢ر + ١ فإن إحدى قيم ر هى ....

(أ) ٤ (ب) ٣ (جـ) ٥ (د) ٧

(٢١) إذا كانت : د (س) = س^{٢} + ك س + ٧ وكانت : دَ (٣) = ٨

فإن : ك = ...

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) ٣ (د) ٤

(٢٢) إذا كانت : ص = س^{٢} ، س = ع^{٣} − ١ فإن : $\frac{\text{ءص}}{\text{ءع}}$ = ... عند ع = ٢

(أ) ٥٦ (ب) ٢٤ (جـ) ٢٨ (د) ١٦٨

(٢٣) فى المتتابعة الحسابية (ح$_{ن}$) حيث ح$_{ن+١}$ = ن ح$_{ن}$ وكان : ح$_{١}$ = ٢

فإن : ح$_{٤}$ = ...

(أ) ١٢ (ب) ٤ (جـ) ٦ (د) ٢

(٢٤) قيمة الحد الأوسط فى المتتابعة (٨ ، ١١ ، ١٤ ، ... ، ١٢٨) هو ....

(أ) ٢١ (ب) ٤١ (جـ) ٦٥ (د) ٦٨

(٢٥) متتابعة حسابية حدها السادس = ٣٤ ، مجموع حديها السابع والتاسع = ٨٨

فإن رتبة أول حد قيمته أكبر من ١٠٥ فى هذه المتتابعة هو ....

(أ) ١٤ (ب) ١٦ (جـ) ١٨ (د) ٢١

(٢٦) إذا كانت د : د (س) = س^{٢} + ٣ س فإن دالة متوسط التغير عند س = ٣

هى ....

(أ) ٩ + هـ (ب) ٦ هـ + هـ^{٢} (جـ) هـ^{٢} + ٦ (د) ٢ هـ + ٣

(٢٧) فى الشكل المقابل :

نق = ... سم

ﻡ
نق
٨ سم
١٠ سم
١٤ سم

(أ) ٦ (ب) $\sqrt{٦}$

(جـ) ٨ (د) $\sqrt{٧}$

ثانيا الأسئلة المقالية

أجب عن السؤالين الآتيين :

(١) أوجد مجموع حدود المتتابعة الحسابية (١٣ ، ٢٢ ، ٣١ ، ... ، ١٣٩)

(٢) أوجد قياس الزاوية التى يصنعها المماس للمنحنى : ص − جا ٢ س = ٠ مع الاتجاه الموجب لمحور السينات عند النقطة ($\frac{\pi}{٣}$ ، $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$)

٣ محافظة الإسكندرية

إدارة برج العرب
توجيه الرياضيات

اختبار تفاعلى ③

أولاً أسئلة الاختيار من متعدد

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

① مجموع الأعداد الطبيعية التى تقبل القسمة على ٣ والمحصورة بين ٣٠ ، ٥٠ = ...

(أ) ٨١ (ب) ٣٤٣ (جـ) ٢٤٣ (د) ٥١٢

② إذا كان الوسط الهندسى للعددين ٩ ، ص هو ١٥ فإن : ص = ...

(أ) ٦ (ب) ٢٥ (جـ) ٩ (د) ٥

③ متتابعة هندسية تزايدية حدها الثانى = ٨ ومجموع حديها الأول والثالث = ٢٠ فإن حدها الرابع = ...

(أ) ١٢٠ (ب) ١٦ (جـ) ٣٢ (د) ٦٤

④ رتبة أول حد موجب فى المتتابعة (−٥١ ، −٤٨ ، −٤٥ ، ...) هى ....

(أ) ١٩ (ب) ١٨ (جـ) ٢٠ (د) ٢١

⑤ إذا كانت : (٩٦ ، س ، ص ، ع ، ٦ ، ...) متتابعة هندسية حدودها موجبة فإن مجموع عدد غير منتة من حدودها = ...

(أ) ١٩٢ (ب) ١٨٠ (جـ) ٣٨٤ (د) ٧٦٨

⑥ متتابعة حسابية حدها العاشر = ٢١ ، ومجموع العشرة حدود الأولى منها = ١٢٠ فإن حدها الأول = ...

(أ) ٥ (ب) ٣ (جـ) ٩ (د) ٤

⑦ متتابعة هندسية حدودها موجبة الفرق بين حديها الرابع والثانى = ٤٠ ، الفرق بين حديها الخامس والرابع = ٣٦ فإن أساسها = ...

(أ) ٣ (ب) ٢ (جـ) ١,٢ (د) ١,٥

⑧ عدد طرق اختيار موبايل وساعة من قائمة بها ٥ موبايل و ٤ ساعات هى ....

(أ) ١٦ (ب) ٥ (جـ) ٢٠ (د) ٩

(٩) عدد طرق اختيار لجنة من ٥ طلاب من بين ١٣ طالب يساوى ....

(أ) ١٢٩٧　(ب) ١٢٨٧　(جـ) ١٢٧٩　(د) ١٢٧٧

(١٠) إذا كان : $^{٨}ل_{ن} = ٥ \times {}^{٨}ل_{ن-١}$　فإن : $\underline{|ن - ٤}$ = ...

(أ) ١　(ب) ٦　(جـ) ٢٤　(د) ١٢٠

(١١) إذا كان : $ن \underline{|٢ن - ١} = ٦٠$　فإن : $^{٢ن}ق_{٤}$ = ...

(أ) ٦　(ب) ١٢٠　(جـ) ٥　(د) ٢٤

(١٢) بكم طريقة يمكن لمدير شركة أن يختار عاملًا أو أكثر من بين ٥ عمال = ...

(أ) ٢٤　(ب) ٣١　(جـ) ٣٦　(د) ١٢٠

(١٣) إذا كان : $^{ن+م}ق_{٤} = ٧١٥$ ، $^{ن-م}ل_{٣} = ٢١٠$　فإن : م × ن = ...

(أ) ٦　(ب) ٣٠　(جـ) ١٨　(د) ١٥

(١٤) $\int (جاس + جتاس)^{٢} ءس$ = ... + ث

(أ) جتاس − جاس　(ب) $٣ (جتاس - جاس)^{٣}$

(جـ) ٢ جتاس − جاس　(د) $س - \frac{١}{٢}$ جتا ٢ س

(١٥) $\int (ظا^{٢} ٤٥) ءس$ = ...

(أ) $٠,٣٣ ظا^{٣} ٤٥ + ث$　(ب) قا ٤٥ + ث

(جـ) قاس + ث　(د) س + ث

(١٦) $\int (س^{٢} - ٥)(س^{٢} + ٥) ءس$ = ... + ث

(أ) $٠,٢ س^{٥} + ٢٥ س$　(ب) $٠,٢٥ س^{٤} - ٢٥ س$

(جـ) $٠,٢ س^{٥} - ٢٥ س$　(د) $٠,٢ س^{٥} - ١٠ س$

(١٧) إذا كانت : $ص = ٢ \times \sqrt{س^{٢} + ١٢}$ فإن قياس الزاوية التى يصنعها المماس مع الاتجاه السالب لمحور السينات عند س = ٢ هى ....

(أ) ١٣٥°　(ب) ١٢٠°　(جـ) ٤٥°　(د) ٦٠°

(١٨) إذا كان متوسط التغير فى الدالة د حيث $د(س) = ك س^{٢} + ٧$ عندما س تتغير من ٢ إلى ٣ هو ١٥　فإن : ك = ...

(أ) −٥　(ب) ٣　(جـ) ٥　(د) ١

(١٩) إذا كان : $(\text{حتا}\, س + ص)^3 = ٢٧$ فإن : ص = ... عندما س = ٩٠°

(أ) −٣ (ب) ٣ (جـ) ١ (د) صفر

(٢٠) نصف قطر الدائرة التى تمس أضلاع مثلث من الداخل = ٤ سم ومحيط المثلث = ٢٥ سم فإن مساحته تساوى .... سم^2

(أ) ٧٥ (ب) ٥٠ (جـ) $٥٠\sqrt{٧}$ (د) $٧٥\sqrt{٥}$

(٢١) إذا كان : ∠ أ تكمل ∠ ب فإن : حتا ب حتا أ − حا ب حا أ = ...

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) ١٨٠ (د) −١

(٢٢) إذا كان : طا أ − طا ب = ١ ، طا أ × طا ب = ٦ فإن : طا (أ − ب) = ...

(أ) $\frac{٥}{٣}$ (ب) $\frac{٢}{٣}$ (جـ) $\frac{٣}{٧}$ (د) $\frac{١}{٧}$

(٢٣) إذا كان : حا ٣٥ + حتا ٦٥ = حتا س فإن : س = ...

(أ) ٤٥° (ب) ١٥° (جـ) ٥° (د) ٢٥°

(٢٤) إذا كانت : س + ص = ٢٢٥ فإن : (١ + طا س) (١ + طا ص) = ...

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) ٤ (د) $\frac{١}{٢}$

(٢٥) من قمة منزل قيست زاوية انخفاض سيارة فوجد أن قياسها ٣٢ إذا كانت السيارة على بعد ٥٠ متر من قاعدة المنزل فإن ارتفاع المنزل = ... متر تقريبًا.

(أ) ٣١ (ب) ٢٥ (جـ) ٢٩ (د) ٤٢

(٢٦) إذا كان : ٤ طا أ − ٣ = ٠ ، أ زاوية حادة موجبة فإن : ٢٥ حتا ٢ أ = ...

(أ) ٠,٢٥ (ب) ٥ (جـ) ٧ (د) ١,٥

(٢٧) إذا كان : حتا أ = ٠,٥ فإن : حتا ٢ أ = ...

(أ) ٠,٥ (ب) − ٠,٥ (جـ) ١,٥ (د) − ١,٥

ثانيًا الأسئلة المقالية

أجب عن السؤالين الآتيين :

١ متتابعة حسابية حدها الأول = ٣ ، $ح_ن$ = ٣٩ ، $ح_{٢ن}$ = ٧٩ فأوجد : قيمة ن

٢ أوجد ميل المماس لمنحنى الدالة : ص $س^2$ = ١ عند س = ١



٤ محافظة القليوبية

إدارة بنها

أولًا أسئلة الاختيار من متعدد

اختبار تفاعلي ٤

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

① إذا كان : $\underline{|ن + ١} = ٣٠ \underline{|ن - ١}$ فإن : ن = ...

(أ) ٥ (ب) ٦ (جـ) ٢٩ (د) ٣٠

② إذا كانت : جتا هـ = $\frac{٢}{٣}$ فإن : جتا ٢ هـ = ...

(أ) $\frac{٤}{٩}$ (ب) $\frac{٣}{٢}$ (جـ) $\frac{-١}{٩}$ (د) $\sqrt{٣}$

③ $\frac{ء}{ءس}$ (جا س جتا س) = ...

(أ) جا س (ب) جتا س (جـ) $\frac{١}{٢}$ جتا ٢ س (د) جتا ٢ س

④ إذا كان : (أ ، ب ، حـ ، ٣٠ ، س ، ص ، ع) متتابعة حسابية
فإن : أ + ب + حـ + س + ص + ع = ...

(أ) ٣٠ (ب) ٦٠ (جـ) ٩٠ (د) ١٨٠

⑤ إذا كان : $\sum_{ر=١}^{٢٥}$ (٣ + ك ر) = ١٠٠ فإن : ك = ...

(أ) ٢٥ (ب) ١٣ (جـ) $\frac{١}{٢٥}$ (د) $\frac{١}{١٣}$

⑥ إذا كانت : (٢٩ ، س ، ... ، ٣س ، ٩٥) متتابعة حسابية فإن : س = ...

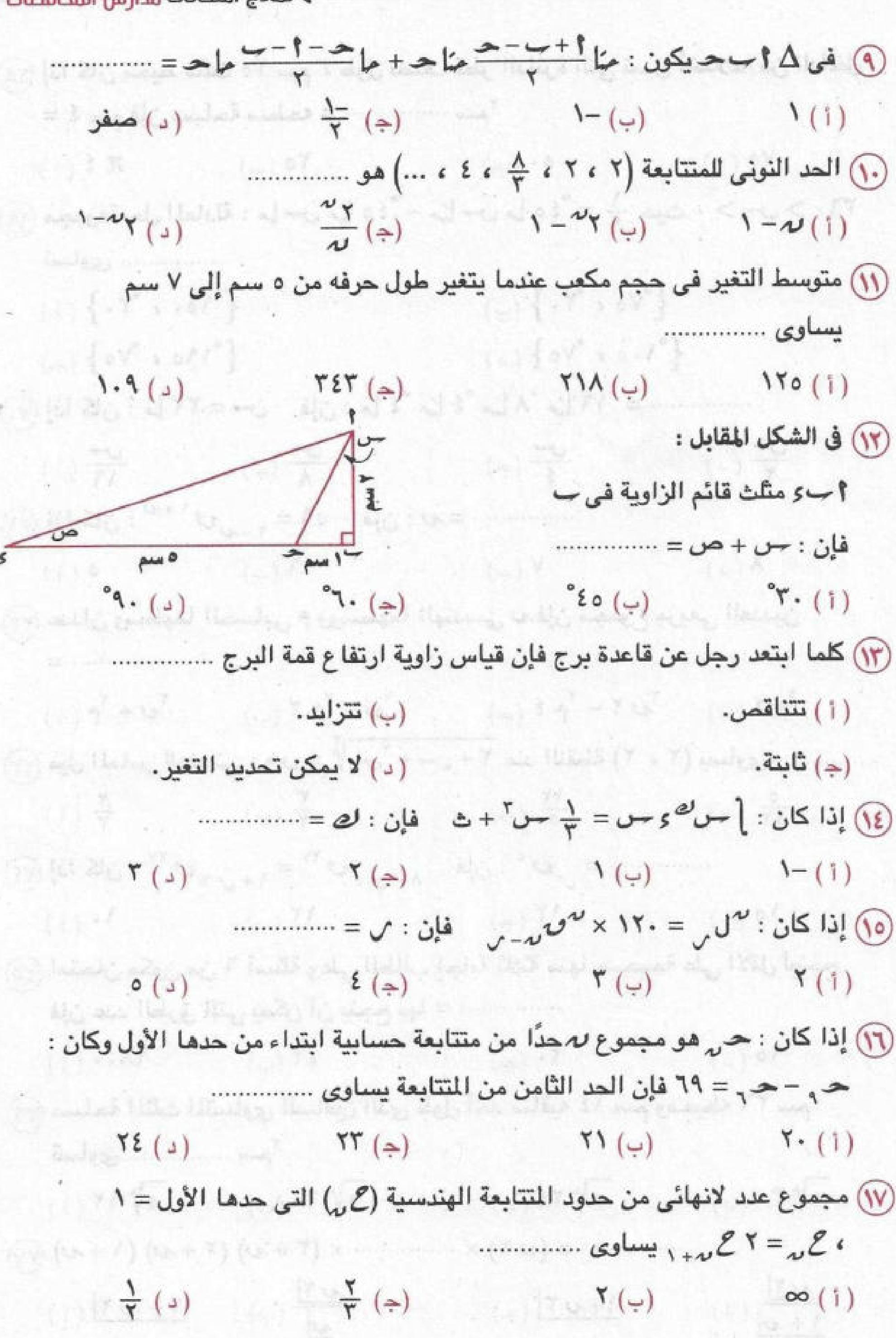
(أ) ٢١ (ب) ٣١ (جـ) ٩٥ (د) ١٢٤

⑦ إذا كانت : ر (س) = س د (س) وكانت د (١) = ٤ ، دَ (١) = ٢
فإن : رَ (١) = ...

(أ) ٢ (ب) ٤ (جـ) ٦ (د) ٨

⑧ إذا كانت الدالة د : د (س) = $\begin{cases} س^٢ + أ & ، س \le ٢ \\ أس + ب & ، س > ٢ \end{cases}$ قابلة للاشتقاق عند س = ٢
فإن : أ + ب = ...

(أ) ٤ (ب) ٨ (جـ) ٤− (د) ٨−



(٩) فى Δ أ ب حـ يكون : $\text{جتا}\dfrac{\text{أ}+\text{ب}-\text{حـ}}{2}\ \text{جتا حـ} + \text{جا}\dfrac{\text{حـ}-\text{أ}-\text{ب}}{2}\ \text{جا حـ} =$ ....

(أ) ١　　(ب) −١　　(جـ) $\frac{-1}{2}$　　(د) صفر

(١٠) الحد النونى للمتتابعة (٢ ، ٢ ، $\frac{8}{3}$ ، ٤ ، ...) هو ....

(أ) $ن - 1$　　(ب) $2^{ن} - 1$　　(جـ) $\frac{2^{ن}}{ن}$　　(د) $2^{ن-1}$

(١١) متوسط التغير فى حجم مكعب عندما يتغير طول حرفه من ٥ سم إلى ٧ سم يساوى ....

(أ) ١٢٥　　(ب) ٢١٨　　(جـ) ٣٤٣　　(د) ١٠٩

(١٢) فى الشكل المقابل :

أ ب ء مثلث قائم الزاوية فى ب

فإن : س + ص = ...

(أ) ٣٠°　　(ب) ٤٥°　　(جـ) ٦٠°　　(د) ٩٠°

(١٣) كلما ابتعد رجل عن قاعدة برج فإن قياس زاوية ارتفاع قمة البرج ....

(أ) تتناقص.　　(ب) تتزايد.

(جـ) ثابتة.　　(د) لا يمكن تحديد التغير.

(١٤) إذا كان : $\int س^{ك}\, ءس = \frac{1}{3}س^{3} + ث$　فإن : ك = ...

(أ) −١　　(ب) ١　　(جـ) ٢　　(د) ٣

(١٥) إذا كان : ${}^{ن}ل_{ر} = 120 \times {}^{ن}ق_{ن-ر}$　فإن : ر = ...

(أ) ٢　　(ب) ٣　　(جـ) ٤　　(د) ٥

(١٦) إذا كان : $حـ_{ن}$ هو مجموع ن حدًا من متتابعة حسابية ابتداء من حدها الأول وكان : $حـ_{9} - حـ_{6} = 69$ فإن الحد الثامن من المتتابعة يساوى ....

(أ) ٢٠　　(ب) ٢١　　(جـ) ٢٣　　(د) ٢٤

(١٧) مجموع عدد لانهائى من حدود المتتابعة الهندسية ($ح_{ن}$) التى حدها الأول = ١ ، $ح_{ن} = 2\, ح_{ن+1}$ يساوى ....

(أ) ∞　　(ب) ٢　　(جـ) $\frac{2}{3}$　　(د) $\frac{1}{2}$

(١٨) إذا كان محيط مثلث ٢٥ سم ، طول نصف قطر الدائرة التى تمس أضلاعه من الداخل = ٤ سم فإن مساحة سطحه = ... سم^{٢}

(أ) ٤ π (ب) ٢٥ (جـ) ٥٠ (د) ٧٥

(١٩) مجموعة حل المعادلة : حا س حتا ٤٥° − حتا س حا ٤٥° = $\frac{١}{٢}$ حيث ٠ < س < ٣٦٠ تساوى ....

(أ) {٣٠° ، ١٥٠°} (ب) {٣٠° ، ٧٥°}

(جـ) {٧٥° ، ١٩٥°} (د) {٧٥° ، ١٠٥°}

(٢٠) إذا كان : حا ٣٢ = س فإن : حا ٤° حتا ٤° حتا ٨° حتا ١٦° = ...

(أ) $\frac{س}{١٦}$ (ب) $\frac{س}{٨}$ (جـ) $\frac{س}{٤}$ (د) $\frac{س}{٢}$

(٢١) إذا كان : $^{ن+١}ق_{ن-٢} = ٥٦$ فإن : ن = ...

(أ) ٥ (ب) ٦ (جـ) ٧ (د) ٨

(٢٢) عددان وسطهما الحسابى م ووسطهما الهندسى ن فإن مجموع مربعى العددين = ...

(أ) م^{٢} + ن^{٢} (ب) ٢ م^{٢} − ن^{٢} (جـ) ٤ م^{٢} − ٢ ن^{٢} (د) ٤ م^{٢}

(٢٣) ميل المماس للمنحنى : ص = $\sqrt[٣]{س^{٢} + س + ٢}$ عند النقطة (٢ ، ٢) يساوى ....

(أ) $\frac{٢}{٣}$ (ب) $\frac{٣}{٢}$ (جـ) $\frac{١٢}{٥}$ (د) $\frac{٥}{١٢}$

(٢٤) إذا كان : $^{٢٧}ق_{٢س+١} = {}^{٢٧}ق_{٥س-٨}$ فإن : $^{٥}ق_{س}$ = ...

(أ) ١٠ (ب) ١٢ (جـ) ١٣ (د) ١٥

(٢٥) امتحان مكون من ٦ أسئلة وعلى الطالب إجابة ثلاثة منها صحيحة على الأقل لينجح فإن عدد الطرق التى يمكن أن ينجح بها = ...

(أ) ١٨٠٠ (ب) ٤٢ (جـ) ٢٠ (د) ١٥

(٢٦) مساحة المثلث المتساوى الساقين الذى طول أحد ساقيه ١٤ سم ومحيطه ٣٦ سم تساوى .... سم^{٢}

(أ) ١٢ $\sqrt{٥}$ (ب) ١٨ $\sqrt{٥}$ (جـ) ٢٤ $\sqrt{٥}$ (د) ٣٠ $\sqrt{٥}$

(٢٧) (ن + ١) (ن + ٢) (ن + ٣) × .... × (٢ ن) = ...

(أ) $\underline{|٢ ن − ١}$ (ب) $\frac{\underline{|٢ ن}}{\underline{|ن}}$ (جـ) $\underline{|٣ ن + ١}$ (د) $\frac{\underline{|٢ ن}}{\underline{|ن + ١}}$

ثانيًا الأسئلة المقالية

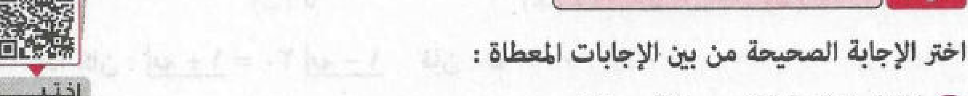
أجب عن السؤالين الآتيين :

١ (أ) متتابعة حسابية حدها الثانى يساوى ٧ ومجموع حديها الثالث والخامس يساوى ٣٠ أوجد المتتابعة.

(ب) $(ح_ن)$ متتابعة هندسية حدودها موجبة فيها $ح_٥ ح_{١١} = \frac{١}{٤}$
أوجد القيمة العددية للمقدار : $ح_٢ ح_٤ ح_٦ ح_٨ ح_{١٠} ح_{١٢} ح_{١٤}$

٢ (أ) إذا كان : $(س + ص)^٧ = ١$ أوجد : $\frac{ءص}{ءس}$ عندما $س = ٣$

(ب) $\int \frac{١ + طا^٢ س}{١ + ظتا^٢ س} ءس$





أولًا أسئلة الاختيار من متعدد

اختبار تفاعلى ٥

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

① المتتابعة الحقيقية هى دالة مجالها هو = ...

(أ) ح (ب) $ح^+$ (جـ) ص (د) $ص^+$

② الحد العام لمتتابعة الأعداد الصحيحة الزوجية الموجبة هو ....

(أ) ٤ ن (ب) ٢ ن (جـ) ٢ ن − ٢ (د) ٤ ن − ٢

③ المتسلسلة : (٧ × ١) + (٧ × ٢) + (٧ × ٣) + ⋯ + (٧ × ٢٠) باستخدام رمز التجميع = ...

(أ) $٧ \sum_{ر=١}^{١٤٠} ر$ (ب) $\sum_{ر=١}^{١٥} ٧ ر$ (جـ) $\sum_{ر=١}^{٢٠} ر$ (د) $\sum_{ر=١}^{٢٠} ٧ ر$

④ فى المتتابعة الحسابية : (٩٥ ، ٩٢ ، ٨٩ ، ...) فإن أول حد سالب هو ....

(أ) $ح_{٣٣}$ (ب) $ح_{٣٢}$ (جـ) $ح_{٣٤}$ (د) $ح_{٣٠}$

⑤ إذا كان الوسط الحسابى بين أ ، ب هو ٨ ، الوسط الحسابى بين ٤ أ ، ٢ ب هو ٢٠ فإن : (أ ، ب) = ...

(أ) (٤ ، ١٢) (ب) (٦ ، ١٠) (جـ) (٥ ، ١١) (د) (٨ ، ٨)

(٦) مجموع حدود المتتابعة الحسابية التى حدها الأول ٣ وحدها الأخير ٢١ وعدد حدودها ١٠ يساوى ....

(أ) ١٢٠ (ب) ٦٠ (جـ) ٣٠ (د) ٢٤٠

(٧) إذا كانت : س > ٠ فإن أساس المتتابعة الهندسية (٤ ، س − ٣ ، ٢ س + ٦ ، ...) هو ....

(أ) ١ (ب) ٥ (جـ) ٣ (د) ٢٤

(٨) مجموع الحدود الستة الأولى من المتتابعة الهندسية (٤ ، ١٢ ، ٣٦ ، ...) يساوى ....

(أ) ١٤٥٦ (ب) ١٦٥٤ (جـ) ٤١٥٦ (د) ٥٤١٦

(٩) مجموع حدود المتتابعة الهندسية : (٨١ ، ٢٧ ، ٩ ، ...) يساوى ....

(أ) $\frac{٢٤٣}{٤}$ (ب) ١١٧ (جـ) ١١٨ (د) $\frac{٢٤٣}{٢}$

(١٠) إذا كان : $^{ن}ل_{٢}$ = ١٢٠ فإن : ن = ...

(أ) ٦ (ب) ٥ (جـ) ٤ (د) ٣

(١١) إذا كان : $\underline{|ن + ١}$ = ٣٠ $\underline{|ن − ١}$ فإن : ن = ...

(أ) ٦ (ب) ٥ (جـ) ٢٩ (د) ٣٠

(١٢) عدد طرق جلوس ٤ طلاب على أربعة مقاعد فى صف يساوى ....

(أ) ١ (ب) ٤ + ٤ (جـ) ٤ × ٤ (د) $\underline{|٤}$

(١٣) إذا كان : $^{ن}ق_{٢}$ = ٣٥ فإن : قيمة ن = ...

(أ) ٥ (ب) ٦ (جـ) ٧ (د) ٣٥

(١٤) إذا كانت : د (س) = $س^{٢}$ − ٣ س فإن معدل التغير للدالة د عند س = ٢ يساوى ....

(أ) ١ (ب) صفر (جـ) ٢ (د) ٣

(١٥) متوسط تغير الدالة د حيث د (س) = $س^{٢}$ عندما تتغير س من ٣ إلى ٣,١ يساوى ....

(أ) ٠,٦١ (ب) ٦,١ (جـ) ٩ (د) ٩,٦١

(١٦) $\frac{د}{د س}$ (حتا^٢ س + حا^٢ س) = ...

(أ) ١ (ب) صفر

(جـ) س (د) ٢ (حتا س + حا س)

(١٧) إذا كان : ص = حا ع ، ع = س^٢ + ٣ فإن : $\frac{د ص}{د س}$ = ...

(أ) ٢ حتا س^٢ + ٣ (ب) ٢ حتا س

(جـ) -٢ حتا س (د) ٢ س حتا (س^٢ + ٣)

(١٨) إذا كان : د (س) = (س^٣ - ١) (س + ٢) فإن : دَ (-١) = ...

(أ) ١ (ب) صفر (جـ) -١ (د) ٢

(١٩) إذا كانت : ص س = ٧ ، س ع = ٤ فإن : $\frac{د ص}{د ع}$ = ...

(أ) ٢٨ (ب) $\frac{٧}{٤}$ (جـ) $\frac{٤}{٧}$ (د) صفر

(٢٠) ∫ (-٥) د س = ... + ث

(أ) -٥ س (ب) س (جـ) $\frac{(-٥)^٢}{٢}$ (د) -٤

(٢١) ∫ حا ٢ س د س = ... + ث

(أ) $\frac{١}{٢}$ حا^٢ ٣ س (ب) - $\frac{١}{٣}$ حتا ٣ س

(جـ) $\frac{١}{٢}$ حتا ٢ س (د) $\frac{١}{٣}$ حا ٣ س

(٢٢) ∫ (حتا^٢ س - حا^٢ س) د س = ... + ث

(أ) حتا ٢ س (ب) $\frac{١}{٢}$ حا ٢ س (جـ) $\frac{١}{٢}$ حتا ٢ س (د) ٢ حا ٢ س

(٢٣) من نقطة على سطح الأرض رصد رجل زاوية ارتفاع قمة مبنى فوجدها هـ° فإن قياس زاوية انخفاض موضع الرجل فى نفس اللحظة من قمة المبنى هى ....

(أ) هـ° (ب) ٩٠° - هـ° (جـ) هـ° - ٩٠° (د) ١٨٠° - هـ°

(٢٤) إذا كان : ظا أ = ٢ ، ظا ب = ٣ فإن : ظا (أ - ب) = ...

(أ) ١ (ب) -١ (جـ) $\frac{١}{٧}$ (د) -$\frac{١}{٧}$

(٢٥) إذا كان : حتا حـ = $\frac{١}{٣}$ فإن : حتا ٢ حـ = ...

(أ) صفر (ب) - $\frac{٢}{٣}$ (جـ) - $\frac{٧}{٩}$ (د) $\frac{٢}{٣}$

(٢٦) حا ٤ س حتا ٤ س = ...

(أ) حا ٨ س (ب) $\frac{١}{٢}$ حا ٨ س (جـ) صفر (د) حا ٢ س

(٢٧) حا $\frac{\pi}{٢}$ حتا θ − حتا $\frac{\pi}{٢}$ حا θ = ...

(أ) حتا θ (ب) − حتا θ (جـ) حا θ (د) ١ + حتا θ

ثانيًا الأسئلة المقالية

أجب عن السؤالين الآتيين :

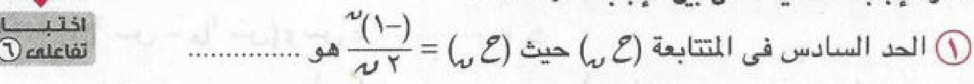
١ ($ح_ن$) متتابعة هندسية حدودها موجبة فيها : $ح_٢ = ٦$ ، $ح_٣ - ح_١ = ٩$

أوجد مجموع العشرة حدود الأولى منها.

---

٢ ابحث اتصال وقابلية الاشتقاق للدالة د : د (س) = $\begin{cases} ٢ س - ٥ & \text{عندما } س \leq ٢ \\ ٢ س + ٥ & \text{عندما } س > ٢ \end{cases}$

عندما س = ٢



أولًا أسئلة الاختيار من متعدد

اختبار تفاعلى ٦

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) الحد السادس فى المتتابعة ($ح_ن$) حيث ($ح_ن$) = $\frac{(-١)^ن}{٢ ن}$ هو ....

(أ) $\frac{١}{٦}$ (ب) $\frac{-١}{٦}$ (جـ) $\frac{١}{١٢}$ (د) $\frac{-١}{١٢}$

(٢) إذا كان : $\sum_{ر=١}^{ن}$ (ر) = ١٣٦ فإن : $\sum_{ر=١}^{ن}$ (٤ ر) = ...

(أ) ٣٤ (ب) ١٤٠ (جـ) ٢٧٢ (د) ٥٤٤

(٣) المتتابعة الحسابية (٣ ، ٥ ، ٧ ، ...) حدها النونى = ...

(أ) ٢ ن (ب) ٣ ن (جـ) ٥ ن − ٢ (د) ٢ ن + ١

(٤) متتابعة حسابية حدها الأول ٧ ومجموع العشر حدود الأولى منها = ٢٥٠

فإن : $ح_{٢٠}$ = ...

(أ) ٨٣ (ب) ٨٦ (جـ) ٨٧ (د) ٩١

(٥) إذا كان الوسط الحسابى بين س ، ص هو ٤ والوسط الحسابى بين ٦ س ، ٣ ص هو ٩

فإن : (س ، ص) = ...

(أ) (٢ ، ٦) (ب) (-٢ ، ١٠) (جـ) (-١ ، ٥) (د) (٤ ، ٩)

(٦) مجموع عدد لا نهائى من حدود متتابعة هندسية ($ح_ن$) التى حدها الأول $ح_١$ = ٦

، $ح_ن$ = ٣ $ح_{ن+١}$ يساوى ....

(أ) ٣ (ب) ٦ (جـ) ٩ (د) ١٨

(٧) المتتابعة الهندسية التى حدها الأول = ٢٤٣ وحدها الأخير = ١ ومجموع حدودها ٣٦٤ ،

يكون أساسها = ...

(أ) $\frac{١}{٢}$ (ب) $\frac{١}{٣}$ (جـ) ٢ (د) ٣

(٨) إذا كان : $\underline{|ن - ١}$ = ١٢٠ ، $\underline{|ن - ر}$ = ٦ فإن : $^{ن}ل_{ر}$ = ...

(أ) ٦ (ب) ٢٠ (جـ) ١٢٠ (د) ٧٢٠

(٩) عدد طرق ترتيب ٧ أشخاص فى دائرة = ...

(أ) ٢٤ (ب) ١٢٠ (جـ) ٧٢٠ (د) ٥٠٤٠

(١٠) عدد طرق تكوين عدد أولى مكون من ٤ أرقام مختلفة من مجموعة الأرقام ٢ ، ٤ ، ١ ، ٥

هو ....

(أ) ٢٤ (ب) ١٦ (جـ) ٨ (د) صفر

(١١) إذا كان العامل الأوسط فى مفكوك $^{ن}ل_{٥}$ يساوى ٧ فإن : ن = ...

(أ) ٨ (ب) ٩ (جـ) ١٠ (د) ١١

(١٢) إذا كان : $^{ن}ق_{٢}$ = ٥٦ فإن : $^{ن}ق_{ن-٢}$ = ...

(أ) ٢٨ (ب) ٥٦ (جـ) ١١٢ (د) ٢٢٤

(١٣) عدد الطرق الممكنة لاختيار ٣ طلاب من بين عشرة طلاب = ...

(أ) ١٠ × ٣ (ب) $^{١٠}ق_{٣}$ (جـ) $^{١٠}ل_{٣}$ (د) $١٠^{٣}$

(١٤) إذا كان متوسط التغير فى الدالة د يساوى ٣,٦ عندما تتغير س من ٥ إلى ٥,٣

فإن التغير فى د يساوى ....

(أ) ١٢ (ب) ٠,٣ (جـ) ٣,٦ (د) ١,٠٨

(١٥) إذا كانت : د (س) = س٢ + $\frac{١}{س}$ − ٦ فإن : دَ (٢) = ...

(أ) ١٢٫٥ (ب) ١١٫٧٥ (جـ) ١٢٫٢٥ (د) ١١٫٥

(١٦) إذا كانت : ص = س٢ + س ، س = ع٢ + ع فإن : $\frac{ءص}{ءع}$ = ...
عندما ع = −١

(أ) −١ (ب) ١ (جـ) صفر (د) ٢

(١٧) إذا كانت : ص = س جا ٢ س فإن : $\frac{ءص}{ءس}$ = ...

(أ) س جتا ٢ س + جا ٢ س (ب) ٢ س جتا ٢ س + جا ٢ س

(جـ) −٢ س جتا ٢ س + جا ٢ س (د) − س جتا ٢ س + جا ٢ س

(١٨) إذا كان ميل المماس للمنحنى : ص = أ س٢ + ٢ ب س عند نقطة الأصل يساوى ٦
والنقطة (−١ ، −٣) تقع على المنحنى فإن : أ + ب = ...

(أ) ٣ (ب) ٤ (جـ) ٦ (د) ٨

(١٩) ∫ ٦ س (٣ س٢ − ٧)٤ ءس = ... + ث

(أ) $\frac{١}{٣٠}$ (٣ س٢ − ٧)٥ (ب) $\frac{١}{٤}$ (٣ س٢ − ٧)٥

(جـ) $\frac{١}{٥}$ (٣ س٢ − ٧)٥ (د) (٣ س٢ − ٧)٥

(٢٠) من شرفة منزل على ارتفاع ٣٢ م من سطح الأرض شاهد رجل قمة وقاعدة شجرة أمام المنزل بزاويتى انخفاض ٤٠° ، ٤٥° على الترتيب فإن طول الشجرة ≃ .... م

(أ) ٥ (ب) ٦ (جـ) ٧ (د) ٨

(٢١) جا ٥ س جا ٣ س + جتا ٥ س جتا ٣ س = ...

(أ) جتا ٢ س (ب) جتا ٨ س (جـ) جا ٢ س (د) جا ٨ س

(٢٢) عدد الحلول الممكنة للمعادلة : جا ٢ س = جا س هى .... حيث س ∈] ٠ ، ٢π [

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) ٢ (د) ٣

(٢٣) ١ − ٢ جا٢ أ = ...

(أ) جا ٢ أ (ب) جتا أ (جـ) جا أ (د) جتا ٢ أ

(٢٤) إذا كان : ٣ جتا ٢ س + ٤ جا ٢ س = ٠ حيث س قياس زاوية حادة موجبة
فإن : ظا س = ...

(أ) $\frac{٣}{٤}$ (ب) $\frac{-١}{٣}$ (جـ) ٣ (د) $\frac{-٣}{٤}$

(٢٥) مساحة المثلث الذى أطوال أضلاعه ٦ ، ٦ ، ٨ سم تساوى .... سم^٢

(أ) ٨ (ب) ١٦$\sqrt{٥}$ (جـ) ٨$\sqrt{٥}$ (د) ١٠$\sqrt{٥}$

(٢٦) إذا كان : طا أ = ٢ ، طا ب = ٣ فإن : طا (أ − ب) = ...

(أ) $\frac{١}{٦}$ (ب) $\frac{٥}{٦}$ (جـ) $\frac{١}{٧}$ (د) $\frac{-١}{٧}$

(٢٧) إذا كان زاوية انخفاض النقطة س بالنسبة إلى النقطة ص يساوى ٦٤°

، فإن قياس زاوية ارتفاع ص بالنسبة إلى س = ...°

(أ) ٢٦ (ب) ٦٤ (جـ) ٣٢ (د) ٢٢

ثانيًا الأسئلة المقالية

أجب عن السؤالين الآتيين :

١ أوجد معادلة العمودى على المماس للمنحنى : ص = $\frac{س + ٣}{س + ١}$ عند النقطة الواقعة على المنحنى والتى احداثيها السينى = ١

---

٢ ($ح_ن$) متتابعة هندسية حدودها موجبة ، الحد الثانى منها = ٦ ، $ح_٣ - ح_١ = ٩$

أوجد هذه المتتابعة ومجموع التسع حدود الأولى منها

٧ محافظة الدقهلية

إدارة ميت غمر
توجيه الرياضيات

أولًا أسئلة الاختيار من متعدد



اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) إذا كان : $\sqrt{س + ص} = ١٢٠$ ، $\sqrt{س - ص} = ٦$

فإن : $\sqrt{س} + \sqrt{ص}$ = ...

(أ) ٢٥ (ب) ٢٤ (جـ) ١٨ (د) ٩

(٢) ($ح_ن$) = ($ن^٢$ − ١) ، ن ∈ $ص^+$ تمثل متتابعة ....

(أ) تناقصية. (ب) تذبذبية. (جـ) منتهية. (د) غير منتهية.

(٣) $\sqrt{٢}$ جتا (أ − ٤٥°) = ...

(أ) جا أ + جتا أ (ب) جا أ − جتا أ (جـ) جا أ جتا أ (د) طا أ + طتا أ

(٤) إذا كان : ${}^{ن}ق_{ر} : {}^{ن}ق_{ر-١} = ٧$ ، ${}^{ن}ل_{ر} : {}^{ن-١}ل_{ر} = ٧ : ٦$

فإن : ن + ر = ...

(أ) ٧ (ب) ٨ (جـ) ١١ (د) ١٤

(٥) دائرة طول نصف قطرها نق ، فإن متوسط التغير فى مساحة الدائرة عندما تتغير نق من $نق_{١}$ إلى $نق_{١} + هـ$ = ...

(أ) ٢ π $نق_{١}$ (ب) π (٢ $نق_{١}$ + هـ)

(جـ) π $نق_{١}^{٢}$ (د) π (٢ $نق_{١}$ + $هـ^{٢}$)

(٦) إذا كان : جا أ = $\frac{٤}{٥}$ حيث أ $\in$] ٠ ، $\frac{\pi}{٢}$ [فإن : طا $\frac{أ}{٢}$ = ...

(أ) ٢ (ب) $\frac{١}{٢}$ (جـ) $\frac{٤}{٣}$ (د) $\frac{٢٤}{٧}$

(٧) عدد الحدود التى يلزم أخذها من المتتابعة الهندسية (٣ ، ٦ ، ١٢ ، ...) ابتداءً من حدها الأول ليكون مجموع هذه الحدود = ٣٨١ هو .... حدًا.

(أ) ٨ (ب) ٦ (جـ) ٩ (د) ٧

(٨) إذا كان : أ ، ب ، حـ فى تتابع هندسى وأساس المتتابعة = ر فإن جميع العبارات التالية صحيحة ما عدا ....

(أ) ر = $\frac{ب}{أ}$ (ب) ر = $\frac{حـ}{ب}$ (جـ) ر = $\frac{ب^{٢}}{أ حـ}$ (د) ر = $\frac{ب + حـ}{أ + ب}$

(٩) عدد طرق اختيار رئيس ونائب رئيس وسكرتير من لجنة مكونة من عشرة أشخاص يساوى ....

(أ) ٧٢٠ (ب) ٦٠ (جـ) ٣٠ (د) ١٢٠

(١٠) مساحة المثلث الذى أطوال أضلاعه ٩ ، ٤٠ ، ٤١ من السنتيمترات يساوى .... $سم^{٢}$

(أ) ٤٥ (ب) ١٣ (جـ) ٩٠ (د) ١٨٠

(١١) إذا كان : $س^{٢} + ص^{٢} = ص$ فإن : ....

(أ) $\frac{ءص}{ءس} = ٢ + ٢ ص$ (ب) ٢ س + ٢ ص = ١

(جـ) $\frac{ءص}{ءس} = \frac{٢ س}{١ - ٢ ص}$ (د) $\frac{ءص}{ءس} = \frac{س^{٢}}{ص - س^{٢}}$

(١٢) إذا رصد رجل زاوية ارتفاع قمة برج من نقطة (ب) فى المستوى الأفقى المار بقاعدة البرج فوجد قياسها θ_1 ثم صعد رأسيًا أعلى (ب) مسافة ف متر ورصد زاوية ارتفاع البرج مرة أخرى فوجد قياسها θ_2 فإن : ....

(أ) $\theta_1 < \theta_2$ (ب) $\theta_1 > \theta_2$ (جـ) $\theta_1 = \theta_2$ (د) $\theta_1 + \theta_2 = ٩٠$

(١٣) $\int$ س (س^٢ + ٥)^٧ ءس = ... + ث

(أ) $\frac{١}{٨}$ (س^٢ + ٥)^٨ (ب) $\frac{١}{٤}$ (س^٢ + ٥)^٨

(جـ) $\frac{١}{١٦}$ (س^٢ + ٥)^٨ (د) $\frac{١}{٧}$ (س^٢ + ٥)^٨

(١٤) إذا كان : $^{ن}ل_{ر}$ = ٧٢٠ ، $^{ن}ق_{ر}$ = ١٢٠ فإن : $^{ن-٢}ق_{ر-٤}$ = ...

(أ) ٢٨ (ب) ١٠ (جـ) ٨ (د) غير معرف.

(١٥) $^{ن-١}ل_{ر}$ $\in$ ....

(أ) ص$^+$ (ب) [-١ ، ١] (جـ) ص (د) ص$^-$

(١٦) إذا كان : أ + ب = ١٨٠° حيث ب قياس زاوية حادة موجبة
فإن : جا (أ - ب) = ...

(أ) جا أ جتا ب (ب) ظا ب ظتا أ (جـ) ٢ جا ب جتا ب (د) صفر

(١٧) جميع العبارات التالية خطأ ما عدا ....

(أ) إذا كانت الدالة متصلة عند نقطة فإنها تكون قابلة للاشتقاق عند هذه النقطة.

(ب) إذا كانت الدالة غير قابلة للاشتقاق عند نقطة فإن الدالة تكون غير معرفة عند تلك النقطة.

(جـ) إذا كانت الدالة غير متصلة عند نقطة فإن الدالة تكون غير قابلة للاشتقاق عند نفس النقطة.

(د) إذا كانت الدالة لها مشتقة يمنى ومشتقة يسرى عند نقطة فإنها تكون قابلة للاشتقاق عند هذه النقطة.

(١٨) إذا كان : أ ب حـ مثلث حاد الزوايا فيه : جا أ + جا ب جتا حـ + جتا ب جا حـ = $\sqrt{٢}$
فإن : ق ($\angle$ أ) يمكن أن تكون ....

(أ) ٣٠° (ب) ٦٠° (جـ) ٤٥° (د) ٩٠°

(١٩) إذا كانت : (أ ، ٦ ، ب ، ...) فى تتابع حسابى فإن : ....

(أ) أ + ب < ٦ (ب) ٦ < أ + ب < ١٢ (جـ) أ + ب = ٦ (د) أ + ب = ١٢

(٢٠) إذا كانت : (٥٤ ، س ، ص ، ٢) متتابعة هندسية فإن : $\frac{ص}{س}$ = ...

(أ) $\frac{١}{٣}$ (ب) ٣ (جـ) ٩ (د) ٢٧

(٢١) جا $(\theta + \frac{\pi}{٦})$ = ...

(أ) $\frac{١}{٢}$ (جتا θ + $\sqrt{٣}$ جا θ)
(ب) $\frac{١}{٢}$ (جتا θ + جا θ)
(جـ) $\frac{١}{٢}$ ($\sqrt{٣}$ جتا θ + جا θ)
(د) $\frac{١}{٢}$ ($\sqrt{٣}$ جتا θ + $\sqrt{٢}$ جا θ)

(٢٢) $^{ن}ل_{ر} \div {^{ن}ق_{ر}}$ = ...

(أ) $\underline{|ر - ١}$
(ب) $\underline{|ر}$
(جـ) $\underline{|ن}$
(د) ١

(٢٣) في المثلث أ ب حـ : جا $\frac{أ + ب}{٢}$ جتا $\frac{حـ}{٢}$ + جتا $\frac{أ + ب}{٢}$ جا $\frac{حـ}{٢}$ = ...

(أ) ١
(ب) صفر
(جـ) $\frac{١}{٢}$
(د) $\frac{\sqrt{٢}}{٢}$

(٢٤) ∫ (١ + ظا² س) جتا² س ء س = ... + ث

(أ) قا س
(ب) س
(جـ) جتا س
(د) قا س جتا س

(٢٥) $\frac{١}{٢}$ (ظا θ + ظتا θ) = ...

(أ) جتا ٢ θ
(ب) جا ٢ θ
(جـ) قتا ٢ θ
(د) قا ٢ θ

(٢٦) من قمة برج قيست زاويتا انخفاض قمة مئذنة وقاعدتها فكان قياساهما °٢٧ َ٣٢ ، °٥٧ َ٥٢ على الترتيب فإذا كان ارتفاع المئذنة ٣٧ مترًا ، فإن ارتفاع البرج ≃ .... مترًا.

(أ) ٥٧
(ب) ٦٢
(جـ) ٦٧
(د) ٧١

(٢٧) متتابعة حسابية حدها الثاني = ١٣ ، ومجموع العشرة حدود الأولى منها = ٢٣٥ فإن المتتابعة هي ....

(أ) (٨ ، ١٣ ، ١٨ ، ...)
(ب) (٩ ، ١٣ ، ١٧ ، ...)
(جـ) (١٢ ، ١٣ ، ١٤ ، ...)
(د) (١٠ ، ١٣ ، ١٦ ، ...)

ثانيًا الأسئلة المقالية

أجب عن السؤالين الآتيين :

١ متتابعة هندسية موجبة مجموع حديها الأول والثاني يساوي ٧٢ ، ومجموع حديها الثالث والرابع يساوي ٨ أوجد المتتابعة.

---

٢ أوجد معادلتي المماس والعمودي عليه للمنحنى : ص = ٥ س³ + ٣ س² + ٤ عند النقطة (-١ ، ٢) الواقعة عليه.



٨ محافظة السويس

إدارة شمال
توجيه الرياضيات



أولاً أسئلة الاختيار من متعدد (يسمح باستخدام الآلة الحاسبة)

اختبار تفاعلي ٨

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

① مجموع عدد غير منته من حدود المتتابعة الهندسية (٨ ، ٤ ، ٢ ، ...) يساوى ....

(أ) ١٦　(ب) ٣٢　(جـ) ٢٤　(د) ١٨

② إذا كان : $^{ن}ل_{ر}$ = ٣٣٦ ، $^{ن}ق_{ر}$ = ٥٦ فإن : (ن ، ر) = ...

(أ) (٣ ، ٢)　(ب) (٨ ، ٣)　(جـ) (٧ ، ٤)　(د) (٧ ، ٣)

③ جا ١٥° جتا ٢٥° + جتا ١٥° جا ٢٥° = ...

(أ) جا ١٠°　(ب) جتا ٤٠°　(جـ) جتا ١٠°　(د) جا ٤٠°

④ معادلة المماس لمنحنى الدالة د حيث : د (س) = ٣ $س^{٢}$ − ٤ س + ٣ عند النقطة (١ ، ٢) هى ....

(أ) ص = ٢ س　(ب) ص − ٢ س = ٥

(جـ) س + ص = ٢　(د) ٢ س − ص + ٢ = ٠

⑤ إذا كان : ص = $\frac{٢}{٤ س - ٣}$ فإن : $\frac{ءص}{ءس}$ عند س = ١ تساوى ....

(أ) − $\frac{٨}{٣}$　(ب) ١٢　(جـ) −٨　(د) ٦

⑥ مساحة سطح Δ أ ب حـ الذى أطوال أضلاعه ٥ سم ، ٦ سم ، ٧ سم تساوى .... $سم^{٢}$

(أ) ٦　(ب) ٦ $\sqrt{٦}$　(جـ) ٢ $\sqrt{٦}$　(د) ٩

⑦ $\frac{\underline{|ن}}{\underline{|ن - ١}}$ = ...

(أ) ن　(ب) ن − ١　(جـ) ن − ٢　(د) ن − ٣

⑧ مجموع حدود المتتابعة الحسابية (٣ ، ٥ ، ٧ ، ... ، ٦٥) يساوى ....

(أ) ١٣٠٨　(ب) ٨٤٢　(جـ) ٢٠٨٤　(د) ١٠٨٨

⑨ $\frac{٢ \text{ حتا}^٢ \text{ س}}{\text{حا } ٢ \text{ س}}$ = ...

(أ) حتا س (ب) حا س (جـ) طا س (د) طتا س

⑩ إذا كانت الدالة د : د (س) = $\begin{cases} ٢ س + ٣ &، س < ١ \\ س^٢ + أ &، س \geq ١ \end{cases}$ قابلة للاشتقاق عند س = ١

فإن : أ = ...

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) ٣ (د) ٤

⑪ أى مما يأتى يمثل متتابعة هندسية ؟

(أ) (٣ ، ٧ ، ١١ ، ...) (ب) (١ ، ٨ ، ٢٧ ، ٦٤ ، ...)

(جـ) (٤ ، ٦ ، ٩ ، $\frac{٢٧}{٢}$ ، ...) (د) (٥ ، ١٠ ، ٥ ، ...)

⑫ $\int$ (٢ س + ٥)^٣ ء س = ... + ث

(أ) $\frac{١}{٢}$ (٢ س + ٥)^٤ (ب) $\frac{١}{٨}$ (٢ س + ٥)^٤

(جـ) $\frac{١}{٦}$ (٢ س + ٥)^٣ (د) $\frac{١}{٨}$ (٢ س + ٥)^٣

⑬ من قمة منزل ارتفاعه ١٥ مترًا كان قياس زاوية ارتفاع قمة برج يساوى قياس زاوية انخفاض قاعدة البرج = هـ ، علمًا بأن قاعدتى المنزل والبرج فى مستوى أفقى واحد ، فإن ارتفاع البرج يساوى .... متر.

(أ) ١٥ طا هـ (ب) ١٥ (جـ) ٣٠ قتا هـ (د) ٣٠

⑭ $\sum_{ر=١}^{٤}$ (ر^٢ + ٣) = ...

(أ) ٤٣ (ب) ٤٢ (جـ) ٤٨ (د) ٤٥

⑮ عدد طرق جلوس ٤ طلاب على أربعة مقاعد فى صف يساوى ....

(أ) ٤ × ٣ × ٢ × ١ (ب) ٤ × ٤ (جـ) ٤ + ٤ (د) ١

⑯ متوسط تغير الدالة د : د (س) = س^٢ عندما تتغير س من ٣ إلى ٣,١ يساوى ....

(أ) ٠,٦١ (ب) ٦,١ (جـ) ٩ (د) ٩,٦١

⑰ ١ − ٢ حا^٢ ٤٠° = ...

(أ) حا ٨٠° (ب) حتا ٤٠° (جـ) حتا ٨٠° (د) حا ٤٠°

(١٨) عند إدخال ٣ أوساط هندسية بين ٢ ، ١٦٢ فإن قيمة الوسط الثانى تساوى ....

(أ) ٥٤ (ب) ١٨ (جـ) ٢٧ (د) ٥٦

(١٩) إذا كان : $^{ن}ق_{١٠} = ^{ن}ق_{١٤}$ فإن : $^{٢٥}ق_{ن} =$ ....

(أ) ٦ (ب) ٩ (جـ) ٢٥ (د) ٥

(٢٠) إذا كان : جتا أ $= \frac{١}{٣}$ فإن : جتا ٢ أ = ...

(أ) $\frac{٢}{٣}$ (ب) ١ (جـ) $-\frac{٧}{٩}$ (د) $-\frac{١}{٦}$

(٢١) قيمة أول حد سالب فى المتتابعة الحسابية (٣٢ ، ٢٨ ، ٢٤ ، ...) يساوى ....

(أ) −١ (ب) −٢ (جـ) −٣ (د) −٤

(٢٢) إذا كان : $\underline{|٣س - ٧}$ = ١٢٠ فإن : س = ...

(أ) ٤ (ب) ٥ (جـ) ٦ (د) ٧

(٢٣) $\int$ جتا ٣ س ء س = ... + ث

(أ) ٣ جا ٣ س (ب) $\frac{١}{٣}$ جتا ٣ س (جـ) $\frac{١}{٣}$ جا ٣ س (د) ٣ جتا ٣ س

(٢٤) إذا كان : جا أ $= \frac{٣}{٥}$ ، جتا أ $= \frac{٤}{٥}$ فإن : ظا ٢ أ = ...

(أ) $\frac{٣}{٤}$ (ب) $\frac{١٢}{٢٥}$ (جـ) $\frac{٤}{٧}$ (د) $\frac{٢٤}{٧}$

(٢٥) قيمة $ح_{١٠}$ من النهاية فى المتتابعة الحسابية (٢ ، ٥ ، ٨ ، ... ، ٧٧) يساوى ....

(أ) ٥٠ (ب) ٥١ (جـ) ٥٦ (د) ٤٥

(٢٦) إذا كان : أ ، ب زاويتين متكاملتين فإن : جتا أ جتا ب − جا أ جا ب = ...

(أ) ١٨٠ (ب) صفر (جـ) ١ (د) −١

(٢٧) إذا كان : $^{م+ن}ل_{٢} = ٢١٠$ ، $\underline{|ن}$ = ٢٤ فإن : م = ...

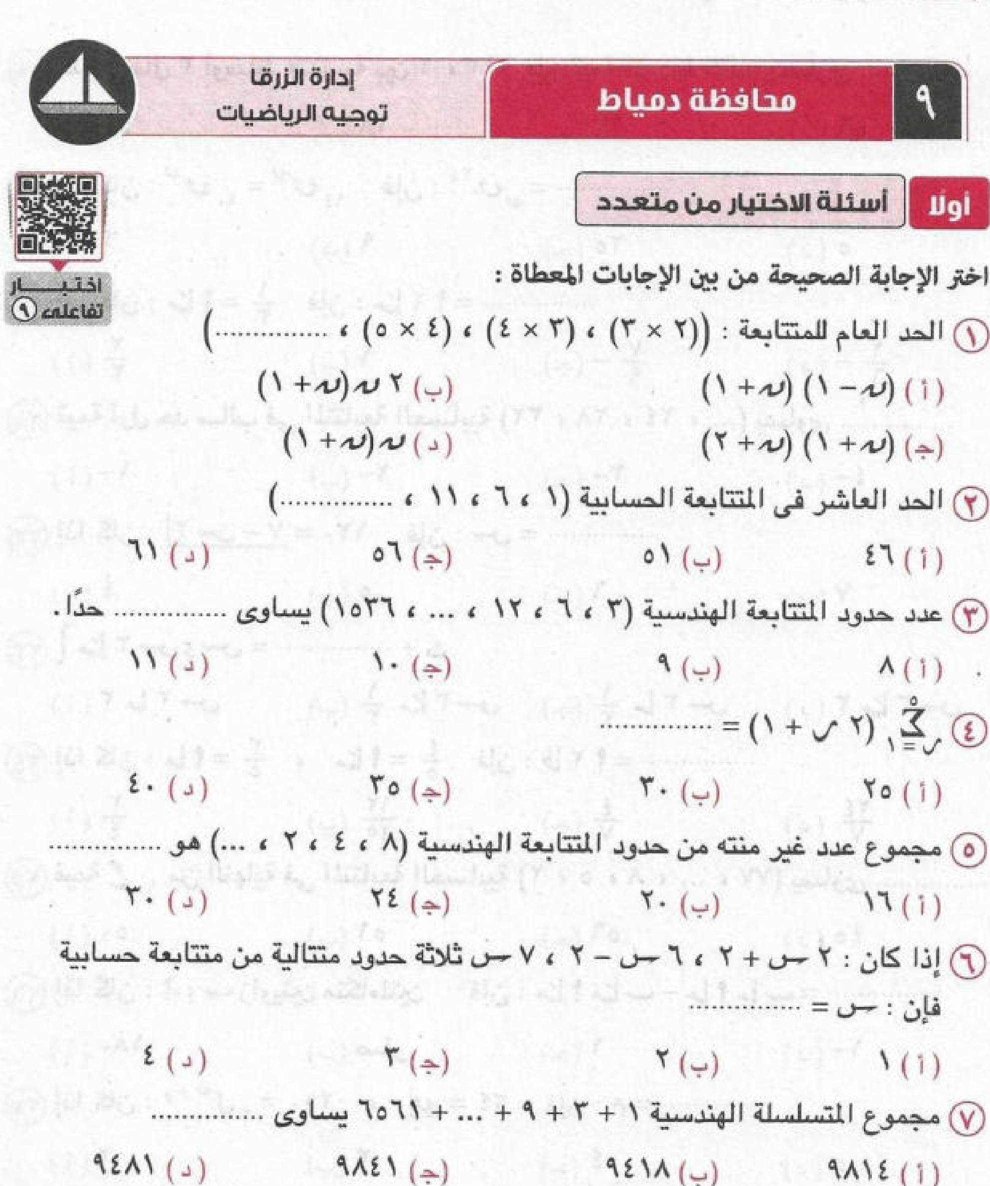
(أ) ٢ (ب) ٣ (جـ) ٤ (د) ٥

ثانيا الأسئلة المقالية

أجب عن السؤالين الآتيين :

(١) أوجد المتتابعة الحسابية التى حدها الرابع يساوى ٢٠ ، وحدها الثامن يساوى ٤٤

(٢) إذا كان : ص = $ع^{٨}$ ، ع = ٣ $س^{٢}$ − ٤ س + ٥ فأوجد : $\frac{ءص}{ءس}$



٩ محافظة دمياط

إدارة الزرقا
توجيه الرياضيات

أولاً أسئلة الاختيار من متعدد

اختبار تفاعلي ٩

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

① الحد العام للمتتابعة : ((٢ × ٣) ، (٣ × ٤) ، (٤ × ٥) ، ....)

(أ) (ن – ١) (ن + ١)　　(ب) ٢ ن (ن + ١)
(جـ) (ن + ١) (ن + ٢)　　(د) ن (ن + ١)

② الحد العاشر فى المتتابعة الحسابية (١ ، ٦ ، ١١ ، ....)

(أ) ٤٦　　(ب) ٥١　　(جـ) ٥٦　　(د) ٦١

③ عدد حدود المتتابعة الهندسية (٣ ، ٦ ، ١٢ ، ... ، ١٥٣٦) يساوى .... حدًا.

(أ) ٨　　(ب) ٩　　(جـ) ١٠　　(د) ١١

④ $\sum_{ر=١}^{٥}$ (٢ ر + ١) = ...

(أ) ٢٥　　(ب) ٣٠　　(جـ) ٣٥　　(د) ٤٠

⑤ مجموع عدد غير منته من حدود المتتابعة الهندسية (٨ ، ٤ ، ٢ ، ...) هو ....

(أ) ١٦　　(ب) ٢٠　　(جـ) ٢٤　　(د) ٣٠

⑥ إذا كان : ٢ س + ٢ ، ٦ س – ٢ ، ٧ س ثلاثة حدود متتالية من متتابعة حسابية فإن : س = ...

(أ) ١　　(ب) ٢　　(جـ) ٣　　(د) ٤

⑦ مجموع المتسلسلة الهندسية ١ + ٣ + ٩ + ... + ٦٥٦١ يساوى ....

(أ) ٩٨١٤　　(ب) ٩٤١٨　　(جـ) ٩٨٤١　　(د) ٩٤٨١

⑧ إذا كان : $^{ن}ل_{٣}$ = ١٢٠　فإن : قيمة ن = ...

(أ) ٣　　(ب) ٤　　(جـ) ٥　　(د) ٦

⑨ لجنة مؤلفة من ١٢ عضوًا ، عدد الطرق التى يمكن اختيار رئيس ونائب لهذه اللجنة تساوى ....

(أ) ٢　　(ب) ٢٤　　(جـ) ٦٦　　(د) ١٣٢

(١٠) عدد طرق ترتيب ٧ أطفال فى دائرة واحدة يساوى ....

(أ) ١ (ب) ٧ (جـ) ٧٢٠ (د) ٥٠٤٠

(١١) عدد الأعداد المكونة من رقمين مختلفين مأخوذة من الأرقام {٥ ، ٤ ، صفر ، ٧} يساوى ....

(أ) ٣ × ٢ (ب) ٤ × ٢ (جـ) ٣ × ٣ (د) ٤ × ٣

(١٢) عدد طرق اختيار ٣ أشخاص من ٥ أشخاص يساوى ....

(أ) ١٠ (ب) ٢٠ (جـ) ١٥ (د) ٣٥

(١٣) إذا كان : $^{ن}ق_{١٠} = ^{ن}ق_{١٤}$ فإن : $^{٢٥}ق_{ن}$ = ...

(أ) ١ (ب) ٢٤ (جـ) ٢٥ (د) ٤٩

(١٤) ٤ جا ب جتا ب = ... (حيث ب قياس زاوية حادة)

(أ) جا ٢ ب (ب) ٤ جا ٢ ب (جـ) ٢ جا ٢ ب (د) ٢ جا ب

(١٥) $\int$ (٤ س + ٣ $س^٢$) ء س = ... + ث

(أ) ٤ $س^٢$ + ٣ $س^٣$ (ب) $س^٢$ + $س^٣$

(جـ) ٢ $س^٢$ + $س^٣$ (د) ٤ + ٦ س

(١٦) إذا كانت : ص = $ع^٥$ ، ع = $س^٣$ − ٢ س فإن : قيمة $\frac{ءص}{ءس}$ عند س = ١ تساوى ....

(أ) ٥ (ب) −٥ (جـ) ١٠ (د) −١٠

(١٧) ميل المماس لمنحنى الدالة د حيث د (س) = ٥ $س^٢$ + ٤ س + ١ عند س = ١ يساوى ....

(أ) ١٠ (ب) ١٤ (جـ) ١٥ (د) ٢٩

(١٨) قياس الزاوية التى يصنعها المماس للمنحنى ص = $\frac{س - ١}{س - ٢}$ مع الاتجاه الموجب لمحور السينات عند س = ٣ يساوى ....

(أ) ٣٠° (ب) ٤٥° (جـ) ١٢٠° (د) ١٣٥°

(١٩) متوسط التغير فى حجم المكعب عندما يتغير طول حرفه من ٥ سم إلى ٧ سم يساوى ....

(أ) ٢ (ب) ١٢ (جـ) ١٠٩ (د) ٢١٨

(٢٠) $\frac{d}{dس}$ (حاس حتاس) = ...

(أ) حاس (ب) حتاس (جـ) حا ٢ س (د) حتا ٢ س

(٢١) حتا^{٢} س − حتا ٢ س = ... (حيث س قياس زاوية حادة)

(أ) − حا^{٢} س (ب) حتا^{٢} س (جـ) حا^{٢} س (د) حاس

(٢٢) من نقطة على سطح الأرض رُصدت زاوية ارتفاع قمة برج تقع قاعدته على سطح الأرض فكانت قياسها ٣٢° ثم سار الراصد فى خط مستقيم أفقيًا ٥٠ متر نحو قاعدة البرج فوجد أن قياس زاوية ارتفاع قمة البرج ٤٢° فإن ارتفاع البرج يساوى .... (لأقرب متر)

(أ) ١٠٠ (ب) ١٠١ (جـ) ١٠٢ (د) ١٠٣

(٢٣) إذا كان : حاب = −٠,٦ فإن : قيمة حتا ٢ ب = ...

(أ) ٠,٦٤ (ب) ٠,٢٨ (جـ) −٠,٢٨ (د) −٠,٦٤

(٢٤) مساحة سطح المثلث الذى أطوال أضلاعه ٦ سم ، ٨ سم ، ١٠ سم يساوى .... سم^{٢}

(أ) ٢٤ (ب) ٣٠ (جـ) ٤٠ (د) ٤٨

(٢٥) حا ٥ س حا ٣ س + حتا ٥ س حتا ٣ س = ... (حيث س قياس زاوية حادة)

(أ) حا ٢ س (ب) حتا ٨ س (جـ) حا ٨ س (د) حتا ٢ س

(٢٦) إذا كان : حاس حتا ٢٠° − حتاس حا ٢٠° = $\frac{١}{٢}$ (حيث س قياس زاوية حادة) فإن : س = ...

(أ) ١٠° (ب) ٣٠° (جـ) ٥٠° (د) ٦٠°

(٢٧) إذا كان : طاب = $\frac{١}{٢}$ ، طاحـ = $\frac{١}{٣}$ فإن : طا (ب + حـ) = ...

(أ) $\frac{١}{٦}$ (ب) $\frac{٥}{٦}$ (جـ) $\frac{١}{٧}$ (د) ١

ثانيًا الأسئلة المقالية

أجب عن السؤالين الآتيين :

(١) أوجد المتتابعة الحسابية التى فيها : $ح_{١}$ + $ح_{٢}$ = ٩ ، $ح_{٨}$ = ٣٧ (مع كتابة خطوات الحل)

(٢) أوجد معادلة المماس للمنحنى : ص = س^{٢} − ٥ س + ٤ عند النقطة (−١ ، ٨) الواقعة عليه ؟





١٠ محافظة البحيرة

إدارة كوم حمادة
توجيه الرياضيات



اختبار تفاعلى ⑩

أولاً أسئلة الاختيار من متعدد

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

① إذا كان مجموع ـن حدًا الأولى من متتابعة حسابية يعطى بالقانون :
$ح_ن = ١٢ ن - ن^٢$ فإن : $ح_٤ =$ ....

(أ) ١٢ (ب) ٥ (جـ) -٩ (د) ٢٠

② $\int \frac{١}{١ - جا^٢ س} ءس =$ .... + ث

(أ) $قا^٢ س$ (ب) $جا^٢ س$ (جـ) $جتا^٢ س$ (د) طا س

③ إذا كان : جا س جتا ٢٥° + جتا س جا ٢٥° = ١ حيث س زاوية حادة
فإن قيمة المقدار : جتا س جتا ٢٠° + جا س جا ٢٠° = ...

(أ) ١ (ب) $\frac{\sqrt{٢}}{٢}$ (جـ) $\sqrt{٢}$ (د) $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

④ إذا كان : د (س) = $\sqrt{س^٣}$ فإن : دَ (٤) = ...

(أ) ٢ (ب) ٣ (جـ) ٦ (د) -٤

⑤ $^{١٢}ل_{ر + ١} \div {}^{١١}ل_{ر} =$ ....

(أ) ١٢ (ب) ١٣ (جـ) $\frac{ر}{ر + ١}$ (د) $\frac{ر + ١}{ر}$

⑥ إذا كان التغير فى الدالة د يساوى ١٠ عندما تتغير س من ٥ إلى ٧ فإن متوسط التغير فى د فى نفس الفترة يساوى ....

(أ) ٢ (ب) ٣ (جـ) ٥ (د) ٧

⑦ من نقطة على سطح الأرض رصد رجل زاوية ارتفاع قمة مئذنة فكانت ٣٠° ثم سار مسافة ٥٠ متر نحو قاعدة المئذنة فأصبحت قياس زاوية ارتفاع قمة المئذنة ٤٥°
فإن ارتفاع المئذنة ≃ .... لأقرب متر.

(أ) ٥٨ (ب) ٦٨ (جـ) ٧٢ (د) ٨٠

⑧ قيمة $\sum_{ر=١}^{\infty} ٦٤ (٢)^{١ - ر} =$ ....

(أ) ٣٢ (ب) ١٢٨ (جـ) ٦٤ (د) ٢٥٦

⑨ $\int (٤ س^٢ - ١٢ س + ٩)^٣ \, ء س = \text{.........} + ث$

(أ) $\frac{١}{٨} (٢ س - ٣)^٤$　(ب) $\frac{١}{١٠} (٢ س - ٣)^٥$

(جـ) $\frac{١}{١٢} (٢ س - ٣)^٦$　(د) $\frac{١}{١٤} (٢ س - ٣)^٧$

⑩ إذا كان : $^{ن}ل_{ر} = ٣٣٦$ ، $^{ن}ق_{ر} = ٥٦$ فإن : $\underline{|ن - ر|} = \text{.........}$

(أ) ١٢٠　(ب) ٥٦　(جـ) ٦　(د) ٦٠

⑪ إذا كان : $\frac{ظا أ + ظا ب}{١ - ظا أ ظا ب} = \sqrt{٣}$ حيث أ ، ب زاويتان حادتان فإن : أ + ب = ...

(أ) ٤٥°　(ب) ٩٠°　(جـ) ٣٠°　(د) ٦٠°

⑫ متتابعة هندسية جميع حدودها موجبة فيها : $ح_٥ - ح_٤ = ٢٧$ ، $ح_٤ - ح_٢ = ١٢$

فإن حدها الأول = ...

(أ) ١٦　(ب) ٤٨　(جـ) ٨　(د) $\frac{١}{٢}$

⑬ أكبر عدد من الحدود يمكن أخذه من المتتابعة (٢٥ ، ٢١ ، ١٧ ، ...) ابتداء من الحد الأول ليكون المجموع موجبًا يساوى ....

(أ) ١٢　(ب) ١٣　(جـ) ١٤　(د) ١٥

⑭ $٢ \, حتا^٢ \left(\frac{\pi}{٢} - س\right) - ١ = \text{.........}$

(أ) حتا ٢ س　(ب) − حتا ٢ س　(جـ) ٢ حتا س　(د) −٢ حتا س

⑮ إذا كان : $^{٢٠}ق_{ر} = {}^{٢٠}ق_{٢ر - ٨}$ فإن : $^{ر + ٤}ق_{٤} = \text{.........}$

(أ) ١٢٠　(ب) ٢٠　(جـ) ٧٠　(د) ٤٢٠

⑯ فى أى متتابعة حسابية $(ح_ن)$ يكون $\frac{ح_{٤٥} + ح_{٥١}}{ح_{٤٨}} = \text{.........}$

(أ) ٥　(ب) ٤　(جـ) ٣　(د) ٢

⑰ عدد طرق تكوين عدد من رقمين مختلفين من مجموعة الأرقام {١ ، ٢ ، ٣، ٤ ، ٥} يساوى ....

(أ) ١٠　(ب) ٢٠　(جـ) ٢٥　(د) ٣٢

⑱ عدد الحدود اللازم أخذها من المتتابعة الهندسية (٣ ، ٦ ، ١٢ ، ...) ابتداء من حدها الأول ليكون مجموعها ٣٨١ يساوى ....

(أ) ٧　(ب) ٩　(جـ) ١١　(د) ١٢

(١٩) إذا كان : د (س) = $\begin{cases} ك\,س^{٢} + ٦ & ،\ س \leq -٢ \\ ٥\,س + ٤\,م & ،\ س > -٢ \end{cases}$ قابلة للاشتقاق عند س = -٢

فإن : ك - م = ...

(أ) ٨ (ب) ١٦ (جـ) -٤ (د) -٦

(٢٠) المتتابعة التى حدها النونى $ح_ن = \frac{١}{ن} - ١$ حيث ن ∋ $ص^{+}$ تمثل متتابعة ....

(أ) تزايدية. (ب) تناقصية. (جـ) ثابتة. (د) تذبذبية.

(٢١) فى المثلث أ ب حـ : جا $\left(\frac{أ+ب}{٢}\right)$ جتا $\left(\frac{حـ}{٢}\right)$ + جتا $\left(\frac{أ+ب}{٢}\right)$ جا $\left(\frac{حـ}{٢}\right)$ = ...

(أ) ١ (ب) صفر (جـ) -١ (د) $\frac{١}{٢}$

(٢٢) إذا كان : $^{ن+٣}ل_{ر}$ = (ن + ٣) (ن + ٢) (ن + ١) × ... × ٨ فإن : ر = ...

(أ) ن (ب) ن - ٤ (جـ) ٤ - ن (د) ٤ ن

(٢٣) إذا كان : ص = $(س + ك)^{٣}$ ، $\frac{ءص}{ءس}$ = ١٢ عند س = صفر فإن : ك = ...

(أ) ٢ (ب) -٢ (جـ) ٤ (د) ± ٢

(٢٤) إذا كان : ن $\underline{|٢ن - ١}$ = ٣٦٠ فإن : ن = ...

(أ) ٥ (ب) ٣ (جـ) ٢ (د) ٤

(٢٥) المقدار : $قتا^{٢}$ س (١ - جتا ٢ س) = ...

(أ) صفر (ب) ٢ (جـ) ٤ (د) -٢

(٢٦) إذا كان أ ب حـ مثلث فيه : أ = ٩ سم ، ب = ٤٠ سم ، حـ = ٤١ سم

فإن مساحة Δ أ ب حـ = ... $سم^{٢}$

(أ) ١٢٠ (ب) ١٨٠ (جـ) ٢٤٠ (د) ٢٨٠

(٢٧) $جتا^{٤}\left(\frac{س}{٢}\right) - جا^{٤}\left(\frac{س}{٢}\right)$ = ...

(أ) جا س (ب) ٢ جا س (جـ) ٢ جتا س (د) جتا س

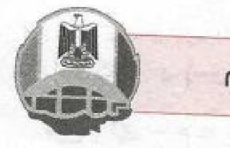
ثانيًا **الأسئلة المقالية**

أجب عن السؤالين الآتيين :

١ متتابعة حسابية تزايدية حدها الأول = ٤ وحدودها الثانى والخامس والحادى عشر فى تتابع هندسى أوجد المتتابعة الحسابية.

---

٢ أوجد معادلة المماس للمنحنى : ص = $س^{٥} - ٤\,س^{٣} + ٢$ عند س = -١



١١ محافظة الفيوم

إدارة شرق الفيوم

أولاً أسئلة الاختيار من متعدد (يسمح باستخدام الآلة الحاسبة)

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

① عند إدخال عدة أوساط حسابية بين أ ، ل يكون الوسط الأخير .... حيث ء أساس المتتابعة.

(أ) ل − ء (ب) ل (جـ) ل − ٢ ء (د) ل + ء

② $ح_ن$ متتابعة حسابية حيث $ح_ن = ٣ن + ٢$ فإن الوسط الحسابى بين $ح_٥$ ، $ح_٧$ هو ....

(أ) ٨ (ب) ١٠ (جـ) ١٢ (د) ٢٠

③ $١ - ٢ \text{ حا}^٢ ٥٠ =$ ....

(أ) حا ١٠٠ (ب) حتا ٥٠ (جـ) حتا ١٠٠ (د) حا ٥٠

④ إذا كان مجموع ن حدًا الأولى من متتابعة حسابية يعطى بالعلاقة : $حـ_ن = ن^٢ - ٢ن$ فإن حدها الخامس يساوى ....

(أ) ٧ (ب) ١٠ (جـ) ١٥ (د) ٣٥

⑤ إذا كان : $^٥ل_ر = ٢٠$ فإن : ر = ...

(أ) ٤ (ب) ٢ (جـ) ٣ (د) ٤٠

⑥ إذا كانت د هى دالة زوجية غير ثابتة وقابلة للاشتقاق على ح وكان : $د'(٢) = ٣$ فإن : $د'(-٢) =$ ....

(أ) ٣ (ب) −٣ (جـ) ١ (د) ٥

⑦ مجموع عدد غير منته من متتابعة هندسية $ح_ن$ حيث $ح_١ = ١$ ، $ح_ن = ٢ ح_{ن+١}$ يساوى ....

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) $\frac{٢}{٣}$ (د) $\frac{١}{٢}$

⑧ إذا كان : $^نل_ر = ٧٢٠$ ، $^نق_ر = ١٢٠$ فإن : ر = ...

(أ) ٦ (ب) ٣ (جـ) ١٢ (د) ٨٤٠

(٩) إذا كان الوسط الهندسى للعددين ٥ ، س هو ١٥ فإن : س = ...

(أ) ٥ (ب) ٦ (جـ) ٩ (د) ٤٥

(١٠) متتابعة هندسية متزايدة حدها الثانى ٨ ومجموع حديها الأول والثالث ٢٠
فإن حدها العاشر ....

(أ) ٥١٢ (ب) ١٠٢٤ (جـ) ٢٠٤٨ (د) ٤٠٩٦

(١١) $\sum_{ر=٢}^{٧} (٢ \times ٣^{ر-١})$ = ...

(أ) ٢٤٢ (ب) ٧٣٨ (جـ) ١٤٥٨ (د) ٢١٧٨

(١٢) جتا ٧٠° جتا ١٠° − جا ٧٠° جا ١٠° = ...

(أ) جا ٨٠° (ب) جتا ٨٠° (جـ) جتا ٦٠° (د) جا ٦٠°

(١٣) إذا كان : جا أ = − $\frac{٣}{٥}$ فإن : جتا ٢ أ = ...

(أ) $\frac{٧}{٢٥}$ (ب) $\frac{١٦}{٢٥}$ (جـ) $\frac{-٧}{٢٥}$ (د) − $\frac{١٦}{٢٥}$

(١٤) أى القيم التالية يمكن أن تساوى $^{ن}ل_{٢}$ ....

(أ) ٤٠ (ب) ١٤٠ (جـ) ٢١٠ (د) ٢٨٠

(١٥) عدد طرق ترتيب ٥ أشخاص فى دائرة = ...

(أ) ١٢٠ (ب) ٦٠ (جـ) ٢٤ (د) ٩

(١٦) إذا كانت : $^{ن}ق_{٦} = ^{ن}ق_{٨}$ فإن : $^{١٥}ق_{ن}$ = ...

(أ) ٤٨ (ب) ١٤ (جـ) ١٥ (د) ٢٩

(١٧) عدد الأزواج المرتبة (أ ، ب) حيث أ ≠ ب التى يمكن تكوينها من عناصر المجموعة
{٣ ، ٤ ، ٥} يساوى ....

(أ) ٢ (ب) ٣ (جـ) ٦ (د) ٨

(١٨) إذا كانت : ص = $(س^٢ - ٢)^٥$ فإن : $\frac{ءص}{ءس}$ = ...

(أ) ٥ $(س^٢ - ٢)^٤$ (ب) ١٠ س $(س^٢ - ٢)^٤$

(جـ) ٢ س $(س^٢ - ٢)^٥$ (د) ٢٢ $س^٥$

(١٩) إذا كان : ص = $(٢ ع - ١)^٥$ ، ع = س + ٢ فإن : $\frac{ءص}{ءس}$ = ... عند س = −٢

(أ) ١ (ب) ٣ (جـ) ١٠ (د) ١٥

(٢٠) إذا كان متوسط التغير فى الدالة د يساوى ٥ عندما تتغير س من ٢ إلى ٤ وكان د (٢) = ٦ فإن : د (٤) = ...

(أ) −٤ (ب) ٧ (ج) ٨ (د) ١٦

(٢١) $\int$ ظتا س جا س ء س = ... + ث

(أ) جا س (ب) − جا س (ج) جتا س (د) − جتا س

(٢٢) $\int$ (٣س + ٢)^{٢} ء س = ... + ث

(أ) (٣س + ٢)^{٣} (ب) ٦ (٣س + ٢)

(ج) $\frac{١}{٩}$ (٣س + ٢)^{٣} (د) $\frac{١}{٩}$ (٣س + ٢)

(٢٣) إذا كان ع هو نصف محيط Δ أ ب ج حيث : ع − أ = ٣ سم ، ع − ب = ٥ سم ، ع − ج = ٩ سم فإن مساحة Δ أ ب ج = ... سم

(أ) ٣ $\sqrt{٢٥٥}$ (ب) ٦٠ (ج) ٢١٠ (د) ١٥٠

(٢٤) فى Δ أ ب ج يكون : جا $\frac{أ + ب}{٢}$ جتا $\frac{ج}{٢}$ + جتا $\frac{أ + ب}{٢}$ جا $\frac{ج}{٢}$ = ...

(أ) ١ (ب) −١ (ج) −٢ (د) صفر

(٢٥) $\frac{\text{جا ٢ س}}{\text{١ + جتا ٢ س}}$ = ...

(أ) ظا س (ب) ظتا س (ج) ظا ٢ س (د) قا س

(٢٦) إذا كانت : ظا أ = $\frac{٢}{٣}$ ، ظا ب = $\frac{١}{٥}$ فإن : ظا (أ + ب) = ...

(أ) ٣ (ب) $\frac{١٣}{١٥}$ (ج) ١ (د) $\frac{٣}{٥}$

(٢٧) ٢ جتا^{٢} ج − جتا ٢ ج = ...

(أ) جا ٢ ج (ب) ١ (ج) جتا ٢ ج (د) جا ٣ ج

ثانيًا الأسئلة المقالية

أجب عن السؤالين الآتيين :

(١) أوجد المتتابعة الحسابية التى فيها : $ح_{٥} - ح_{٤}$ = ٢٠ ، $ح_{٨} - ح_{٧}$ = ٢٩ ثم أوجد مجموع العشرة حدود الأولى منها.

---

(٢) إذا كان : ص = س^{٣} − ٦ س^{٢} + ٩ س + ٢٠ فأوجد النقط التى يكون عندها المماس موازيًا لمحور السينات.



١٢ محافظة بنى سويف

إدارة الفشن

أولاً أسئلة الاختيار من متعدد

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

① الحد العام للمتتابعة (٢ ، −٤ ، ٦ ، −٨ ، ١٠ ، ...) هو ....

(أ) ٢ ن (ب) −٢ ن

(جـ) $(-1)^{ن}$ × ٢ ن (د) $(-1)^{ن+1}$ × ٢ ن

② قيمة المتسلسلة $\sum_{ر=٧}^{٢٣}$ ٣ ر = ...

(أ) ٢٥٥ (ب) ٧٦٥ (جـ) ٨٠٧ (د) ٨٢٨

③ فى المتتابعة الحسابية (١٢ ، ١٤ ، ١٦ ، ...) رتبة الحد الذى قيمته ١٠٢ = ...

(أ) ٤٦ (ب) ٥١ (جـ) ٩٢ (د) ٤٥

④ مجموع عدد غير منته من حدود المتتابعة الهندسية (٦٤ ، ٣٢ ، ١٦ ، ...) = ...

(أ) ١٢٠ (ب) ١٢٢ (جـ) ١٤٢ (د) ١٢٨

⑤ عدد حدود المتتابعة (٧ ، ١١ ، ١٥ ، .... ، ٢٧١)

(أ) ٣٤ (ب) ٦٧ (جـ) ١٦٩ (د) ٩٣١٣

⑥ مجموع ١٠ حدود من المتتابعة الحسابية (٥ ، ٨ ، ١١ ، ...) يساوى ....

(أ) ٣٧٠ (ب) ١٨٥ (جـ) ٤٧٠ (د) ٢٣٥

⑦ عددان موجبان وسطهما الحسابى ٧,٥ ووسطهما الهندسى ٦
فإن العددين هما ....

(أ) ٥ ، ١٠ (ب) ٤ ، ٩ (جـ) ٣ ، ١٢ (د) ٦ ، ١٥

⑧ عدد طرق اختيار ٣ أشخاص من بين ٧ أشخاص يساوى ....

(أ) $^{٧}ل_{٣}$ (ب) $^{٧}ق_{٣}$ (جـ) ٧ × ٣ (د) ٧ + ٣

⑨ $\underline{|ن - ١}$ = ٢٤ فإن : ن = ...

(أ) ٣ (ب) ٤ (جـ) ٥ (د) ٦

(١٠) $^{٥}ل_{ر+١} = ٦٠$ فإن : ر = ...

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) ٣ (د) ٤

(١١) $^{ن}ق_{١٠} = {}^{ن}ق_{١٤}$ فإن : $^{٢٥}ق_{ن}$ = ...

(أ) ٢٤ (ب) ٢٥ (جـ) ١ (د) ٤٩

(١٢) عدد طرق ترتيب خمسة أشخاص فى خمسة مقاعد على شكل دائرة يساوى ....

(أ) ١ (ب) ٣ (جـ) ٢٤ (د) ١٢

(١٣) $^{ن}ل_{٣} = ١٢٠$ فإن : ن = ...

(أ) ٦ (ب) ٥ (جـ) ٤ (د) ٣

(١٤) إذا كان متوسط التغير فى الدالة د يساوى ٧ عندما تتغير س من ٣ إلى ٥ وكان د (٣) = ٨ فإن : د (٥) = ...

(أ) ٢٢ (ب) ١٢ (جـ) ٧ (د) غير ذلك.

(١٥) معدل تغير الدالة د حيث د (س) = $س^{١٥}$ عندما س = ١ هو ....

(أ) ١ (ب) ١٥ (جـ) ١٤ (د) صفر

(١٦) $\frac{ء}{ءس}$ ($ص^{٥}$) = ...

(أ) ٥ $ص^{٤}$ (ب) ٥ $ص^{٤}$ صَ (جـ) $ص^{٥}$ صَ (د) $\frac{٥ ص^{٤}}{صَ}$

(١٧) ص = جا ٢ س فإن : $\frac{ءص}{ءس}$ عند س = $\frac{\pi}{٦}$ = ...

(أ) ٢ (ب) ١ (جـ) $\frac{١}{٢}$ (د) $\sqrt{٣}$

(١٨) ميل المماس لمنحنى الدالة د حيث د (س) = ٣ $س^{٢}$ + ٢ س − ١ عندما س = ٢ تساوى ....

(أ) ٤ (ب) ٨ (جـ) ١٨ (د) ١٤

(١٩) $\int \frac{س^{٢} + ٣ س}{س}$ ءس = ...

(أ) س + ٣

(ب) $\frac{١}{٢}$ $س^{٢}$ + ٣ س + ث

(جـ) $س^{٢}$ + ٣ س + ث

(د) $\frac{س^{٣} + ٢ س^{٢}}{س^{٢}}$

(٢٠) جا ١٠٥ جتا ١٥ − جتا ١٠٥ جا ١٥ = ...

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) صفر (د) $\sqrt{٢}$

(٢١) المثلث الذى محيطه = ١٢ سم ومساحته = ٦ سم^{٢} يكون طول نصف قطر الدائرة التى تمس جميع أضلاعه من الداخل = ... سم

(أ) ١ (ب) $\frac{١}{٢}$ (جـ) ٢ (د) ٥

(٢٢) من نقطة معينة تحركت سفينة فى اتجاه ٦٠° شمال الغرب بسرعة ٢٦ كم/س وفى نفس اللحظة ومن نفس المكان تحركت سفينة أخرى فى اتجاه الشرق بسرعة ١٥ كم/س فإن البعد بين السفينتين بعد ٣ ساعات = ... (لأقرب كم)

(أ) ١٠٥ (ب) ١٠٨ (جـ) ٦٩ (د) ٦٨

(٢٣) جا أ = $\frac{-٣}{٥}$ فإن : جتا ٢ أ = ...

(أ) $\frac{١٧}{٢٥}$ (ب) $\frac{٧}{٢٥}$ (جـ) $\frac{٨}{٥}$ (د) $\frac{-٧}{٢٥}$

(٢٤) ١ + جتا ٢ س = ...

(أ) ٢ جا س (ب) ٢ جتا^{٢} س

(جـ) ٢ ظا^{٢} س (د) ٢ ظا س جتا س

(٢٥) $\frac{\text{ظا س}}{\text{١ - ظا}^{٢}\text{ س}} = \frac{٥}{٢}$ فإن : ظا ٢ س = ...

(أ) $\frac{٥}{٢}$ (ب) ٥ (جـ) $\frac{٢}{٥}$ (د) ٢

(٢٦) جا أ = $\frac{٣}{٥}$ ، ظا ب = $\frac{٥}{١٢}$ ، أ ، ب زاويتان حادتان موجبتان فإن : جتا (أ - ب) = ...

(أ) $\frac{٦٣}{٦٥}$ (ب) $\frac{٣٣}{٦٥}$ (جـ) $\frac{٥٦}{٦٥}$ (د) $\frac{١٦}{٦٥}$

(٢٧) مساحة المثلث الذى أطوال أضلاعه ٣ سم ، ٣ سم ، ٤ سم تساوى .... سم^{٢}

(أ) ٢٠ (ب) ٤ $\sqrt{٥}$ (جـ) ٢ $\sqrt{٥}$ (د) ١٠

ثانيًا الأسئلة المقالية

أجب عن السؤالين الآتيين :

١ أوجد مجموع المتسلسلة الهندسية : ١ + ٣ + ٩ + ... + ٦٥٦١

---

٢ ص = (٥ س^{٣} + ٣)^{٧} أوجد : $\frac{\text{ء ص}}{\text{ء س}}$



إدارة المنيا
توجيه الرياضيات

١٣ محافظة المنيا

أولا أسئلة الاختيار من متعدد

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

① الحد الخالى من س فى المتتابعة (٨ - ٦ س ، ٧ - ٤ س ، ٦ - ٢ س ، ...) هو ....

(أ) $ح_٧$ (ب) $ح_٦$ (جـ) $ح_٥$ (د) $ح_٤$

② عدد طرق اختيار وجبه ومشروب من قائمة بها ٥ وجبات و ٤ مشروبات هى ....

(أ) ٩ (ب) ٢٠ (جـ) ٥ (د) ١

③ إذا كان متوسط التغير فى الدالة د يساوى ٢,٤ عندما تتغير س من ٣ إلى ٣,٢ فإن التغير فى د يساوى ....

(أ) ٠,٣٢ (ب) ٠,٤٨ (جـ) ٣,٦ (د) ٧,٢

④ نظر طفل من نقطة على سطح الأرض إلى قمة برج ارتفاعه ٥٠ متر فإذا كان الطفل يبعد ٥٠ $\sqrt{٣}$ متر عن قاعدة البرج فإن قياس زاوية ارتفاع قمة البرج = ...°

(أ) ٤٥ (ب) ١٢٠ (جـ) ٦٠ (د) ٣٠

⑤ إذا كانت د : د (س) = $\begin{cases} س^٢ + أ & ، س \leq ٢ \\ أ س + ب & ، س > ٢ \end{cases}$ قابلة للاشتقاق عند س = ٢

فإن : أ + ب = ...

(أ) ٤ (ب) -٤ (جـ) ٨ (د) -٨

⑥ إذا كان : $^{ن}ق_{١٠} > ^{ن}ق_٩$ فإن : ن ١٩

(أ) = (ب) < (جـ) > (د) ≥

⑦ إذا كانت (أ ، ب ، حـ ، ...) متتابعة هندسية وكانت (أ ، أ + ب ، أ + حـ ، ...) متتابعة حسابية فإن أ : ب : حـ = ...

(أ) ١ : ٣ : ٥ (ب) ١ : ٢ : ٤ (جـ) ١ : ٢ : ٣ (د) ١ : ٤ : ١٦

⑧ إذا كان : ن $\lfloor$٢ ن - ١ = ٦٠ فإن : ن = ...

(أ) ٢ (ب) ٢,٥ (جـ) ٤ (د) ٥

(٩) إذا كانت : ص = $\frac{ع + ٣}{ع - ١}$ ، ع = $\frac{س + ١}{س - ٣}$ فإن : $\frac{ءص}{ءس}$ = ... عند س = ٤

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) ٢ (د) ٣

(١٠) ثلاث قرى أ ، ب ، حـ تقع القرية أ غرب القرية ب حيث أب = ٢٠ كم وتقع القرية حـ فى اتجاه °٤٨ شرق الشمال من القرية أ ، °٦٠ شمال الغرب من القرية ب فإن المسافة بين القريتين ب ، حـ ≃ .... م

(أ) ١٣ (ب) ١٤ (جـ) ١٥ (د) ١٦

(١١) ∫ (س - ٥) (س + ١) ءس = ... + ث

(أ) $\frac{١}{٣}$ س^٣ - ٢ س^٢ - ٥ س (ب) س^٣ - ٢ س^٢ - ٥ س

(جـ) $\frac{٢}{٣}$ س^٣ - ٢ س^٢ + ٥ س (د) $\frac{١}{٣}$ س^٣ - ٢ س^٢ + ٥ س

(١٢) إذا كان : $^{ن-م}ل_٢$ = ٢١٠ ، $^{ن+م}ق_٤$ = ٧١٥ فإن : م × ن = ...

(أ) ١٥ (ب) ٣٠ (جـ) ٣٥ (د) ٥٠

(١٣) متتابعة هندسية حدودها موجبة ، $ح_٣ + ح_٤ = ٦ ح_٢$ ، $ح_٧ = ٣٢٠$

فإن المتتابعة هى ....

(أ) (٢ ، ١٠ ، ٢٠ ، ...) (ب) (٢٤ ، ١٦ ، ٨ ، ...)

(جـ) (٣ ، ١٥ ، ٧٥ ، ...) (د) (٥ ، ١٠ ، ٢٠ ، ...)

(١٤) إذا كان : $^{ن}ق_٢$ = ١٢٠ فإن : $^{ن}ق_{ن-٨}$ = ...

(أ) ٩٠ (ب) ٦٠ (جـ) ٤٥ (د) ٣٠

(١٥) إذا كان : د (س) = س^٣ - أ س + ١ ، ر (س) = أ س^٢ + ب س + ٣

وكان : ٢ دَ (١) + رَ (١) = ٢ فإن : ب = ...

(أ) -٤ (ب) -٣ (جـ) ٣ (د) ٤

(١٦) $\frac{طا °٥٠ + طا °١٠}{١ - طا °٥٠ طا °١٠}$ = ...

(أ) طا °٤٠ (ب) طا °٦٠

(جـ) طا °٥٠ × طا °١٠ (د) ٢ طا °٥٠ طا °١٠

(١٧) إذا كان : $\sum_{ر=١}^{ن}$ (ر) = ١٣٦ فإن : $\sum_{ر=١}^{ن}$ (٤ ر) = ...

(أ) ١٤٠ (ب) ٥٤٤ (جـ) ٢٧٢ (د) ٣٤

(١٨) ١ – ٢ حا^{٢} ٥٠° = ...

(أ) حا ١٠٠° (ب) حتا ٥٠° (جـ) حتا ١٠٠° (د) حتا ٥٠°

(١٩) إذا كان : ^{١٢}ق$_{ر٢}$ = ^{١٢}ق$_{ر٢ ر٢}$ فإن : ر ∈ ....

(أ) {٠ ، ٢} (ب) {٠ ، –٢}

(جـ) {٢ ، –٢} (د) {٠ ، ٢ ، –٢}

(٢٠) فى المتتابعة الحسابية (١٢ ، ١٤ ، ١٦ ، ...) فإن رتبة الحد الذى قيمته ١٠٢ هو ....

(أ) ح$_{٢٦}$ (ب) ح$_{٤٨}$ (جـ) ح$_{٤٦}$ (د) ح$_{٤٥}$

(٢١) $\frac{ء}{ءس}$ (حتا^{٢} س + حا^{٢} س) = ...

(أ) ١ (ب) صفر

(جـ) س (د) ٢ (حتا س + حا س)

(٢٢) مجموعة حل المعادلة : حا س حتا ٤٥° – حتا س حا ٤٥° = $\frac{١}{٢}$ حيث ٠° < س < ٣٦٠°

تساوى ....

(أ) {٣٠° ، ١٥٠°} (ب) {٣٠°}

(جـ) {٧٥° ، ١٩٥°} (د) {٧٥° ، ١٠٥°}

(٢٣) قيمة ح$_{١٥}$ من النهاية فى المتتابعة الحسابية (١٩ ، ١٥ ، ١١ ، ... ، –٦١)

تساوى ....

(أ) –٨ (ب) –٥ (جـ) –١ (د) –٣٧

(٢٤) Δ أ ب حـ فيه : حتا أ = $\frac{-٣}{٥}$ ، حا ب = $\frac{٥}{١٣}$ فإن : حا حـ = ...

(أ) $\frac{٣٢}{٦٥}$ (ب) $\frac{١٧}{٦٥}$ (جـ) $\frac{٣٣}{٦٥}$ (د) $\frac{٣}{١٣}$

(٢٥) إذا كان : $\frac{طا س}{١ - طا^{٢} س}$ = $\frac{٥}{٢}$ فإن : طا ٢ س = ...

(أ) $\frac{٥}{٢}$ (ب) ٥ (جـ) $\frac{٢}{٥}$ (د) ٢

(٢٦) مجموع ٣٠ حدًا الأولى من المتتابعة $(ح_ن)$ حيث $ح_ن = ٢ن + ٣$ هو ....

(أ) ١٠٠٠ (ب) ١٠٢٤ (جـ) ١٠٢٠ (د) ١٠١٠

(٢٧) مساحة سطح المثلث الذى أطوال أضلاعه ٦ سم ، ٨ سم ، ١٠ سم

تساوى .... $سم^٢$

(أ) ٢٤ (ب) ٣٠ (جـ) ٤٠ (د) ٤٨

ثانيا الأسئلة المقالية

أجب عن السؤالين الآتيين :

١ إذا كان الوسط الهندسى بين س + ٢ ، ص − ٦ هو ٥ والوسط الحسابى بين س ، ص هو ٧ فأوجد : قيمة كل من س ، ص

---

٢ أوجد النقط الواقعة على المنحنى : $ص = س^٣ - ٣س^٢ - ٥س + ١٢$ والتى يكون عندها المماس للمنحنى موازيًا المستقيم المار بالنقطتين (٣ ، ١) ، (٥ ، ٩)

١٤ محافظة أسيوط

إدارة أبنوب
توجيه الرياضيات

أولا أسئلة الاختيار من متعدد

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) أكبر مجموع لحدود المتتابعة الحسابية (٣٣ ، ٣١ ، ٢٩ ، ...) يساوى ....

(أ) ٢٨٠ (ب) ٢٨٩ (جـ) ٢٩٠ (د) ٢٩٨

(٢) إذا كان : $س \in ح^+$ ، $س \neq ١$ فإن : $س + \frac{١}{س} >$ ....

(أ) ٢ (ب) ٣ (جـ) ٤ (د) ٥

(٣) $^{ن}ل_ر \times$ .... $= {}^{ن+١}ل_{ر+١}$

(أ) ن (ب) ن − ١ (جـ) ن + ١ (د) ن + ٢

(٤) إذا كان : $^{ن}ق_{ن-٢} = ١٠$ فإن : ن = ...

(أ) ٣ (ب) ٥ (جـ) ١٠ (د) ٢٠

(٥) مجموعة حل المعادلة : جاس جتا ٦٠ − جتاس جا ٦٠ = $\frac{١}{٢}$ حيث صفر < س < ٣٦٠ هى ....

(أ) {٣٠ ، ١٥٠} (ب) {٩٠ ، ٢١٠}
(جـ) {٧٥ ، ١٩٥} (د) {٧٥ ، ١٠٥}

(٦) مساحة سطح المثلث الذى أطوال أضلاعه ١٥ ، ١٢ ، ٩ سم تساوى .... سم^٢

(أ) ٤٨ (ب) ٥٤ (جـ) ٧٢ (د) ٩٠

(٧) إذا كان : ص = ظا^٢ س فإن : صَ = ...

(أ) $\frac{\text{ظا ٢ س}}{٢}$ (ب) ٢ ظا س (جـ) ٢ ظا س قا^٢ س (د) ٣ قا^٤ ٣ س

(٨) أصغر عدد من الحدود يمكن أخذه من المتتابعة (٨٩ ، ٨١ ، ٧٣ ، ...) ابتداء من الحد الأول ليكون المجموع سالبًا هو ....

(أ) ٢٣ (ب) ٢٤ (جـ) ٢٥ (د) ٢٦

(٩) عدد طرق انتخاب لجنة مكونة من ٣ رجال وسيدتين من بين ٤ رجال ، ٣ سيدات هو ....

(أ) ٢ (ب) ٥ (جـ) ٧ (د) ١٢

(١٠) عدد طرق تكوين عدد مكون من رقمين من الأرقام {١ ، ٢ ، ٠ ، ٣} هى ....

(أ) ٨ (ب) ٩ (جـ) ١٢ (د) ١٦

(١١) معادلة المماس للمنحنى : ص = $\frac{١}{\text{س}^٢}$ عند النقطة الواقعة على المنحنى والتى إحداثيها = −١ هى ....

(أ) ص = ٢ س − ٣ (ب) ص = ٢ س + ٣
(جـ) ص = ٣ س + ٢ (د) س = ٢ ص + ٣

(١٢) ∫ (جتا^٢ ٢ س + جا^٢ ٢ س + ظا^٢ ٢ س) ءس = ... + ث

(أ) ٠,٥ ظا ٢ س (ب) ٠,٥ قا^٢ ٢ س (جـ) ظا ٢ س (د) قا^٢ ٢ س

(١٣) من نقطة على سطح الأرض رصد رجل قمة برج فوجد أن قياس زاوية ارتفاعه ٣٢° ثم سار مبتعدًا عن البرج مسافة ٥٠ مترًا فوجد أن قياس زاوية ارتفاع قمة البرج أصبح ٢٧° فإن ارتفاع البرج عن سطح الأرض = ... متر.

(أ) ١٣٨ (ب) ١٨٠ (جـ) ٢٢٠ (د) ٢٦٠

(١٤) إذا كان : طا أ = $\frac{٣}{٤}$ ، طا ب = $\frac{١٢}{٥}$ حيث أ ، ب قياسا زاويتين حادتين

فإن : جا (أ + ب) = ...

(أ) $\frac{-٣٣}{٦٥}$ (ب) $\frac{٥٦}{٦٥}$ (جـ) $\frac{٦٣}{٦٥}$ (د) −١

(١٥) متتابعة هندسية مجموع ن حدًا الأولى منها يعطى بالعلاقة : حـ$_{ن}$ = ٣$^{ن+١}$ − ٣

فإن الحد الثالث منها يساوى ....

(أ) ١٨ (ب) ٢٣ (جـ) ٥٤ (د) ٧٧

(١٦) متتابعة هندسية حدها الأول يساوى مجموع الحدود التالية إلى ما لانهاية فإن أساس هذه المتتابعة يساوى ....

(أ) ٠,٢٥ (ب) ٠,٣٣٣ (جـ) ٠,٤ (د) ٠,٥

(١٧) مجموعة حل المعادلة : $\left|ن - ٣\right|$ = ١ فى ح هى ....

(أ) {صفر ، ١} (ب) {٤} (جـ) {٣ ، ٤} (د) {١}

(١٨) ∫ (جتا^{٢} س − جا^{٢} س) ء س = ... + ث

(أ) جا ٢ س (ب) جتا ٢ س (جـ) $\frac{\text{جا ٢ س}}{٢}$ (د) $\frac{\text{جتا ٢ س}}{٢}$

(١٩) إذا كان متوسط التغير فى الدالة د يساوى ٦ عندما تتغير س من ٢ إلى ٤ ، د (٢) = ٧

فإن : د (٤) = ...

(أ) −٤ (ب) ٧ (جـ) ١٣ (د) ١٩

(٢٠) (جا س جتا س) (١ − جا^{٢} س) (١ + ظا^{٢} س) = ...

(أ) جا ٢ س (ب) جتا ٢ س (جـ) $\frac{\text{جا ٢ س}}{٢}$ (د) $\frac{\text{جتا ٢ س}}{٢}$

(٢١) إذا كان : جا ٢ س = $\frac{٥}{١٢}$ فإن : ظا س + ظتا س = ...

(أ) $\frac{١٩}{٥}$ (ب) $\frac{٢٤}{٥}$ (جـ) ٥ (د) $\frac{٢٦}{٥}$

(٢٢) متتابعة حسابية مكونة من ٩٩ حدًا ، إذا كان مجموع الحدود الفردية الرتبة ٢٥٥٠

فإن مجموع جميع حدودها = ...

(أ) ٥٠٤٩ (ب) ٥٠٥٠ (جـ) ٥١٠٠ (د) ٥٤٠٩

(٢٣) إذا كان : (ح$_{ن}$) متتابعة حسابية حيث ح$_{ن}$ = ٢ + ٣ ن فإن الوسط الحسابى بين الحدين ح$_{٥}$ ، ح$_{١١}$ يساوى ....

(أ) ١٦ (ب) $\frac{٣٧}{٢}$ (جـ) ٢٢ (د) ٢٦

(٢٤) إذا كان : $^{ن}ق_{٧} = {^{ن}ق_{٨}}$ فإن : $^{١٥}ق_{ن}$ = ...

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) ١٤ (د) ١٥

(٢٥) إذا كان : د (س) = | س − ٢ | فإن : دَ ($^{-}٢$) = ...

(أ) ١ (ب) صفر (جـ) −١ (د) −٢

(٢٦) إذا كان : جا $\frac{أ}{٢} = \frac{٤}{٥}$ فإن : جتا $\frac{أ}{٢}$ = ...

(أ) $\frac{٣}{٥}$ (ب) $\frac{١}{٥}$ (جـ) ± ٠,٦ (د) $\frac{٤}{٥}$

(٢٧) إذا كان : س قياس زاوية حادة ، ظا س = ٠,٥ فإن : $\frac{١ - جتا ٢ س}{١ + جتا ٢ س}$ = ...

(أ) ٠,٢٥ (ب) ٠,٤ (جـ) ٠,٥ (د) ٠,٧٥

ثانيا الأسئلة المقالية

أجب عن السؤالين الآتيين :

١ عند إدخال ن من الأوساط الهندسية بين : ٢٤٣ ، $\frac{١}{٢٤٣}$ كان مجموع الوسطين الأولين ١٠٨ ، مجموع الوسطين الأخيرين $\frac{٤}{٨١}$ أوجد هذه الأوساط الهندسية ؟

---

٢ أوجد معادلة العمودى على المماس للمنحنى : ص = $\frac{س + ٣}{س + ١}$ عند النقطة الواقعة على المنحنى والتى احداثيها السينى = ١

١٥ محافظة قنا

إدارة نجع حمادى
توجيه الرياضيات

محافظة قنا

أولا أسئلة الاختيار من متعدد

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) عدد طرق ترتيب ٥ أشخاص في خمسة مقاعد على شكل دائرة = ...

(أ) ١ (ب) ٥ (جـ) ٢٤ (د) ١٢٠

(٢) إذا كانت : (٢٩ ، س ، ... ، ٣ س ، ٩٥) متتابعة حسابية فإن : س = ...

(أ) ٢٠ (ب) ٧ (جـ) ٣١ (د) ١٥

(٣) ∫ ٣ س^{٥} ء س = ...

(أ) ٣ س^{٤} + ث (ب) $\frac{١}{٢}$ س^{٦} + ث (جـ) ١٥ س^{٤} + ث (د) ١٨ س^{٦} + ث

④ قيمة المفكوك : $\sum_{ر=١}^{٧}$ (٣ − ٢ ر + ر^{٢}) = ...

(أ) ١٢٧ (ب) ١٠٥ (جـ) ١٢٣ (د) ٣٢٨

⑤ ١ + جتا ٤ س = ...

(أ) ٢ جتا^{٢} ٤ س (ب) جتا^{٢} ٢ س (جـ) جتا^{٢} ٤ س (د) ٢ جتا^{٢} ٢ س

⑥ إذا كان : ن−٣ ق$_{٢}$ = ٣٥ فإن : ن = ...

(أ) ٣ (ب) ٥ (جـ) ١٠ (د) ٧

⑦ إذا كان : س ص = ١ فإن : $\frac{ءص}{ءس}$ = ... عند س = ٣

(أ) ٩ (ب) صفر (جـ) $\frac{٤}{٧}$ (د) $\frac{-١}{٩}$

⑧ عددان الوسط الحسابى لهما ٢٥ ووسطهما الهندسى هو ٢٠ فما هما العددان ؟

(أ) ١٠ ، ٤٠ (ب) ١٥ ، ٣٥ (جـ) ٢٤ ، ٢٦ (د) ٣٠ ، ٢٠

⑨ ما عدد الطرق التى يمكن بها تكوين لجنة مكونة من ٣ رجال وسيدتين من بين ٦ رجال و ٥ سيدات ؟

(أ) ١٠٠ (ب) ٥٠ (جـ) ٢٠٠ (د) ٢٥٠

⑩ التغير للدالة د : د (س) = ٢ س^{٢} − ٣ س عندما تتغير س من ٣ إلى ٣,٢ هو ....

(أ) ١١ (ب) ١,٧ (جـ) ١,٨٨ (د) ١٢,٧

⑪ رتبة أول حد سالب من حدود المتتابعة : (ح$_{ن}$) = (١٥٢ − ٩ ن) هو ....

(أ) ١٧ (ب) ١٦ (جـ) ١٨ (د) ١٩

⑫ ∠ س ، ∠ ص زاويتان متكاملتان فإن قيمة المقدار : جتا س جتا ص − جا س جا ص = ...

(أ) ١ (ب) صفر (جـ) −١ (د) ١٨٠

⑬ ∫ (٢ س + ٣)^{٥} ء س = ...

(أ) (٣ س + ٢)^{٦} (ب) $\frac{١}{١٢}$ (٢ س + ٣)^{٦} + ث

(جـ) ٥ (٢ س + ٣)^{٦} + ث (د) ٦ (٢ س + ٣)^{٦} + ث

(١٤) إذا كان : ^{9}ل$_{ر-١}$ = ٥٠٤ فإن : قيمة ر = ...

(أ) ٣ (ب) ٥ (جـ) ٤ (د) ٧

(١٥) إذا كان : طا س = $\frac{٥}{١٢}$ حيث (٠° < س < ٩٠°) ، جا ص = $-\frac{٣}{٥}$

حيث (١٨٠° < ص < ٢٧٠°) فإن قيمة : جا (س + ص) ≈ ....

(أ) ٣ (ب) −٠,٨٦ (جـ) ٠,٦٨ (د) ٠,٨٦

(١٦) متتابعة حسابية حدها الأول ١٢ وحدها الأخير يساوى −٢٦ ومجموع حدودها يساوى −١٤٠ فإن حدها السابع هو ....

(أ) ١٥ (ب) صفر (جـ) −٥ (د) −٧

(١٧) النقط الواقعة على المنحنى : ص = ٣ س^{٢} − ٦ س والتى يكون عندها المماس موازيًا لمحور السينات هى ....

(أ) (١ ، −٥) (ب) (٠ ، −٣) (جـ) (١ ، −٣) (د) (٢ ، ٣)

(١٨) قيمة ن إذا كان : ^{ن}ل$_{٤}$ = ٤٢ × ${}^{ن-٢}$ل$_{٢}$ تساوى ....

(أ) ٨ (ب) ٥ (جـ) ٦ (د) ٧

(١٩) $\frac{ء}{ء س}$ (جا س جتا س) = ...

(أ) جا س (ب) جتا س (جـ) $\frac{١}{٢}$ جتا س (د) جتا ٢ س

(٢٠) مجموع حدود المتتابعة الهندسية : (٨١ ، ٢٧ ، ٩ ، ....)

(أ) $\frac{٢٤٣}{٤}$ (ب) ١١٧ (جـ) ١١٨ (د) $\frac{٢٤٣}{٢}$

(٢١) المقدار : $\frac{\text{جا ٢ س}}{\text{١ + جتا ٢ س}}$ فى أبسط صورة يساوى ....

(أ) طا ٢ س (ب) طا ٤ س (جـ) طا س (د) ٢ طا س

(٢٢) من قمة منزل ارتفاعه ٢٥ مترًا كان قياس زاوية ارتفاع قمة برج ٧٠° ، وقياس زاوية انخفاض قاعدة البرج ٣٠° فإن ارتفاع البرج ≈ .... متر علمًا بأن قاعدتى البرج والمنزل فى مستوى أفقى واحد.

(أ) ١٥٠ (ب) ١٢٠ (جـ) ١٤٤ (د) ١٢٧

(٢٣) إذا كان : $^{٢٨}ق_{ر} = {}^{٢٨}ق_{٢ر - ٥}$ فإن : قيمة ر = ...

(أ) ٥ (ب) ١١ (جـ) ٢٤ (د) ١١ أ، ٥

(٢٤) إذا كان : $\frac{ظا س}{١ - ظا^{٢} س} = \frac{٧}{٢}$ فإن : ظا ٢ س = ...

(أ) ٢ (ب) ٣ (جـ) ٧ (د) $\frac{١}{٧}$

(٢٥) إذا كان : حا س + حتا س = $\frac{٤}{٣}$ فإن : حا ٢ س = ...

(أ) ١,٦ (ب) ٣ (جـ) $\frac{٧}{٩}$ (د) $\frac{١}{٧}$

(٢٦) متتابعة هندسية فيها : $ح_{ن+١} = ٣ ح_{ن}$ ، $ح_{٢} = ٦$ فإن مجموع السبعة حدود الأولى منها يساوى ....

(أ) ٢١٧٨ (ب) ٢١٨٦ (جـ) ٣١٨٦ (د) ٢١٨٩

(٢٧) فى المثلث أ ب حـ إذا كان : ع - أ = ١٠ سم ، ع - ب = ٣ سم ، ع - حـ = ٢ سم حيث : ع (نصف محيط المثلث) فإن مساحة المثلث = ... $سم^{٢}$

(أ) ٢٥ (ب) ٣٠ (جـ) ٣٥ (د) ١٢٠

ثانيًا الأسئلة المقالية

أجب عن السؤالين الآتيين :

١ $(ح_{ن})$ متتابعة حسابية فيها : $ح_{٢} + ح_{٣} = ١٢$ ، $ح_{١٠} = ٢١$

أوجد المتتابعة ثم أوجد مجموع العشرين حدًا الأولى منها

---

٢ إذا كانت : ص = $ع^{٢} - ٣ ع$ ، $ع = ٣ س^{٢} - ٥ س$ **فأوجد :** $\frac{ءص}{ءس}$ عند س = ٢

الإجابات



إجابات الاختبارات التراكمية في الجبـــر

الاختبـــار الأول

(١) ب (٢) د (٣) د (٤) جـ
(٥) ب (٦) أ (٧) ب (٨) جـ
(٩) د (١٠) ب (١١) أ (١٢) ب

الاختبـــار الثانى

(١) ب (٢) ب (٣) ب (٤) جـ
(٥) جـ (٦) د (٧) جـ (٨) د
(٩) أ (١٠) ب (١١) جـ (١٢) جـ

الاختبـــار الثالث

(١) جـ (٢) أ (٣) جـ (٤) جـ
(٥) د (٦) جـ (٧) ب (٨) جـ
(٩) جـ (١٠) د (١١) ب (١٢) جـ

الاختبـــار الرابع

(١) جـ (٢) ب (٣) ب (٤) أ
(٥) أ (٦) أ (٧) أ (٨) جـ
(٩) د (١٠) جـ (١١) ب (١٢) جـ

الاختبـــار الخامس

(١) جـ (٢) د (٣) د (٤) ب
(٥) أ (٦) ب (٧) أ (٨) ب
(٩) جـ (١٠) جـ (١١) د (١٢) ب

الاختبـــار السادس

(١) د (٢) ب (٣) أ (٤) جـ
(٥) د (٦) ب (٧) ب (٨) د
(٩) جـ (١٠) أ (١١) جـ (١٢) د

الاختبـــار السابع

(١) جـ (٢) أ (٣) أ (٤) د
(٥) أ (٦) د (٧) ب (٨) ب
(٩) ب (١٠) ب (١١) ب (١٢) جـ

الاختبـــار الثامن

(١) جـ (٢) ب (٣) جـ (٤) ب
(٥) جـ (٦) د (٧) أ (٨) ب
(٩) د (١٠) جـ (١١) جـ (١٢) أ

إجابات الاختبارات التراكمية في التفاضل والتكامل

الاختبـــار الأول

(١) ب (٢) ب (٣) أ (٤) د
(٥) أ (٦) جـ (٧) د (٨) جـ
(٩) أ (١٠) ب (١١) ب (١٢) ب

الاختبـــار الثانى

(١) أ (٢) أ (٣) ب (٤) جـ
(٥) د (٦) ب (٧) ب (٨) جـ
(٩) أ (١٠) د (١١) أ (١٢) د

الاختبـــار الثالث

(١) د (٢) ب (٣) ب (٤) ب
(٥) أ (٦) ب (٧) أ (٨) د
(٩) جـ (١٠) د (١١) جـ (١٢) ب

الاختبـــار الرابع

(١) جـ (٢) أ (٣) ب (٤) ب
(٥) أ (٦) ب (٧) ب (٨) د
(٩) أ (١٠) أ (١١) أ (١٢) ب

الاختبـــار الخامس

(١) ب (٢) ب (٣) د (٤) ب
(٥) جـ (٦) جـ (٧) د (٨) جـ
(٩) جـ (١٠) ب (١١) ب (١٢) جـ

الاختبـــار السادس

(١) د (٢) د (٣) د (٤) ب
(٥) أ (٦) د (٧) جـ (٨) أ
(٩) ب (١٠) أ (١١) د (١٢) أ

الاختبـــار السابع

(١) جـ (٢) أ (٣) جـ (٤) د
(٥) جـ (٦) د (٧) جـ (٨) د
(٩) جـ (١٠) د (١١) أ (١٢) د

إجابات الاختبارات التراكمية في حساب المثلثات

الاختبار الأول

(١) (أ) (٢) (جـ) (٣) (د) (٤) (جـ)
(٥) (جـ) (٦) (أ) (٧) (ب) (٨) (د)
(٩) (ب) (١٠) (د) (١١) (ب) (١٢) (أ)

الاختبار الثانى

(١) (أ) (٢) (أ) (٣) (أ) (٤) (أ)
(٥) (ب) (٦) (ب) (٧) (ب) (٨) (جـ)
(٩) (أ) (١٠) (أ) (١١) (جـ) (١٢) (جـ)

الاختبار الثالث

(١) (ب) (٢) (د) (٣) (ب) (٤) (ب)
(٥) (أ) (٦) (د) (٧) (جـ) (٨) (د)
(٩) (جـ) (١٠) (أ) (١١) (أ) (١٢) (ب)

الاختبار الرابع

(١) (أ) (٢) (جـ) (٣) (أ) (٤) (جـ)
(٥) (أ) (٦) (د) (٧) (جـ) (٨) (د)
(٩) (ب) (١٠) (جـ) (١١) (جـ) (١٢) (جـ)

إجابات اختبارات شهر مارس

نموذج ١

١

(١) (جـ) (٢) (جـ) (٣) (ب) (٤) (ب)
(٥) (أ) (٦) (د) (٧) (أ) (٨) (أ)
(٩) (جـ) (١٠) (ب) (١١) (ب) (١٢) (أ)

٢

① ∵ $أ = ٢٥$ ، $ء = -٢$ ، ∵ $ح_ن = ١٢٠$

∴ $\frac{ن}{٢}\left[٢ \times ٢٥ + (ن - ١) \times -٢\right] = ١٢٠$

∴ $\frac{ن}{٢}\left[٥٠ - ٢ن + ٢\right] = ١٢٠$

∴ $ن(٥٢ - ٢ن) = ٢٤٠$

∴ $٢ن^٢ - ٥٢ن + ٢٤٠ = ٠$

∴ $ن^٢ - ٢٦ن + ١٢٠ = ٠$

∴ $(ن - ٦)(ن - ٢٠) = ٠$

∴ $ن = ٦$ أو $ن = ٢٠$

∴ عدد الحدود اللازم أخذها = ٦ أو ٢٠

② فى Δ أحـء :

$\frac{أحـ}{جا ١١٢^\circ} = \frac{٥٠}{جا ٨^\circ}$

∴ أحـ = ٣٣٣ متر

فى Δ أب حـ :

∵ ق(∠أحـب) = ٣٠°

∴ أب = $\frac{١}{٢}$ أحـ = ١٦٧ متر

نموذج ٢

١

(١) (ب) (٢) (ب) (٣) (د) (٤) (ب)
(٥) (أ) (٦) (ب) (٧) (أ) (٨) (ب)
(٩) (أ) (١٠) (جـ) (١١) (أ) (١٢) (د)

٢

① ∵ $ع_١ + ع_٤ = ٧٠$ ∴ $أ + أ ر^٣ = ٧٠$

∴ $أ(١ + ر^٣) = ٧٠$ (١)

، ∵ $ع_٢ + ع_٣ = ٦٠$

∴ $أ ر + أ ر^٢ = ٦٠$

∴ $أ ر(١ + ر) = ٦٠$ (٢)

من (١) ، (٢) : $\frac{أ(١ + ر^٣)}{أ ر(١ + ر)} = \frac{٧٠}{٦٠}$

∴ $\frac{أ(١ + ر)(١ - ر + ر^٢)}{أ ر(١ + ر)} = \frac{٧}{٦}$

∴ $٦(١ - ر + ر^٢) = ٧ر$

∴ $٦ر^٢ - ١٣ر + ٦ = ٠$

∴ $(٢ر - ٣)(٣ر - ٢) = ٠$

∴ $ر = \frac{٣}{٢}$ (مرفوض لأن المتتابعة تناقصية)

أو $ر = \frac{٢}{٣}$

، من (١) : ∴ $أ = \frac{٧٠}{١ + (\frac{٢}{٣})^٣} = ٥٤$

∴ $ح_\infty = \frac{أ}{١ - ر} = \frac{٥٤}{١ - \frac{٢}{٣}} = ١٦٢$

② ∵ $د(س) = (٤س^٢ - ١)(٧س^٣ + س)$

∴ $د'(س) = ٨س(٧س^٣ + س) + (٤س^٢ - ١)(٢١س^٢ + ١)$

∴ $د'(١) = ٨ \times (٧ + ١) + (٤ - ١)(٢١ + ١)$

$= ١٣٠$

إجابات اختبارات شهر أبريل

نموذج ١

١

① (أ)　② (جـ)　③ (ب)　④ (جـ)
⑤ (أ)　⑥ (د)　⑦ (جـ)　⑧ (د)
⑨ (أ)　⑩ (د)　⑪ (أ)　⑫ (ب)

٢

① عدد طرق اختيار الرقم فى خانة الآحاد = ٢ طريقة

عدد طرق اختيار الرقم فى خانة العشرات = ٤ طريقة

عدد طرق اختيار الرقم فى خانة المئات = ٣ طريقة

∴ عدد طرق تكوين العدد الزوجى = ٢ × ٤ × ٣

= ٢٤ طريقة

② ∵ جتا س − ٢ جا^{٢} $\frac{س}{٢}$ = ٠

∴ جتا س − (١ − جتا س) = ٠

∴ ٢ جتا س − ١ = ٠

∴ جتا س = $\frac{١}{٢}$ (موجبة)

∴ س تقع فى الربع الأول أو الرابع

، ∵ قياس الزاوية الحادة التى جيب تمامها

يساوى $\frac{١}{٢}$ هى ٦٠°

∴ س = ٦٠° أ، س = ٣٦٠° − ٦٠° = ٣٠٠°

∴ مجموعة الحل = {٦٠°، ٣٠٠°}

نموذج ٢

١

① (د)　② (ب)　③ (جـ)　④ (ب)
⑤ (جـ)　⑥ (جـ)　⑦ (جـ)　⑧ (جـ)
⑨ (جـ)　⑩ (ب)　⑪ (د)　⑫ (جـ)

٢

① ∵ $^{ن-١}ل_{٣} : {}^{ن+١}ل_{٣} = ٥ : ١٢$

∴ $\frac{\underline{|ن-١}}{\underline{|ن-٤}} \div \frac{\underline{|ن+١}}{\underline{|ن-٢}} = \frac{٥}{١٢}$

∴ $\frac{\underline{|ن-١}}{\underline{|ن-٤}} \times \frac{\underline{|ن-٢}}{\underline{|ن+١}} = \frac{٥}{١٢}$

∴ $\frac{\underline{|ن-١}}{\underline{|ن-٤}} \times \frac{(ن-٢)(ن-٣)\underline{|ن-٤}}{(ن+١)(ن)\underline{|ن-١}} = \frac{٥}{١٢}$

∴ ١٢ (ن − ٢) (ن − ٣) = ٥ ن (ن + ١)

∴ ١٢ ن^{٢} − ٦٠ ن + ٧٢ = ٥ ن^{٢} + ٥ ن

∴ ٧ ن^{٢} − ٦٥ ن + ٧٢ = ٠

∴ (٧ ن − ٩) (ن − ٨) = ٠

∴ ن = $\frac{٩}{٧}$ (مرفوض) أ، ن = ٨

∴ $\underline{|ن-٣} = \underline{|٥} = ١٢٠$

② ∵ ص = ظا (π − $\frac{٣}{٤}$ س)

∴ صَ = $\frac{-٣}{٤}$ قا^{٢} (π − $\frac{٣}{٤}$ س)

∴ ميل المماس عند النقطة (π ، ١) يساوى $\frac{-٣}{٢}$

∴ ميل العمودى عند النقطة (π ، ١) يساوى $\frac{٢}{٣}$

∴ معادلة العمودى هى : $\frac{ص - ١}{س - π} = \frac{٢}{٣}$

أى أن : ٢ س − ٣ ص + ٣ = ٢ π

إجابات نماذج اختبارات الكتاب المدرسى فى الجبر

الاختبار الأول

١

① (أ)　② (أ)　③ (ب)　④ (جـ)

٢

(أ) ٣　(ب) ١٧ ، ١٢٠٨

٣

(أ) ٢٤

(ب) (٨ ، ٤ ، ٢ ، ....) ، ١٦

٤

(أ) ($\frac{٩}{٨}$ ، $\frac{٢٧}{١٦}$ ، $\frac{٨١}{٣٢}$ ، ....) ، $\frac{١١^{٣}}{١٢^{٢}}$

أ، ($\frac{٨١}{٣٢}$ ، $\frac{٢٧}{١٦}$ ، $\frac{٩}{٨}$ ، ....) ، $\frac{١٦}{٢٤٣}$

(ب) ١١٠٠ كرسى.

٥

(أ) ٩ ، ٢

(ب) ٣٦ ، (٨٣ ، ٧٩ ، ٧٥ ، ....)

الاختبار الثانى

١

① (جـ)　② (د)　③ (جـ)　④ (أ)

٢

(أ) ٢ أ، ٥　(ب) ١٧

٣

(أ) ٣٧ طريقة.

(ب) (٣٦ ، ٢٤ ، ١٦ ، ....) ، $\frac{٨٢٣٦}{٨١}$

٤

(أ) ١٠٦٤

(ب) لا يمكن ، ٧٦٣ طنًا

٥

(أ) ٤

(ب) الأوساط هى : (٧ ، ١٠ ، .... ، ٨٨) ، ١٤٢٥

إجابات نماذج اختبارات الكتاب المدرسى في التفاضل والتكامل وحساب المثلثات

الاختبار الأول

١

① (ب) ② (جـ) ③ (ب) ④ (ب)

٢

(أ) $٢\,\text{س}\,\text{جا}\,٢\,\text{س} + ٢\,\text{س}^{٢}\,\text{جتا}\,٢\,\text{س}$

(ب) أثبت بنفسك.

٣

(أ) -٦

(ب) ① $\frac{١}{٣}\,\text{س}^{٣} + \text{س}^{٢} + \text{ث}$

② $\text{س} + \frac{١}{٢}\,\text{جتا}\,٢\,\text{س} + \text{ث}$

٤

(أ) (٤ ، ١) ، (٢ ، −١) (ب) ١٤٤ م

الاختبار الثانى

١

① (د) ② (جـ) ③ (ب) ④ (د)

٢

(أ) ٢ (ب) $\frac{١٥}{١٢}$

٣

(أ) غير قابلة للاشتقاق.

(ب) $\frac{٣}{٢}\,\text{س} + \frac{١}{٤}\,\text{جا}\,٢\,\text{س} - ٢\,\text{جا}\,\text{س} + \text{ث}$

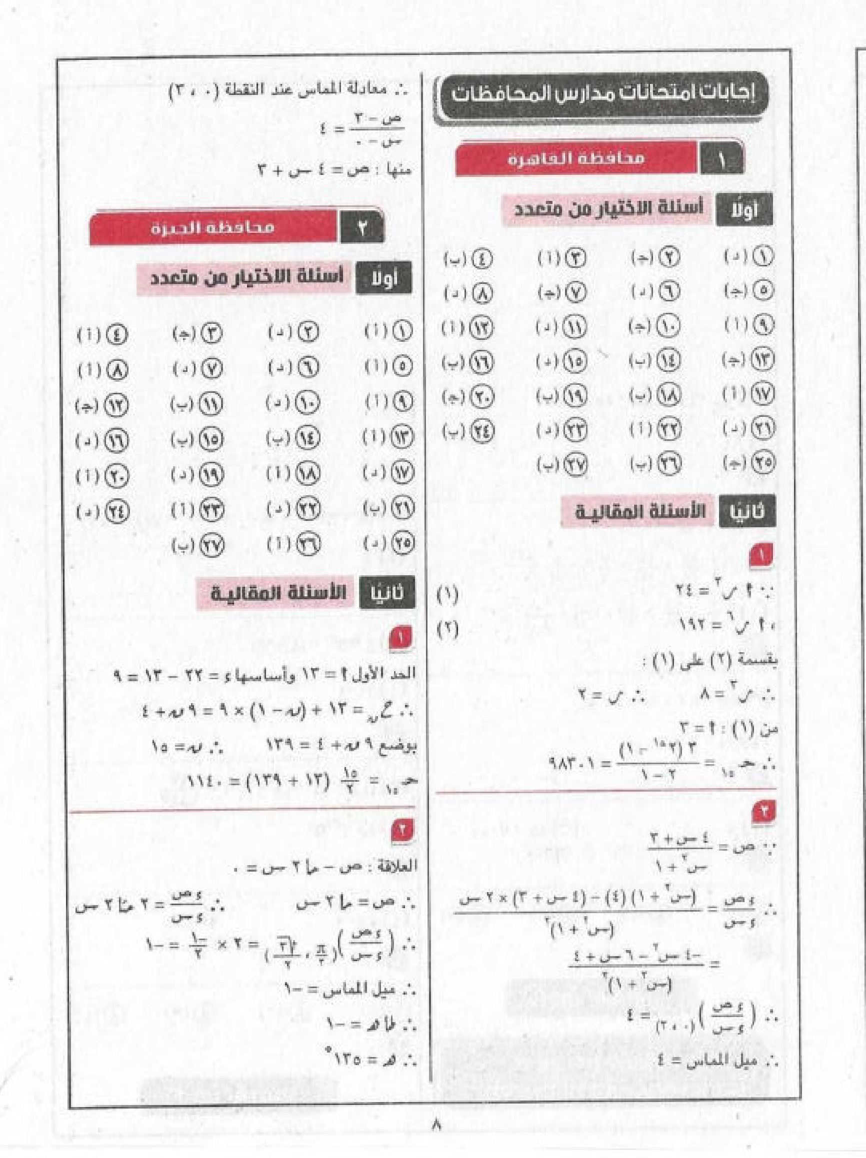
٤

(أ) ١٠٧,٨ كم (ب) ١٥

٥

(أ) −٧,٥

(ب) $\text{ص} = ٢\pi\,\text{س} - ٢\pi^{٢}$



إجابات امتحانات مدارس المحافظات

١ محافظة القاهرة

أولاً أسئلة الاختيار من متعدد

① (د) ② (جـ) ③ (أ) ④ (ب)
⑤ (جـ) ⑥ (د) ⑦ (جـ) ⑧ (د)
⑨ (أ) ⑩ (جـ) ⑪ (د) ⑫ (أ)
⑬ (جـ) ⑭ (ب) ⑮ (د) ⑯ (ب)
⑰ (أ) ⑱ (ب) ⑲ (ب) ⑳ (جـ)
㉑ (د) ㉒ (أ) ㉓ (د) ㉔ (ب)
㉕ (جـ) ㉖ (ب) ㉗ (ب)

ثانيًا الأسئلة المقالية

١

$\because \text{أ}\,\text{ر}^{٢} = ٢٤$ (١)

$\text{أ}\,\text{ر}^{٦} = ١٩٢$ (٢)

بقسمة (٢) على (١) :

$\therefore \text{ر}^{٣} = ٨ \qquad \therefore \text{ر} = ٢$

من (١) : $\text{أ} = ٣$

$\therefore \text{جـ}_{١٥} = \frac{٣\,(٢^{١٥} - ١)}{٢ - ١} = ٩٨٣٠١$

٢

$\because \text{ص} = \frac{٤\,\text{س} + ٣}{\text{س}^{٢} + ١}$

$\therefore \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{(\text{س}^{٢} + ١)(٤) - (٤\,\text{س} + ٣) \times ٢\,\text{س}}{(\text{س}^{٢} + ١)^{٢}}$

$= \frac{-٤\,\text{س}^{٢} - ٦\,\text{س} + ٤}{(\text{س}^{٢} + ١)^{٢}}$

$\therefore \left(\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}\right)_{(٠ ، ٣)} = ٤$

$\therefore$ ميل المماس = ٤

$\therefore$ معادلة المماس عند النقطة (٠ ، ٣)

$\frac{\text{ص} - ٣}{\text{س} - ٠} = ٤$

منها : $\text{ص} = ٤\,\text{س} + ٣$

٢ محافظة الجيزة

أولاً أسئلة الاختيار من متعدد

① (أ) ② (د) ③ (جـ) ④ (أ)
⑤ (أ) ⑥ (د) ⑦ (د) ⑧ (أ)
⑨ (أ) ⑩ (د) ⑪ (ب) ⑫ (جـ)
⑬ (أ) ⑭ (ب) ⑮ (ب) ⑯ (د)
⑰ (د) ⑱ (أ) ⑲ (د) ⑳ (أ)
㉑ (ب) ㉒ (د) ㉓ (أ) ㉔ (د)
㉕ (د) ㉖ (أ) ㉗ (ب)

ثانيًا الأسئلة المقالية

١

الحد الأول أ = ١٣ وأساسها ء = ٢٢ − ١٣ = ٩

$\therefore \text{ح}_{\text{ن}} = ١٣ + (\text{ن} - ١) \times ٩ = ٩\,\text{ن} + ٤$

بوضع $٩\,\text{ن} + ٤ = ١٣٩ \qquad \therefore \text{ن} = ١٥$

$\text{جـ}_{١٥} = \frac{١٥}{٢}\,(١٣ + ١٣٩) = ١١٤٠$

٢

العلاقة : $\text{ص} - \text{جا}\,٢\,\text{س} = ٠$

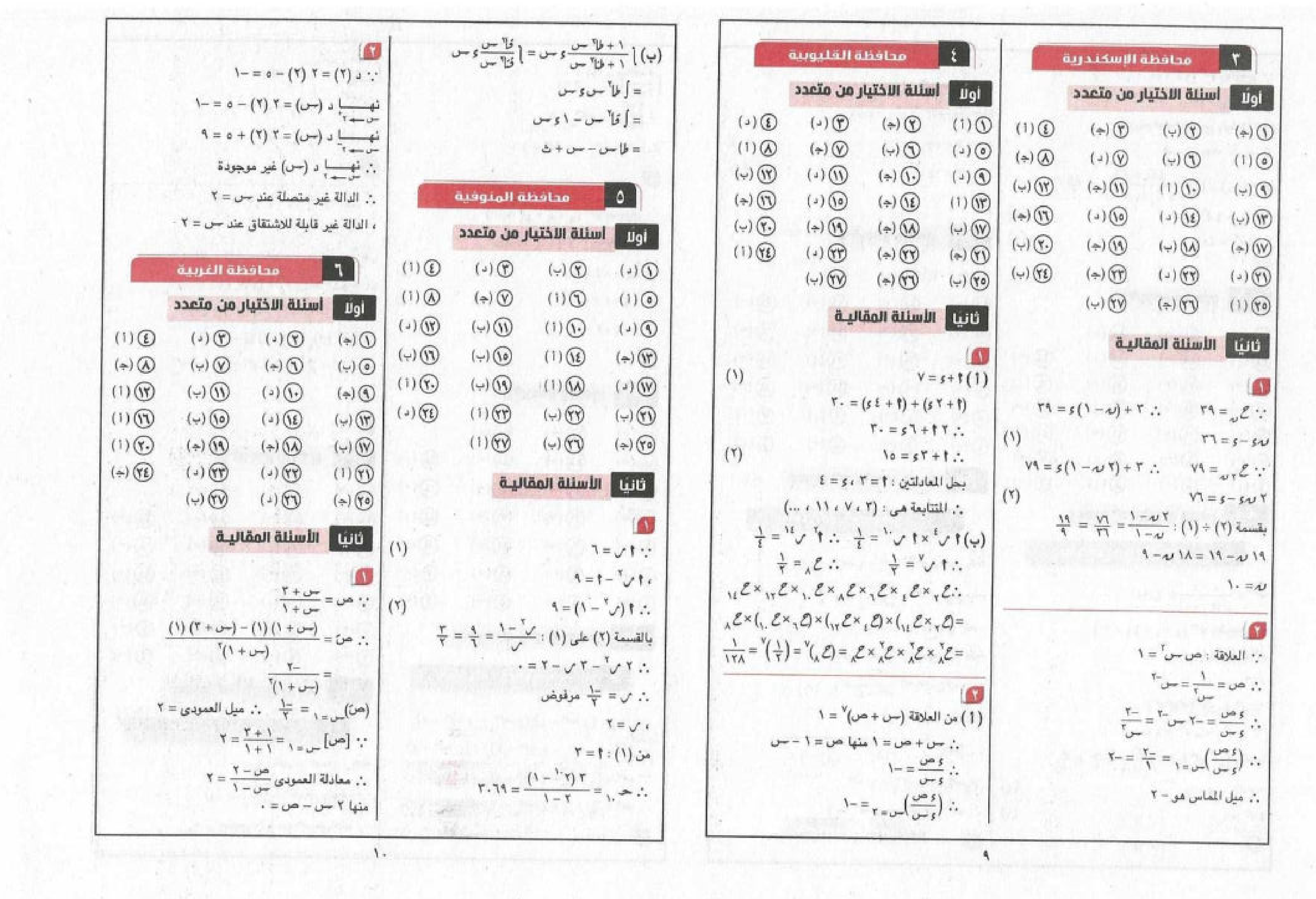
$\therefore \text{ص} = \text{جا}\,٢\,\text{س} \qquad \therefore \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = ٢\,\text{جتا}\,٢\,\text{س}$

$\therefore \left(\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}\right)_{(\frac{\pi}{٢} ، \frac{\sqrt{٣}}{٢})} = ٢ \times \frac{-١}{٢} = -١$

$\therefore$ ميل المماس = −١

$\therefore \text{ظاهـ} = -١$

$\therefore \text{هـ} = ١٣٥^{\circ}$



٣ محافظة الإسكندرية

أولًا أسئلة الاختيار من متعدد

① (جـ)	② (ب)	③ (جـ)	④ (أ)
⑤ (أ)	⑥ (ب)	⑦ (د)	⑧ (جـ)
⑨ (ب)	⑩ (أ)	⑪ (جـ)	⑫ (ب)
⑬ (ب)	⑭ (د)	⑮ (د)	⑯ (جـ)
⑰ (جـ)	⑱ (ب)	⑲ (جـ)	⑳ (ب)
㉑ (د)	㉒ (د)	㉓ (جـ)	㉔ (ب)
㉕ (أ)	㉖ (جـ)	㉗ (ب)	

ثانيًا الأسئلة المقالية

١

∵ $ح_ن = ٣٩$ ∴ $٣ + (ن - ١) ء = ٣٩$

$ن ء - ء = ٣٦$ (١)

∵ $ح_{٢ن} = ٧٩$ ∴ $٣ + (٢ن - ١) ء = ٧٩$

$٢ن ء - ء = ٧٦$ (٢)

بقسمة (٢) ÷ (١) : $\frac{٢ن - ١}{ن - ١} = \frac{٧٦}{٣٦} = \frac{١٩}{٩}$

$١٩ن - ١٩ = ١٨ن - ٩$

$ن = ١٠$

٢

∵ العلاقة : $ص س^{٢} = ١$

∴ $ص = \frac{١}{س^{٢}} = س^{-٢}$

∴ $\frac{ءص}{ءس} = -٢ س^{-٣} = \frac{-٢}{س^{٣}}$

∴ $\left(\frac{ءص}{ءس}\right)_{س = ١} = \frac{-٢}{١} = -٢$

∴ ميل المماس هو -٢

٤ محافظة القليوبية

أولًا أسئلة الاختيار من متعدد

① (أ)	② (جـ)	③ (د)	④ (د)
⑤ (د)	⑥ (ب)	⑦ (جـ)	⑧ (أ)
⑨ (د)	⑩ (جـ)	⑪ (د)	⑫ (ب)
⑬ (أ)	⑭ (جـ)	⑮ (د)	⑯ (جـ)
⑰ (ب)	⑱ (جـ)	⑲ (جـ)	⑳ (ب)
㉑ (جـ)	㉒ (جـ)	㉓ (د)	㉔ (أ)
㉕ (ب)	㉖ (جـ)	㉗ (ب)	

ثانيًا الأسئلة المقالية

١

(أ) $أ + ء = ٧$ (١)

$(أ + ٢ء) + (أ + ٤ء) = ٣٠$

∴ $٢أ + ٦ء = ٣٠$

∴ $أ + ٣ء = ١٥$ (٢)

بحل المعادلتين : $أ = ٣$ ، $ء = ٤$

∴ المتتابعة هي : (٣ ، ٧ ، ١١ ، ...)

(ب) $أ ر^{٤} \times أ ر^{١٠} = \frac{١}{٤}$ ∴ $أ^{٢} ر^{١٤} = \frac{١}{٤}$

∴ $أ ر^{٧} = \frac{١}{٢}$ ∴ $ح_٨ = \frac{١}{٢}$

∴ $ح_٢ \times ح_٤ \times ح_٦ \times ح_٨ \times ح_{١٠} \times ح_{١٢} \times ح_{١٤}$

$= (ح_٢ \times ح_{١٤}) \times (ح_٤ \times ح_{١٢}) \times (ح_٦ \times ح_{١٠}) \times ح_٨$

$= ح_٨^{٢} \times ح_٨^{٢} \times ح_٨^{٢} \times ح_٨ = (ح_٨)^{٧} = \left(\frac{١}{٢}\right)^{٧} = \frac{١}{١٢٨}$

٢

(أ) من العلاقة $(س + ص)^{٧} = ١$

∴ $س + ص = ١$ منها $ص = ١ - س$

∴ $\frac{ءص}{ءس} = -١$

∴ $\left(\frac{ءص}{ءس}\right)_{س = ٢} = -١$

(ب) $\int \frac{١ + ظا^{٢} س}{١ + ظتا^{٢} س} ءس = \int \frac{قا^{٢} س}{قتا^{٢} س} ءس$

$= \int ظا^{٢} س \, ءس$

$= \int قا^{٢} س - ١ \, ءس$

$= ظا س - س + ث$

٥ محافظة المنوفية

أولًا أسئلة الاختيار من متعدد

① (د)	② (ب)	③ (د)	④ (أ)
⑤ (أ)	⑥ (أ)	⑦ (جـ)	⑧ (أ)
⑨ (د)	⑩ (أ)	⑪ (ب)	⑫ (د)
⑬ (جـ)	⑭ (أ)	⑮ (ب)	⑯ (ب)
⑰ (د)	⑱ (أ)	⑲ (ب)	⑳ (أ)
㉑ (ب)	㉒ (ب)	㉓ (أ)	㉔ (د)
㉕ (جـ)	㉖ (ب)	㉗ (أ)	

ثانيًا الأسئلة المقالية

١

∵ $أ ر = ٦$ (١)

، $أ ر^{٢} - أ = ٩$

∴ $أ (ر^{٢} - ١) = ٩$ (٢)

بالقسمة (٢) على (١) : $\frac{ر^{٢} - ١}{ر} = \frac{٩}{٦} = \frac{٣}{٢}$

∴ $٢ ر^{٢} - ٣ ر - ٢ = ٠$

∴ $ر = \frac{-١}{٢}$ مرفوض

، $ر = ٢$

من (١) : $أ = ٣$

∴ $ح_{١٠} = \frac{٣ (٢^{١٠} - ١)}{٢ - ١} = ٣٠٦٩$

٢

∵ $د(٢) = ٢ (٢) - ٥ = -١$

$\lim_{س \to ٢^{-}} د(س) = ٢ (٢) - ٥ = -١$

$\lim_{س \to ٢^{+}} د(س) = ٢ (٢) + ٥ = ٩$

∴ $\lim_{س \to ٢} د(س)$ غير موجودة

∴ الدالة غير متصلة عند س = ٢

، الدالة غير قابلة للاشتقاق عند س = ٢

٦ محافظة الغربية

أولًا أسئلة الاختيار من متعدد

① (جـ)	② (د)	③ (د)	④ (أ)
⑤ (ب)	⑥ (جـ)	⑦ (ب)	⑧ (جـ)
⑨ (جـ)	⑩ (د)	⑪ (ب)	⑫ (أ)
⑬ (ب)	⑭ (د)	⑮ (ب)	⑯ (أ)
⑰ (ب)	⑱ (جـ)	⑲ (جـ)	⑳ (أ)
㉑ (أ)	㉒ (د)	㉓ (د)	㉔ (جـ)
㉕ (جـ)	㉖ (د)	㉗ (ب)	

ثانيًا الأسئلة المقالية

١

∵ $ص = \frac{س + ٢}{س + ١}$

∴ $ص' = \frac{(س + ١)(١) - (س + ٢)(١)}{(س + ١)^{٢}}$

$= \frac{-١}{(س + ١)^{٢}}$

$(ص')_{س = ١} = \frac{-١}{٤}$ ∴ ميل العمودي = ٤

∵ $[ص]_{س = ١} = \frac{١ + ٢}{١ + ١} = \frac{٣}{٢}$

∴ معادلة العمودي $\frac{ص - \frac{٣}{٢}}{س - ١} = ٤$

منها ٢ س − ص = ٠

٢

$أ ر = ٦$ (١)

، $أ ر^{٢} - أ = ٩$ (٢)

بقسمة (٢) على (١): $\frac{ر^{٢} - ١}{ر} = \frac{٩}{٦} = \frac{٣}{٢}$

∴ $٢ ر^{٢} - ٣ ر - ٢ = ٠$

∴ $ر = \frac{-١}{٢}$ (مرفوض)

، $ر = ٢$

من (١) $أ = ٣$

∴ المتتابعة هى (٣ ، ٦ ، ١٢ ، ...)

$ح_{٩} = \frac{٣ (٢^{٩} - ١)}{٢ - ١} = ١٥٣٣$

٧ محافظة الدقهلية

أولاً أسئلة الاختيار من متعدد

① (أ)	② (د)	③ (أ)	④ (ب)
⑤ (ب)	⑥ (ب)	⑦ (د)	⑧ (ج)
⑨ (أ)	⑩ (د)	⑪ (ج)	⑫ (أ)
⑬ (ج)	⑭ (د)	⑮ (أ)	⑯ (ج)
⑰ (ج)	⑱ (ج)	⑲ (د)	⑳ (أ)
㉑ (أ)	㉒ (ب)	㉓ (أ)	㉔ (ب)
㉕ (ج)	㉖ (ب)	㉗ (د)	

ثانياً الأسئلة المقالية

١

$أ + أ ر = ٧٢$ (١)

$أ ر^{٢} + أ ر^{٣} = ٨$ (٢)

بقسمة (٢) ÷ (١): $\frac{أ ر^{٢} (١ + ر)}{أ (١ + ر)} = \frac{٨}{٧٢}$

$ر^{٢} = \frac{١}{٩}$ منها $ر = \frac{١}{٣}$

(لأن الإجابة السالبة مرفوضة)

من (١): $أ = ٥٤$

∴ المتتابعة هى (٥٤ ، ١٨ ، ٦ ، ...)

٢

∵ $ص = ٥ س^{٣} + ٣ س^{٢} + ٤$

∴ $ص' = ١٥ س^{٢} + ٦ س$

∵ $[ص']_{س = -١} = ٩$

∴ ميل المماس = ٩

∴ معادلة المماس $\frac{ص - ٢}{س + ١} = ٩$

منها المعادلة تكون $٩ س - ص + ١١ = ٠$

، ميل العمودى $= -\frac{١}{٩}$

معادلة العمودى $\frac{ص - ٢}{س + ١} = -\frac{١}{٩}$

منها المعادلة هى: $س + ٩ ص - ١٧ = ٠$

٨ محافظة السويس

أولاً أسئلة الاختيار من متعدد

① (أ)	② (ب)	③ (د)	④ (أ)
⑤ (ج)	⑥ (ب)	⑦ (أ)	⑧ (د)
⑨ (د)	⑩ (د)	⑪ (ج)	⑫ (ب)
⑬ (د)	⑭ (ب)	⑮ (أ)	⑯ (ب)
⑰ (ج)	⑱ (ب)	⑲ (ج)	⑳ (ج)
㉑ (د)	㉒ (أ)	㉓ (ج)	㉔ (د)
㉕ (أ)	㉖ (د)	㉗ (ب)	

ثانياً الأسئلة المقالية

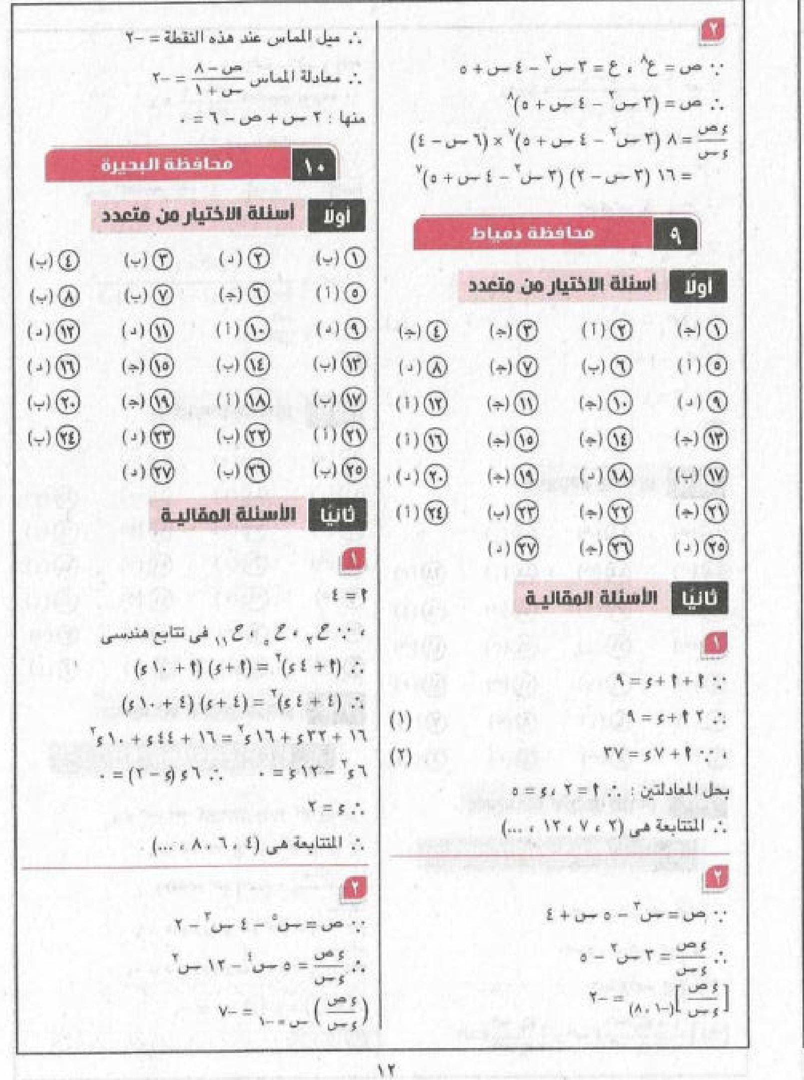
١

$أ + ٣ ء = ٢٠$ (١)

$أ + ٧ ء = ٤٤$ (٢)

بحل المعادلتين: $أ = ٢$ ، $ء = ٦$

∴ المتتابعة هى: (٢ ، ٨ ، ١٤ ، ...)



٢

∵ $ص = ع^{٨}$ ، $ع = ٣ س^{٢} - ٤ س + ٥$

∴ $ص = (٣ س^{٢} - ٤ س + ٥)^{٨}$

$\frac{ءص}{ءس} = ٨ (٣ س^{٢} - ٤ س + ٥)^{٧} \times (٦ س - ٤)$

$= ١٦ (٣ س - ٢) (٣ س^{٢} - ٤ س + ٥)^{٧}$

٩ محافظة دمياط

أولاً أسئلة الاختيار من متعدد

① (ج)	② (أ)	③ (ج)	④ (ج)
⑤ (أ)	⑥ (ب)	⑦ (ج)	⑧ (د)
⑨ (د)	⑩ (ج)	⑪ (ج)	⑫ (أ)
⑬ (ج)	⑭ (ج)	⑮ (ج)	⑯ (أ)
⑰ (ب)	⑱ (د)	⑲ (ج)	⑳ (د)
㉑ (ج)	㉒ (ج)	㉓ (ب)	㉔ (أ)
㉕ (د)	㉖ (ج)	㉗ (د)	

ثانياً الأسئلة المقالية

١

∵ $أ + أ + ء = ٩$

∴ $٢ أ + ء = ٩$ (١)

، ∵ $أ + ٧ ء = ٣٧$ (٢)

بحل المعادلتين: ∴ $أ = ٢$ ، $ء = ٥$

∴ المتتابعة هى (٢ ، ٧ ، ١٢ ، ...)

٢

∵ $ص = س^{٣} - ٥ س + ٤$

∴ $\frac{ءص}{ءس} = ٣ س^{٢} - ٥$

$\left[\frac{ءص}{ءس}\right]_{(-١ ، ٨)} = -٢$

∴ ميل المماس عند هذه النقطة = −٢

∴ معادلة المماس $\frac{ص - ٨}{س + ١} = -٢$

منها: $٢ س + ص - ٦ = ٠$

١٠ محافظة البحيرة

أولاً أسئلة الاختيار من متعدد

① (ب)	② (د)	③ (ب)	④ (ب)
⑤ (أ)	⑥ (ج)	⑦ (ب)	⑧ (ب)
⑨ (د)	⑩ (أ)	⑪ (د)	⑫ (د)
⑬ (ب)	⑭ (ب)	⑮ (ج)	⑯ (د)
⑰ (ب)	⑱ (أ)	⑲ (ج)	⑳ (ب)
㉑ (أ)	㉒ (ب)	㉓ (د)	㉔ (ب)
㉕ (ب)	㉖ (ب)	㉗ (د)	

ثانياً الأسئلة المقالية

١

$أ = ٤$

∵ $ح_{٢}$ ، $ح_{٥}$ ، $ح_{١١}$ فى تتابع هندسى

∴ $(أ + ٤ ء)^{٢} = (أ + ء)(أ + ١٠ ء)$

∴ $(٤ + ٤ ء)^{٢} = (٤ + ء)(٤ + ١٠ ء)$

$١٦ + ٣٢ ء + ١٦ ء^{٢} = ١٦ + ٤٤ ء + ١٠ ء^{٢}$

$٦ ء^{٢} - ١٢ ء = ٠$ ∴ $٦ ء (ء - ٢) = ٠$

∴ $ء = ٢$

∴ المتتابعة هى (٤ ، ٦ ، ٨ ، ...)

٢

∵ $ص = س^{٥} - ٤ س^{٣} - ٢$

∴ $\frac{ءص}{ءس} = ٥ س^{٤} - ١٢ س^{٢}$

$\left(\frac{ءص}{ءس}\right)_{س = -١} = -٧$



∴ ميل المماس = −٧

، (ص) $_{س=-١}$ = ٥

∴ معادلة المماس $\frac{ص - ٥}{س + ١} = -٧$

٧ س + ص + ٢ = ٠

١١ محافظة الفيوم

أولا أسئلة الاختيار من متعدد

① (أ) ② (د) ③ (ج) ④ (أ)
⑤ (ب) ⑥ (ب) ⑦ (ب) ⑧ (ب)
⑨ (د) ⑩ (ج) ⑪ (د) ⑫ (ب)
⑬ (أ) ⑭ (ج) ⑮ (ج) ⑯ (ج)
⑰ (ج) ⑱ (ب) ⑲ (ج) ⑳ (د)
㉑ (أ) ㉒ (ج) ㉓ (أ) ㉔ (أ)
㉕ (أ) ㉖ (ج) ㉗ (ب)

ثانيا الأسئلة المقاليـة

١

∵ حـ$_{٥}$ − حـ$_{٤}$ = ٢٠ ∴ ع$_{٥}$ = ٢٠

∴ أ + ٤ ء = ٢٠ (١)

∵ حـ$_{٨}$ − حـ$_{٧}$ = ٢٩ ∴ ع$_{٨}$ = ٢٩

∴ أ + ٧ ء = ٢٩ (٢)

بحل المعادلتين : ∴ أ = ٨ ، ء = ٣

∴ حـ$_{١٠}$ = $\frac{١٠}{٢}$ (٢ × ٨ + ٩ × ٣) = ٢١٥

٢

∵ ص = س^{٣} − ٦ س^{٢} + ٩ س + ٢٠

∴ $\frac{دص}{دس}$ = ٣ س^{٢} − ١٢ س + ٩

ليكون المماس موازيًا لمحور السينات

∴ ميله = صفر

بوضع $\frac{دص}{دس}$ = ٠

٣ س^{٢} − ١٢ س + ٩ = ٠

∴ س = ١ وعندها ص = ٢٤

أو س = ٣ وعندها ص = ٢٠

∴ النقط هي (١ ، ٢٤) ، (٣ ، ٢٠)

١٢ محافظة بني سويف

أولا أسئلة الاختيار من متعدد

① (د) ② (ب) ③ (أ) ④ (د)
⑤ (ب) ⑥ (ب) ⑦ (ج) ⑧ (ب)
⑨ (ج) ⑩ (ب) ⑪ (ب) ⑫ (ج)
⑬ (أ) ⑭ (أ) ⑮ (ب) ⑯ (ب)
⑰ (ب) ⑱ (د) ⑲ (ب) ⑳ (أ)
㉑ (أ) ㉒ (ب) ㉓ (ب) ㉔ (ب)
㉕ (ب) ㉖ (أ) ㉗ (ج)

ثانيا الأسئلة المقاليـة

١

المتسلسلة الهندسية فيها :

أ = ١ ، ر = ٣ ، ل = ٦٥٦١

∴ حـ = $\frac{٣ × ٦٥٦١ - ١}{٣ - ١}$ = ٩٨٤١

٢

∵ ص = (٥ س^{٣} + ٣)^{٧}

∴ $\frac{دص}{دس}$ = ٧ (٥ س^{٣} + ٣)^{٦} × ١٥ س^{٢}

= ١٠٥ س^{٢} (٥ س^{٣} + ٣)^{٦}

١٣ محافظة المنيا

أولا أسئلة الاختيار من متعدد

① (د) ② (ب) ③ (ب) ④ (د)
⑤ (أ) ⑥ (ب) ⑦ (ب) ⑧ (ب)
⑨ (ب) ⑩ (ب) ⑪ (أ) ⑫ (ب)
⑬ (د) ⑭ (ج) ⑮ (أ) ⑯ (ب)
⑰ (ب) ⑱ (ج) ⑲ (د) ⑳ (ج)
㉑ (ب) ㉒ (ج) ㉓ (ب) ㉔ (ج)
㉕ (ب) ㉖ (ج) ㉗ (أ)

ثانيا الأسئلة المقاليـة

١

(س + ٢) (ص − ٦) = ٢٥ (١)

س + ص = ٧ × ٢ = ١٤ (٢)

∴ ص = ١٤ − س

من (١) : (س + ٢) (١٤ − س − ٦) = ٢٥

(س + ٢) (٨ − س) = ٢٥

∴ − س^{٢} + ٦ س + ١٦ = ٢٥

س^{٢} − ٦ س + ٩ = ٠

∴ س = ٣ منها ص = ١١

٢

ميل المستقيم المار بالنقطتين = $\frac{٩ - ١}{٥ - ٣}$ = ٤

∵ $\frac{دص}{دس}$ = ٣ س^{٢} − ٦ س − ٥

∵ ميل المماس = ميل المستقيم

∴ ٣ س^{٢} − ٦ س − ٥ = ٤

∴ س^{٢} − ٢ س − ٣ = ٠

∴ س = ٣ ومنها ص = −٣

أ، س = −١ ومنها ص = ١٣

∴ النقط هي (٣ ، −٣) ، (−١ ، ١٣)

١٤ محافظة أسيوط

أولا أسئلة الاختيار من متعدد

① (ب) ② (أ) ③ (ج) ④ (ب)
⑤ (ب) ⑥ (ب) ⑦ (ج) ⑧ (ب)
⑨ (د) ⑩ (ج) ⑪ (ب) ⑫ (أ)
⑬ (أ) ⑭ (ج) ⑮ (ج) ⑯ (د)
⑰ (ج) ⑱ (ج) ⑲ (د) ⑳ (ج)
㉑ (ب) ㉒ (أ) ㉓ (د) ㉔ (ب)
㉕ (ج) ㉖ (ج) ㉗ (أ)

ثانيا الأسئلة المقاليـة

١

الوسطين الأولين هما : ٢٤٣ ر ، ٢٤٣ ر^{٢}

∴ ٢٤٣ ر + ٢٤٣ ر^{٢} = ١٠٨

٢٤٣ ر (١ + ر) = ١٠٨ (١)

، الوسطين الأخرين هما : $\frac{١}{٢٤٣ ر}$ ، $\frac{١}{٢٤٣ ر^{٢}}$

∴ $\frac{١}{٢٤٣ ر} + \frac{١}{٢٤٣ ر^{٢}} = \frac{٤}{٨١}$

$\frac{١}{٢٤٣ ر^{٢}}$ (ر + ١) = $\frac{٤}{٨١}$ (٢)

بقسمة (١) ÷ (٢) : (٢٤٣)^{٢} ر^{٣} = ٢١٨٧

∴ ر^{٣} = $\frac{١}{٢٧}$

ر = $\frac{١}{٣}$

∴ الأوساط هي (٨١ ، ٢٧ ، ... ، $\frac{١}{٨١}$)

٢

$\frac{دص}{دس} = \frac{(١ + س)(١) - (س + ٣)(١)}{(١ + س)^{٢}} = \frac{-٢}{(١ + س)^{٢}}$

∴ $\left[\frac{دص}{دس}\right]_{س=١} = -\frac{١}{٢}$

∴ ميل العمودى = ٢

$(ص)_{س=١} = ٢$

∴ معادلة العمودى $\frac{ص - ٢}{س - ١} = ٢$

٢ س − ص = ٠

١٥ محافظة قنا

أولًا أسئلة الاختيار من متعدد

① (جـ)	② (جـ)	③ (ب)	④ (ب)
⑤ (د)	⑥ (جـ)	⑦ (د)	⑧ (أ)
⑨ (جـ)	⑩ (جـ)	⑪ (أ)	⑫ (جـ)
⑬ (ب)	⑭ (جـ)	⑮ (ب)	⑯ (ب)
⑰ (جـ)	⑱ (د)	⑲ (د)	⑳ (د)
㉑ (جـ)	㉒ (جـ)	㉓ (د)	㉔ (د)
㉕ (جـ)	㉖ (ب)	㉗ (ب)	

ثانيًا الأسئلة المقالية

١

$أ + ء + أ + ٢ء = ١٢$

∴ $٢أ + ٣ء = ١٢$ (١)

$أ + ٩ء = ٢١$ (٢)

بحل المعادلتين :

∴ $أ = ٣$ ، $ء = ٢$

∴ المتتابعة : (٣ ، ٥ ، ٧ ، ...)

$ح_{٢٠} = \frac{٢٠}{٢} (٢ × ٣ + ١٩ × ٢) = ٤٤٠$

٢

∵ $ص = ع^٢ - ٣ع$

∴ $\frac{ءص}{ءع} = ٢ع - ٣$

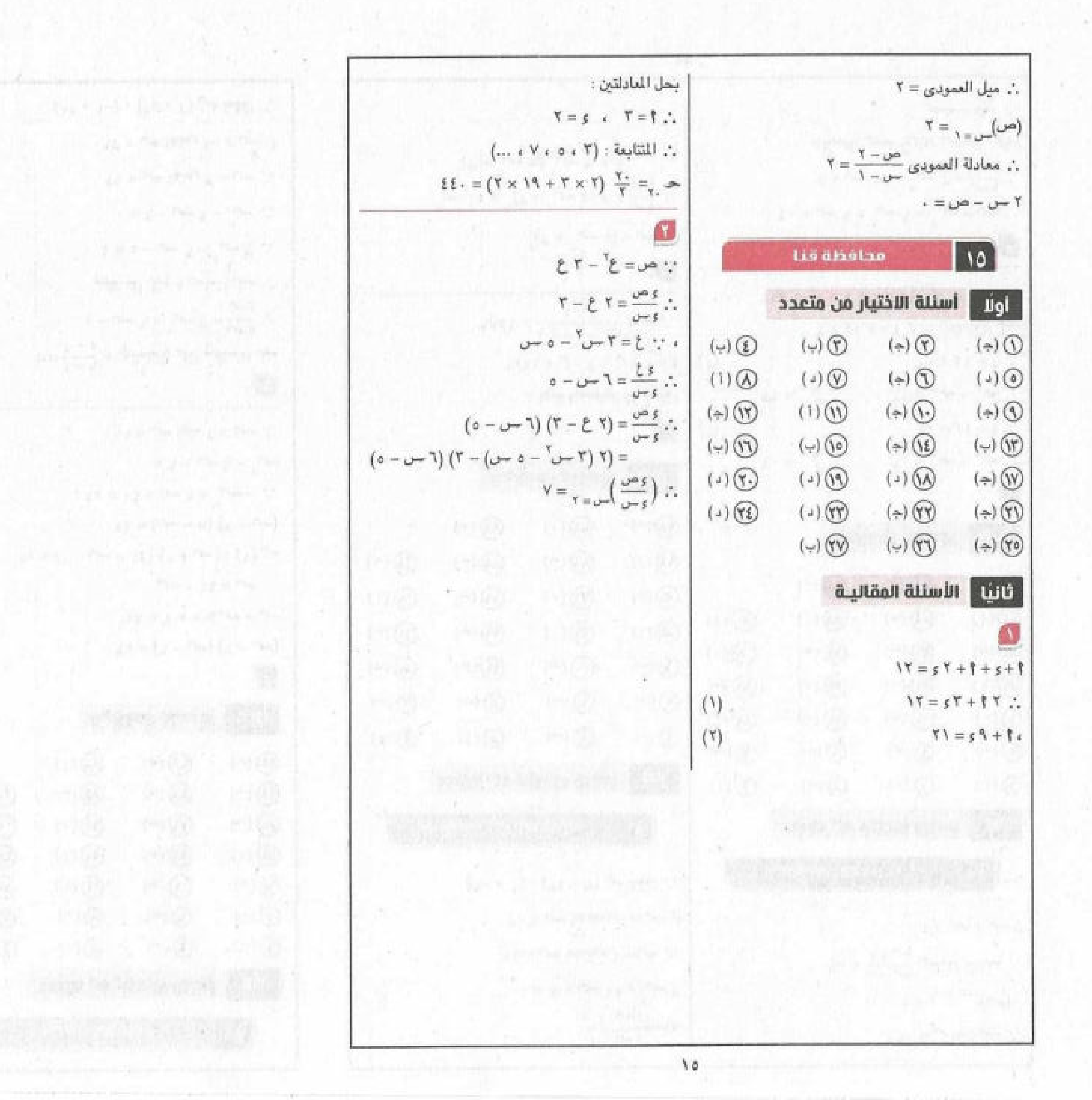
، ∵ $ع = ٣س^٢ - ٥س$

∴ $\frac{ءع}{ءس} = ٦س - ٥$

∴ $\frac{ءص}{ءس} = (٢ع - ٣)(٦س - ٥)$

$= (٢(٣س^٢ - ٥س) - ٣)(٦س - ٥)$

∴ $\left(\frac{ءص}{ءس}\right)_{س=٢} = ٧$



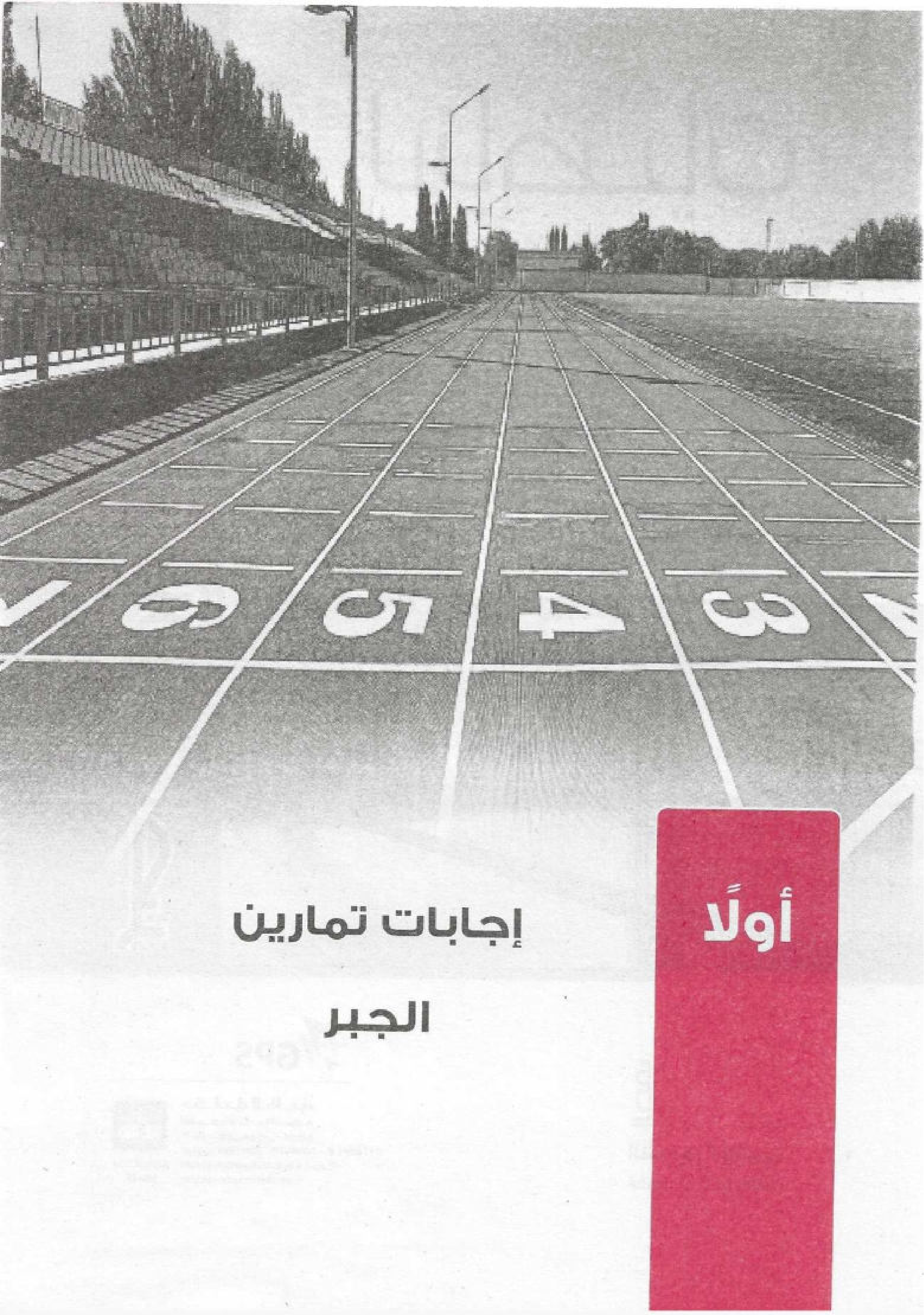
الجزء الخاص
بالإجابات

الرياضيات

البحتة



الصف الثانى
الثانوى
القسم العلمى
الفصل الدراسى الثانى



أولًا

إجابات تمارين

الجبر

إجابات الوحدة الأولى

إجابات تمارين 1

أولاً أسئلة الاختيار من متعدد

① (د) ② (ب) ③ (ب) ④ (جـ) ⑤ (د)
⑥ (جـ) ⑦ (د) ⑧ (جـ) ⑨ (أ) ⑩ (جـ)
⑪ (د) ⑫ (جـ) ⑬ (جـ) ⑭ (أ) ⑮ (جـ)
⑯ (ب) ⑰ (جـ) ⑱ (جـ) ⑲ (ب) ⑳ (ب)
(٢١) (جـ) (٢٢) (أ) (٢٣) (د) (٢٤) (د) (٢٥) (جـ)
(٢٦) (د) (٢٧) (جـ) (٢٨) (د) (٢٩) (ب) (٣٠) (ب)
(٣١) (جـ) (٣٢) (د) (٣٣) (د) (٣٤) (أ) (٣٥) (ب)
(٣٦) (ب) (٣٧) (د) (٣٨) (د) (٣٩) (د)
(٤٠) أولاً : (د) ثانياً : (ب) ثالثاً : (د)
(٤١) أولاً : (د) ثانياً : (ب) (٤٢) (د) (٤٣) (ب)
(٤٤) (جـ) (٤٥) (أ) (٤٦) (جـ) (٤٧) (ب) (٤٨) (جـ)
(٤٩) (ب)

ثانياً الأسئلة المقالية

١

① $ح_{ن} = ٢ن - ٣$ ∴ $ح_{١} = ٢ \times ١ - ٣ = -١$

، $ح_{٢} = ٢ \times ٢ - ٣ = ١$

، $ح_{٣} = ٢ \times ٣ - ٣ = ٣$

، $ح_{٤} = ٢ \times ٤ - ٣ = ٥$

، $ح_{٥} = ٢ \times ٥ - ٣ = ٧$

∴ الخمسة حدود الأولى هي :

$(-١ ، ١ ، ٣ ، ٥ ، ٧)$

② $ح_{ن} = \frac{(-١)^{ن}}{ن + ٣}$ ∴ $ح_{١} = \frac{-١}{١ + ٣} = \frac{-١}{٤}$

، $ح_{٢} = \frac{(-١)^{٢}}{٢ + ٣} = \frac{١}{٥}$ ، $ح_{٣} = \frac{(-١)^{٣}}{٣ + ٣} = \frac{-١}{٦}$

، $ح_{٤} = \frac{(-١)^{٤}}{٤ + ٣} = \frac{١}{٧}$ ، $ح_{٥} = \frac{(-١)^{٥}}{٥ + ٣} = \frac{-١}{٨}$

∴ الخمسة حدود الأولى هي :

$(\frac{-١}{٤} ، \frac{١}{٥} ، \frac{-١}{٦} ، \frac{١}{٧} ، \frac{-١}{٨})$

③ $ح_{ن} = جا(\frac{ن}{٤}\pi)$ ∴ $ح_{١} = جا(\frac{\pi}{٤}) = \frac{١}{\sqrt{٢}}$

، $ح_{٢} = جا(\frac{\pi}{٢}) = ١$ ، $ح_{٣} = جا(\frac{٣\pi}{٤}) = \frac{١}{\sqrt{٢}}$

، $ح_{٤} = جا(\pi) = ٠$ ، $ح_{٥} = جا(\frac{٥\pi}{٤}) = \frac{-١}{\sqrt{٢}}$

∴ الخمسة حدود الأولى هي :

$(\frac{١}{\sqrt{٢}} ، ١ ، \frac{١}{\sqrt{٢}} ، ٠ ، \frac{-١}{\sqrt{٢}})$

④ $ح_{ن} = ١ + \frac{٢}{\sqrt{ن}}$

∴ $ح_{١} = ١ + \frac{٢}{\sqrt{١}} = ٣$ ، $ح_{٢} = ١ + \frac{٢}{\sqrt{٢}}$

، $ح_{٣} = ١ + \frac{٢}{\sqrt{٣}}$ ، $ح_{٤} = ١ + \frac{٢}{\sqrt{٤}} = ٢$

، $ح_{٥} = ١ + \frac{٢}{\sqrt{٥}}$

∴ الخمسة حدود الأولى هي :

$(٣ ، ١ + \frac{٢}{\sqrt{٢}} ، ١ + \frac{٢}{\sqrt{٣}} ، ٢ ، ١ + \frac{٢}{\sqrt{٥}})$

⑤ بوضع $ن = ١$ ∴ $ح_{٢} = ٢ ح_{١}$ ∴ $ح_{٢} = ٤$

، بوضع $ن = ٢$ ∴ $ح_{٣} = ٢ ح_{٢}$ ∴ $ح_{٣} = ٨$

، بوضع $ن = ٣$ ∴ $ح_{٤} = ٢ ح_{٣}$ ∴ $ح_{٤} = ١٦$

، بوضع $ن = ٤$ ∴ $ح_{٥} = ٢ ح_{٤}$ ∴ $ح_{٥} = ٣٢$

∴ الحدود الخمسة الأولى للمتتابعة هي :

$(٢ ، ٤ ، ٨ ، ١٦ ، ٣٢)$

⑥ بوضع $ن = ١$ ∴ $ح_{٢} = \frac{-١}{ح_{١}}$ ∴ $ح_{٢} = ١$

، بوضع $ن = ٢$ ∴ $ح_{٣} = \frac{-١}{ح_{٢}}$ ∴ $ح_{٣} = -١$

، بوضع $ن = ٣$ ∴ $ح_{٤} = \frac{-١}{ح_{٣}}$ ∴ $ح_{٤} = ١$

، بوضع $ن = ٤$ ∴ $ح_{٥} = \frac{-١}{ح_{٤}}$ ∴ $ح_{٥} = -١$

∴ الحدود الخمسة الأولى للمتتابعة هي :

$(-١ ، ١ ، -١ ، ١ ، -١)$

٢

① $ح_{ن+١} - ح_{ن} = ٢(ن + ١) + ٥ - (٢ن + ٥)$

$= ٢ن + ٧ - ٢ن - ٥ = ٢ > ٠$

لجميع قيم $ن \in ص^{+}$

∴ المتتابعة $(ح_{ن})$ تزايدية

② $ح_{ن+١} - ح_{ن} = \frac{١}{٣(ن + ١) - ١} - \frac{١}{٣ن - ١}$

$= \frac{١}{٣ن + ٢} - \frac{١}{٣ن - ١}$

$= \frac{٣ن - ١ - ٣ن - ٢}{٩ن^{٢} + ٣ن - ٢}$

$= \frac{-٣}{٩ن^{٢} + ٣ن - ٢} < ٠$

لجميع قيم $ن \in ص^{+}$

∴ المتتابعة $(ح_{ن})$ تناقصية

③ $ح_{ن+١} - ح_{ن} = (-\frac{١}{٣})^{ن+١} - (-\frac{١}{٣})^{ن}$

$= (-\frac{١}{٣})^{ن} [-\frac{١}{٣} - ١]$

$= -\frac{٤}{٣} \times (-\frac{١}{٣})^{ن}$

والمقدار الناتج موجب إذا كان ن عدداً فردياً

، سالب إذا كان ن عدداً زوجياً

∴ المتتابعة $(ح_{ن})$ ليست تزايدية وليست تناقصية

④ $ح_{ن+١} - ح_{ن} = \frac{(-١)^{ن+١}}{٢(ن + ١)} - \frac{(-١)^{ن}}{٢ن}$

$= \frac{(-١)^{ن+١}}{٢(ن + ١)} + \frac{(-١)^{ن+١}}{٢ن}$

$= (-١)^{ن+١} [\frac{١}{٢(ن + ١)} + \frac{١}{٢ن}]$

$= (-١)^{ن+١} [\frac{ن + ن + ١}{٢ن(ن + ١)}]$

$= (-١)^{ن+١} [\frac{٢ن + ١}{٢ن(ن + ١)}]$

والمقدار الناتج موجب إذا كان ن عدداً فردياً وسالب إذا كان ن عدداً زوجياً

∴ المتتابعة $(ح_{ن})$ ليست تزايدية وليست تناقصية

٣

① $ح_{ن} = ن^{٢}$ ② $ح_{ن} = جا(\frac{ن\pi}{٢})$

③ $ح_{ن} = \frac{٢^{ن} - ١}{٢^{ن}}$

٤

∵ $ح_{ن+١} = ح_{ن} + ن س$ ، بوضع $ن = ١$

∴ $ح_{٢} = ح_{١} + س$ ∴ $ح_{٢} = ٩ + س$ (١)

، بوضع $ن = ٢$ ∴ $ح_{٣} = ح_{٢} + ٢س$

ومن (١) : ∴ $٣٦ = ٩ + س + ٢س$

∴ $٣س = ٢٧$ ∴ $س = ٩$

٥

① كل دالة مجالها $ص^{+}$ أو مجموعة جزئية منها هي متتابعة

② كل دالة مجالها $\{١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ...\}$ هي متتابعة غير منتهية

③ في المتتابعة $(ح_{ن})$ حيث $ح_{ن} = ن^{٢}$ يكون $ح_{ن+١} > ح_{ن}$ حيث إن المتتابعة تزايدية

٦

① $ح_٨ = ٢١$ ، $ح_٩ = ٣٤$

②

③ $\because ح_١ = ح_٢$

$\therefore$ المتتابعة ليست تزايدية وليست تناقصية

④ $ح_{ن+٢} = ح_{ن+١} + ح_ن$ ، $ح_١ = ح_٢ = ١$

تطبيقات حياتية

① الخمسة حدود الأولى هي : (٨ ، ١٠ ، ١٢ ، ١٤ ، ١٦)

② $ح_ن = ٦ + ٢ن$

③ في اليوم السابع : بوضع $ن = ٧$

$\therefore ح_٧ = ٦ + ٢ \times ٧ = ٢٠$ دقيقة

④ عندما $ح_ن = ٣٠$ دقيقة

$\therefore ٦ + ٢ن = ٣٠$

$\therefore ن = ١٢$ أي في اليوم الثاني عشر

إجابات تمارين 2

أولا أسئلة الاختيار من متعدد

① (جـ) ② (د) ③ (ب) ④ (د) ⑤ (ب)

⑥ (أ) ⑦ (أ) ⑧ (ب) ⑨ (أ) ⑩ (ب)

⑪ (جـ) ⑫ (جـ) ⑬ (ب) ⑭ (أ) ⑮ (د)

⑯ (جـ) ⑰ (أ) ⑱ (أ) ⑲ (جـ) ⑳ (د)

㉑ (أ) ㉒ (د) ㉓ (د) ㉔ (د) ㉕ (جـ)

㉖ (د) ㉗ (د) ㉘ (جـ) ㉙ (جـ) ㉚ (أ)

㉛ (جـ) ㉜ (ب) ㉝ (جـ) ㉞ (جـ) ㉟ (د)

ثانيا الأسئلة المقالية

١

① $\sum_{ر=١}^{٥} (٣ر - ٢)$

$= (٣ - ٢) + (٦ - ٢) + (٩ - ٢) + (١٢ - ٢) + (١٥ - ٢)$

$= (١ + ٤ + ٧ + ١٠ + ١٣)$

② $\sum_{ر=١}^{٨} ((-١)^ر + ٤ر)$

$= (-١ + ٤) + (١ + ٨) + (-١ + ١٢) + (١ + ١٦) + (-١ + ٢٠) + (١ + ٢٤) + (-١ + ٢٨) + (١ + ٣٢)$

$= (٣ + ٩ + ١١ + ١٧ + ١٩ + ٢٥ + ٢٧ + ٣٣)$

③ $\sum_{ر=١}^{\infty} ((\frac{١}{٢})^ر - ١)$

$= (\frac{١}{٢} - ١) + (\frac{١}{٤} - ١) + (\frac{١}{٨} - ١) + (\frac{١}{١٦} - ١) + \dots$

$= (\frac{-١}{٢} - \frac{٣}{٤} - \frac{٧}{٨} - \frac{١٥}{١٦} \dots)$

④ $\sum_{ر=١}^{\infty} (\frac{١}{ر} - \frac{١}{ر+١})$

$= (١ - \frac{١}{٢}) + (\frac{١}{٢} - \frac{١}{٣}) + (\frac{١}{٣} - \frac{١}{٤}) + (\frac{١}{٤} - \frac{١}{٥}) + \dots$

$= (\frac{١}{٢} + \frac{١}{٦} + \frac{١}{١٢} + \frac{١}{٢٠} + \dots)$

٢

① $\sum_{ر=١}^{٤} (ر^٢)$

$= (١^٢ + ٢^٢ + ٣^٢ + ٤^٢)$

$= (١ + ٤ + ٩ + ١٦) = ٣٠$

② $\sum_{ر=١}^{٥} (١ - ر^٢)$

$= (١ - ١) + (١ - ٤) + (١ - ٩) + (١ - ١٦) + (١ - ٢٥)$

$= (٠ - ٣ - ٨ - ١٥ - ٢٤) = -٥٠$

③ $\sum_{ر=١}^{٥} (\frac{-١}{٢})^ر$

$= (\frac{-١}{٢} + \frac{١}{٤} - \frac{١}{٨} + \frac{١}{١٦} - \frac{١}{٣٢}) = -\frac{١١}{٣٢}$

④ $\sum_{ر=١}^{ن} (\frac{١}{ر+١} - \frac{١}{ر})$

$= (\frac{١}{٢} - \frac{١}{١}) + (\frac{١}{٣} - \frac{١}{٢}) + (\frac{١}{٤} - \frac{١}{٣}) + (\frac{١}{٥} - \frac{١}{٤}) + \dots + (\frac{١}{ن+١} - \frac{١}{ن})$

$= \frac{١}{ن+١} - ١ = \frac{١ - ن - ١}{ن+١} = \frac{-ن}{ن+١}$

٣

① الطريقة الأولى :

$\sum_{ر=١}^{٥} (٢ر^٢ - ٣ر + ٥)$

$= (٢ \times ١^٢ - ٣ \times ١ + ٥) + (٢ \times ٢^٢ - ٣ \times ٢ + ٥) + (٢ \times ٣^٢ - ٣ \times ٣ + ٥) + (٢ \times ٤^٢ - ٣ \times ٤ + ٥) + (٢ \times ٥^٢ - ٣ \times ٥ + ٥) = ٩٠$

الطريقة الثانية :

$\sum_{ر=١}^{٥} (٢ر^٢ - ٣ر + ٥)$

$= \sum_{ر=١}^{٥} ٢ر^٢ - \sum_{ر=١}^{٥} ٣ر + \sum_{ر=١}^{٥} ٥$

$= ٢ \times \frac{٥(٥+١)(٢ \times ٥ + ١)}{٦} - ٣ \times \frac{٥(٥+١)}{٢} + ٥ \times ٥ = ٩٠$

② الطريقة الأولى :

$\sum_{ر=١}^{٤} (٣ - ٢ر + ر^٢)$

$= (٣ - ٢ \times ١ + ١^٢) + (٣ - ٢ \times ٢ + ٢^٢) + (٣ - ٢ \times ٣ + ٣^٢) + (٣ - ٢ \times ٤ + ٤^٢) = ٢٢$

الطريقة الثانية :

$\sum_{ر=١}^{٤} (٣ - ٢ر + ر^٢)$

$= \sum_{ر=١}^{٤} ٣ - \sum_{ر=١}^{٤} ٢ر + \sum_{ر=١}^{٤} ر^٢$

$= ٣ \times ٤ - ٢ \times \frac{٤(٤+١)}{٢} + \frac{٤(٤+١)(٢ \times ٤ + ١)}{٦}$

$= ٢٢$

٤

① $\sum_{ر=١}^{ن} (ر + ٢) = \sum_{ر=١}^{ن} ر + \sum_{ر=١}^{ن} ٢$

$= \frac{ن(ن+١)}{٢} + ٢ن$

$= \frac{ن^٢ + ٥ن}{٢}$

② $\sum_{ر=١}^{٦} (٢ر^٢ - ١) = ٢\sum_{ر=١}^{٦} ر^٢ - \sum_{ر=١}^{٦} ١$

$= ٢ \times \frac{٦(٦+١)(٢ \times ٦ + ١)}{٦} - ١ \times ٦ = ١٧٦$

(٣) $\sum_{ر=٨}^{١٢} ٢(ر+٥)$

$= \sum_{ر=١}^{١٢} ٢(ر+٥) - \sum_{ر=١}^{٧} ٢(ر+٥)$

$= \sum_{ر=١}^{١٢} ٢ر + \sum_{ر=١}^{١٢} ١٠ - \sum_{ر=١}^{٧} ٢ر$

$- \sum_{ر=١}^{٧} ١٠$

$= ٢ × \frac{١٢(١٢+١)}{٢} + ١٠ × ١٢ - ٢$

$× \frac{٧(٧+١)}{٢} - ١٠ × ٧ = ١٥٠$

(٤) $\sum_{ر=٤}^{٧} (ر^٢ - ٢ر + ٣)$

$= \sum_{ر=١}^{٧} (ر^٢ - ٢ر + ٣)$

$- \sum_{ر=١}^{٣} (ر^٢ - ٢ر + ٣)$

$= \sum_{ر=١}^{٧} ر^٢ - \sum_{ر=١}^{٧} ٢ر + \sum_{ر=١}^{٧} ٣$

$- \sum_{ر=١}^{٣} ر^٢ + \sum_{ر=١}^{٣} ٢ر - \sum_{ر=١}^{٣} ٣$

$= \frac{٧(٧+١)(٢×٧+١)}{٦} - ٢ × \frac{٧(٧+١)}{٢}$

$+ ٣ × ٧ - \frac{٣(٣+١)(٢×٣+١)}{٦}$

$+ ٢ × \frac{٣(٣+١)}{٢} - ٣ × ٣ = ٩٤$

٥

(١) المتتابعة هي دالة مجالها مجموعة الأعداد الصحيحة الموجبة أو أول ن عنصر منها وليس المتسلسلة

(٢) $\sum_{ر=١}^{٥} (٢ر - ١)$

ثالثًا مسائل تقيس مهارات التفكير

(١) (أ) (٢) (د) (٣) (ب) (٤) (د)

(٥) (ب) (٦) (ب) (٧) (أ) (٨) (د)

(٩) (جـ) (١٠) (أ) (١١) (جـ) (١٢) (ب)

إرشادات الحل :

(١) ∵ $\sum_{ر=١}^{٢٠} جاθ = ١٠$ ∴ $٢٠ جاθ = ١٠$

∴ $جاθ = \frac{١}{٢}$ ∴ $θ = ٣٠°$

(٢) ∵ $\sum_{ر=١}^{٢} س_ر = ٣$ ∴ $س_١ + س_٢ = ٣$

∴ مجموع الجذرين = ٣ ∴ م − ٢ = ٣

∴ م = ٥

(٣) ∵ $\sum_{ر=١}^{ن} (٣) = ١٢$ ∴ ن = ٤

∴ $\sum_{ر=١}^{ن} د(ر) = \sum_{ر=١}^{٤} (٣ - ٢ر + ر^٢)$

$= \sum_{ر=١}^{٤} ٣ - ٢ \sum_{ر=١}^{٤} ر + \sum_{ر=١}^{٤} ر^٢$

$= ١٢ - ٢ × ١٠ + ٣٠ = ٢٢$

(٤) ∵ $\sum_{س=١}^{م} (س) = \sum_{ص=١}^{م} (ص)$

$= \sum_{ع=١}^{م} (ع) = \sum_{ر=١}^{م} ر$

∴ $٣ \sum_{ر=١}^{م} ر = ١٦٥$ ∴ $\sum_{ر=١}^{م} ر = ٥٥$

∴ $\frac{م(م+١)}{٢} = ٥٥$

∴ م(م + ١) = ١١٠ = ١٠ × ١١

∴ م = ١٠

(٥) ∵ $\sum_{ن=١}^{ك} (ن+١)^٢ - \sum_{ن=١}^{ك} (ن-١)^٢ = ٨٤$

∴ $\sum_{ن=١}^{ك} (ن^٢ + ٢ن + ١ - ن^٢ + ٢ن - ١)$

= ٨٤

∴ $\sum_{ن=١}^{ك} ٤ن = ٨٤$ ∴ $٤ \sum_{ن=١}^{ك} ن = ٨٤$

∴ $\sum_{ن=١}^{ك} ن = ٢١$ ∴ $\frac{ك(ك+١)}{٢} = ٢١$

∴ ك(ك + ١) = ٤٢ = ٦ × ٧

∴ ك = ٦

(٦) ∵ $س = \sum_{ك=١}^{ن} ك = \frac{ن(ن+١)}{٢}$

، $٧س = \sum_{ك=١}^{ن} ك^٢ = \frac{ن(ن+١)(٢ن+١)}{٦}$

∴ $\frac{ن(ن+١)(٢ن+١)}{٦} = ٧ × \frac{ن(ن+١)}{٢}$

∴ $\frac{٢ن+١}{٣} = ٧$ ∴ ٢ن + ١ = ٢١

∴ ٢ن = ٢٠ ومنها ن = ١٠

(٧) $\sum_{س=١}^{٩٠} (جتاس° - جاس°)$

= جتا١° − جا١° + جتا٢° − جا٢° + ...

+ جتا٨٩° − جا٨٩° + جتا٩٠° − جا٩٠°

= (جتا١° − جا٨٩°) + (جتا٢° − جا٨٨°) + ...

+ (جتا٨٩° − جا١°) + (جتا٩٠° − جا٩٠°)

= صفر + صفر + ... + (صفر − ١) = −١

(٨) ∵ $\sum_{س=١}^{٦} (أس + ب) = ١٥$

∴ $أ(١) + ب + \sum_{س=٢}^{٦} (أس + ب) = ١٥$

∴ أ + ب + ٧ = ١٥ ∴ أ + ب = ٨

(٩) $\sum_{ر=١}^{ن} لو\left(\frac{ر+١}{ر}\right) = ٢$

∴ $لو \frac{٢}{١} + لو \frac{٣}{٢} + لو \frac{٤}{٣} + ... + لو \frac{ن+١}{ن} = ٢$

∴ $لو \left(\frac{٢}{١} × \frac{٣}{٢} × \frac{٤}{٣} × ... × \frac{ن+١}{ن}\right) = ٢$

∴ لو (ن + ١) = ٢

∴ ن + ١ = $(١٠)^٢$ = ١٠٠ ∴ ن = ٩٩

(١٠) ∵ $ص - س = \sum_{ر=١}^{ن} (٢ر+٢) - \sum_{ر=١}^{ن} ٢ر$

$= \sum_{ر=١}^{ن} ٢ = ٢ن$

∴ ٢ن = ١٠ ∴ ن = ٥

(١١) ∵ $ص = \sum_{ر=٥}^{٨} ر^٢ + \sum_{ر=٨}^{ن} ر^٢$

$= \sum_{ر=٥}^{٨} ر^٢ + (٨)^٢ + \sum_{ر=٩}^{ن} ر^٢$

$= \sum_{ر=٥}^{ن} ر^٢ + ٦٤$

∴ ص = س + ٦٤

(١٢) $\sum_{أ=١}^{٢} \sum_{ب=١}^{٢} \left(\sum_{حـ=١}^{٢} أ ب حـ\right)$

$= \sum_{أ=١}^{٢} \sum_{ب=١}^{٢} (أ ب + ٢ أ ب)$

$= \sum_{أ=١}^{٢} \sum_{ب=١}^{٢} (٣ أ ب)$

$= \sum_{أ=١}^{٢} (٣أ + ٦أ) = \sum_{أ=١}^{٢} (٩أ)$

= ٩ + ١٨ = ٢٧

تطبيقات حياتية

١

عدد المكعبات المستخدمة في بناء الهرم

$= \sum_{ر=١}^{ن} (ر)$ وعند ن = ١٠

∴ عدد المكعبات $= \sum_{ر=١}^{١٠} ر = \frac{١٠(١٠+١)}{٢}$

= ٥٥ مكعبًا.

٢

محيط المثلث الأكبر = ٣٢ × ٣

، محيط المثلث التالي له = $\frac{١}{٢}$ × ٣٢ × ٣ وهكذا

(١) متسلسلة محيطات المثلثات

$= \sum_{ر=١}^{٣} \left(\frac{١}{٢}\right)^{ر-١} × ٣ × ٣٢$

$= \sum_{ر=١}^{٣} ٣ × (٢)^{٦-ر}$

(٢) مجموع المحيطات = ١٦٨ سم



إجابات تمارين 3

أولاً أسئلة الاختيار من متعدد

① (جـ)	② (جـ)	③ (د)	④ (جـ)	⑤ (د)
⑥ (ب)	⑦ (جـ)	⑧ (ب)	⑨ (جـ)	⑩ (جـ)
⑪ (جـ)	⑫ (جـ)	⑬ (ب)	⑭ (جـ)	⑮ (جـ)
⑯ (جـ)	⑰ (ب)	⑱ (أ)	⑲ (جـ)	⑳ (جـ)
(٢١) (أ)	(٢٢) (جـ)	(٢٣) (ب)	(٢٤) (ب)	(٢٥) (جـ)
(٢٦) (أ)	(٢٧) (جـ)	(٢٨) (ب)	(٢٩) (أ)	(٣٠) (جـ)
(٣١) (د)	(٣٢) (جـ)	(٣٣) (د)	(٣٤) (أ)	(٣٥) (جـ)
(٣٦) (ب)	(٣٧) (أ)	(٣٨) (جـ)	(٣٩) (جـ)	(٤٠) (ب)
(٤١) (جـ)	(٤٢) (د)	(٤٣) (د)	(٤٤) (د)	(٤٥) (أ)
(٤٦) (جـ)	(٤٧) (أ)	(٤٨) (د)	(٤٩) (ب)	(٥٠) (د)
(٥١) (ب)	(٥٢) (ب)	(٥٣) (أ)	(٥٤) (د)	(٥٥) (د)
(٥٦) (د)	(٥٧) (د)	(٥٨) (ب)	(٥٩) (جـ)	(٦٠) (جـ)
(٦١) (ب)	(٦٢) (د)	(٦٣) (جـ)	(٦٤) (أ)	(٦٥) (جـ)
(٦٦) (أ)	(٦٧) (جـ)	(٦٨) (جـ)	(٦٩) (د)	(٧٠) (جـ)
(٧١) (د)	(٧٢) (أ)	(٧٣) (د)	(٧٤) (جـ)	(٧٥) (جـ)
(٧٦) (د)	(٧٧) (أ)	(٧٨) (ب)	(٧٩) (ب)	

ثانياً الأسئلة المقالية

تمارين على المتتابعة الحسابية

١

① حسابية ، $ح_ن = ٩ + ٤ (ن - ١) = ٤ن + ٥$

② ∵ $(١٢ - ٧) \neq (٧ - ٤)$

∴ المتتابعة ليست حسابية

③ حسابية ، $ح_ن = -١٢ + (ن - ١)(-٦) = -٦ن - ٦$

④ ∵ $\left(\frac{١}{٢} - \frac{١}{٣}\right) \neq \left(\frac{١}{٣} - \frac{١}{٤}\right)$

∴ المتتابعة ليست حسابية

⑤ حسابية ، $ح_ن = س + (ن - ١)$ ص

$= س - ص + ن$ ص

⑥ حسابية ثابتة أساسها = صفر ، $ح_ن = ٧$

٢

① $ح_{ن+١} - ح_ن = [٥ (ن + ١) + ٢] - (٥ن + ٢)$

$= ٥ن + ٥ + ٢ - ٥ن - ٢ = ٥$ (مقدار ثابت)

∴ $(ح_ن)$ متتابعة حسابية والأساس = ٥

، $ح_١ = ٧$ ، $ح_٢ = ١٢$ ، $ح_٣ = ١٧$

② $ح_{ن+١} - ح_ن = \left[\frac{٤ - ٥ (ن + ١)}{٢}\right] - \left[\frac{٤ - ٥ن}{٢}\right]$

$= \frac{٤ - ٥ن - ٥ - ٤ + ٥ن}{٢} = -\frac{٥}{٢}$ (مقدار ثابت)

∴ $(ح_ن)$ حسابية والأساس $= -\frac{٥}{٢}$

، $ح_١ = -\frac{١}{٢}$ ، $ح_٢ = -٣$ ، $ح_٣ = -\frac{١١}{٢}$

③ $ح_{ن+١} - ح_ن = ٣ \times ٧^{ن+٢} - ٣ \times ٧^{ن+١}$

$= ٣ \times ٧^{ن+١} \times (٧ - ١)$

$= ١٨ \times ٧^{ن+١} \neq$ مقدار ثابت

∴ $(ح_ن)$ ليست حسابية.

④ $ح_ن = \frac{(ن - ٥)(ن + ٥)}{ن + ٥}$ ، ∵ $(ن + ٥) \neq$ صفر

∴ $ح_ن = ن - ٥$

∵ $ح_{ن+١} - ح_ن = (ن + ١ - ٥) - (ن - ٥)$

$= ١$ (مقدار ثابت)

∴ $(ح_ن)$ حسابية والأساس = ١

، $ح_١ = -٤$ ، $ح_٢ = -٣$ ، $ح_٣ = -٢$

٣

$ح_ن = ٦٣ + (ن - ١) \times -٤$

∴ $ح_٧ = ٦٣ + ٦ \times -٤ = ٣٩$

، بفرض أن عدد الحدود = ن ∴ $ح_ن = -١٣٣$

∴ $٦٣ + (ن - ١) \times -٤ = -١٣٣$

∴ $-٤ن + ٦٧ = -١٣٣$

∴ ن = ٥٠

أي أن عدد حدود المتتابعة = ٥٠ حدًا.

٤

$ح_ن <$ صفر ∴ $٣٥ - ٤ (ن - ١) <$ صفر

∴ $٣٩ - ٤ن <$ صفر ∴ $٤ن > ٣٩$

∴ $ن > ٩\frac{٣}{٤}$ ∴ ن = ١٠ أو ١١ أو ...

∴ $ح_{١٠}$ هو أول حد سالب

، $ح_{١٠} = ٣٥ - ٤ \times ٩ = -١$

٥

$ح_ن >$ صفر

∴ $-٥١ + ٣ (ن - ١) >$ صفر

∴ $٣ن > ٥٤$ ∴ $ن > ١٨$

∴ ن = ١٩ أو ٢٠ أو ...

∴ $ح_{١٩}$ هو أول حد موجب

، $ح_{١٩} = -٥١ + ٣ \times ١٨ = ٣$

٦

$ح_ن > ٠$ ∴ $-٣٩ + ٥ (ن - ١) > ٠$

∴ $ن > ٨\frac{٤}{٥}$ ∴ ن = ٨ أو ٧ أو .....

∴ $ح_٨$ هو آخر حد سالب

، $ح_٨ = -٣٩ + ٥ \times ٧ = -٤$

٧

$ح_ن > ٠$ ∴ $-٤٧ + ٥ (ن - ١) > ٠$

∴ $٥ن > ٥٢$ ∴ $ن > ١٠\frac{٢}{٥}$

∴ ن = ١٠ أو ٩ أو ... ∴ آخر حد سالب $ح_{١٠}$

∴ عدد الحدود السالبة = ١٠

٨

∵ $ح_ن >$ صفر ∴ $٧٢ - ٩ (ن - ١) >$ صفر

∴ $٨١ > ٩ن$ ∴ $ن < ٩$

∴ عدد الحدود الموجبة = ٨

٩

نفرض أن $ح_ن = ١٠٠$ ∴ $١٣ + ٤ (ن - ١) = ١٠٠$

∴ $٤ن = ٩١$ ∴ $ن = \frac{٩١}{٤} \notin$ ص$^+$

∴ لا يوجد حد قيمته ١٠٠ في المتتابعة المعطاة

١٠

∵ لو س ، لو ص ، لو ع في تتابع حسابي

∴ ٢ لو ص = لو س + لو ع

∴ لو ص^٢ = لو س ع

∴ ص^٢ = س ع حيث س ، ص ، ع كميات موجبة.

١١

∵ $ل = ٣ ح_٦$ ∴ $-٢٤ = ٣ (أ + ٥ء)$

∴ $-٨ = ١٢ + ٥ء$ ∴ ء = -٤

∴ س - ١٢ = -٤ ∴ س = ٨

، -٢٤ - ص = -٤ ∴ ص = -٢٠

∵ ل = أ + (ن - ١) ء ∴ $-٢٤ = ١٢ - ٤ (ن - ١)$

∴ $-٣٦ = -٤ (ن - ١)$ ∴ ن = ١٠

١٢

① الصواب : لكل ن ∈ ص$^+$ - {١}

② الصواب هو أ هو أساس المتتابعة الحسابية وليس ب

تمارين على تعيين المتتابعة الحسابية

١٣

∵ أ + ٧ء = ١١ (١)

، $ح_١ + ح_{١٧}$ = صفر

∴ أ + ٩ء + أ + ١٦ء = صفر

∴ ٢أ + ٢٥ء = صفر (٢)

بضرب (١) × (٢) وبالطرح من (٢) :

∴ ١١ء = -٢٢ ∴ ء = -٢ ، أ = ٢٥

∴ المتتابعة هى : (٢٥ ، ٢٣ ، ٢١ ، ...)

١٤

أ + ٢ء = ١١ (١)

، ∵ $ع_{٥}$ + $ع_{٩}$ = ٤٠ ∴ أ + ٤ء + أ + ٨ء = ٤٠

∴ ٢أ + ١٢ء = ٤٠ ∴ أ + ٦ء = ٢٠ (٢)

بطرح (١) من (٢) : ∴ ٣ء = ٩

∴ ء = ٣ ، أ = ٢

∴ المتتابعة هى : (٢ ، ٥ ، ٨ ، ...)

، بفرض $ع_{ن}$ = ١٥٢

∴ ٢ + (ن - ١) × ٣ = ١٥٢

∴ ٣ن - ١ = ١٥٢ ∴ ن = ٥١

١٥

∵ أ + ء + أ + ٣ء = ٤

∴ ٢أ + ٤ء = ٤ ∴ أ + ٢ء = ٢ (١)

، أ + ٥ء + أ + ٦ء + أ + ٧ء = ٥٤

∴ ٣أ + ١٨ء = ٥٤ ∴ أ + ٦ء = ١٨ (٢)

، بطرح (١) من (٢) :

∴ ٤ء = ١٦ ∴ ء = ٤ ، أ = -٦

∴ المتتابعة هى : (-٦ ، -٢ ، ٢ ، ...)

١٦

∵ أ + ٤ء = ٢ ، أ + ٦ء = ٨ وبالطرح :

∴ ٢ء = ٦ ∴ ء = ٣ ومنها أ = -١٠

∴ المتتابعة هى : (-١٠ ، -٧ ، -٤ ، ...)

، ∵ $ع_{ن}$ > ١٤٣

∴ -١٠ + ٣(ن - ١) > ١٤٣

∴ ٣ن > ١٥٦ ∴ ن > ٥٢

∴ ن = ٥٣ أ، ٥٤ أ، ٥٥ أ، ...

∴ أول حد قيمته أكبر من ١٤٣ هو $ع_{٥٣}$

، $ع_{٥٣}$ = -١٠ + ٥٢ × ٣ = ١٤٦

١٧

∵ أ - أ - ٥ء = ٢٥ ∴ ء = -٥ (١)

، ∵ أ + ٦ء + أ + ٧ء = ٩٥ ∴ ٢أ + ١٣ء = ٩٥

ومن (١) : ∴ ٢أ = ١٦٠ ∴ أ = ٨٠

∴ المتتابعة هى : (٨٠ ، ٧٥ ، ٧٠ ، ...)

، ∵ $ع_{ن}$ < ٠

∴ ٨٠ - ٥(ن - ١) < ٠ ∴ ٥ن > ٨٥

∴ ن > ١٧

∴ ن = ١٨ أ، ١٩ أ، ٢٠ أ، ...

∴ $ع_{١٨}$ هو أول حد سالب

، $ع_{١٨}$ = ٨٠ - ٥ × ١٧ = -٥

١٨

∵ أ + ٤ء + أ + ٩ء = ٣٢

∴ ٢أ + ١٣ء = ٣٢ (١)

، أ + ٧ء = ٢(أ + ٣ء)

∴ أ + ٧ء - ٢أ - ٦ء = ٠

∴ -أ + ء = ٠ (٢)

، بجمع (١) ، (٢) : ∴ ١١ء = ٢٢

∴ ء = ٢ ، أ = ٢

∴ المتتابعة هى : (٢ ، ٤ ، ٦ ، ...)

١٩

∵ أ + ٥ء = ٢٠ (١)

، $\frac{أ + ٢ء}{أ + ٩ء} = \frac{٤}{٧}$

∴ ٧أ + ١٤ء = ٤أ + ٣٦ء

∴ ٣أ - ٢٢ء = ٠ (٢)

بضرب (١) × ٣ والجمع على (٢) :

∴ ٦أ = ٦٠ ∴ أ = ١٠ ، ء = ٢

∴ المتتابعة هى : (١٠ ، ١٢ ، ١٤ ، ...)

٢٠

∵ (أ + ء) + (أ + ٤ء) = ٤

∴ ٢أ + ٥ء = ٤ ∴ أ = $\frac{٤ - ٥ء}{٢}$ (١)

، ∵ (أ + ٢ء) (أ + ٥ء) = ٧ (٢)

، بالتعويض من (١) فى (٢) :

∴ $\left(\frac{٤ - ٥ء}{٢} + \frac{٤ء}{٢}\right)\left(\frac{٤ - ٥ء}{٢} + \frac{١٠ء}{٢}\right) = ٧$

∴ (٤ - ء) (٤ + ٥ء) = ٢٨

∴ ١٦ + ١٦ء - ٥ء^{٢} - ٢٨ = صفر

∴ ٥ء^{٢} - ١٦ء + ١٢ = صفر

∴ (٥ء - ٦) (ء - ٢) = صفر

∴ ء = $\frac{٦}{٥}$ ومنها أ = -١ أ، ء = ٢ ومنها أ = -٣

∴ المتتابعة هى : (-١ ، $\frac{١}{٥}$ ، $\frac{٧}{٥}$ ، ...)

أ، (-٣ ، -١ ، ١ ، ...)

٢١

∵ أ + ء + أ + ٣ء = ٤٢ ∴ ٢أ + ٤ء = ٤٢

∴ أ + ٢ء = ٢١ (١)

، (أ + ٢ء) (أ + ٤ء) = ٣١٥

، من (١) ∴ ٢١ (أ + ٤ء) = ٣١٥

∴ أ + ٤ء = ١٥ (٢)

بطرح (١) من (٢) :

∴ ٢ء = -٦ ∴ ء = -٣ ، أ = ٢٧

∴ المتتابعة هى : (٢٧ ، ٢٤ ، ٢١ ، ...)

٢٢

∵ (أ + ء) + (أ + ٢ء) = ١٥

∴ ٢أ + ٣ء = ١٥ ∴ أ = $\frac{١٥ - ٣ء}{٢}$ (١)

، ∵ $ع_{٥}^{٢}$ = ٢٢٥ ∴ (أ + ٤ء)^{٢} = ٢٢٥ (٢)

وبالتعويض من (١) فى (٢) :

∴ $\left(\frac{١٥ - ٣ء}{٢} + \frac{٨ء}{٢}\right)^{٢} = ٢٢٥$

∴ $\frac{١٥ + ٥ء}{٢} = \pm ١٥$ ∴ ء = ٣ ومنها أ = ٣

أ، ء = -٩ (مرفوض لأن المتتابعة متزايدة)

∴ المتتابعة هى : (٣ ، ٦ ، ٩ ، ...)

٢٣

∵ أ (أ + ٢ء) = ٤٥

∴ أ^{٢} + ٢أء = ٤٥ (١)

، ∵ (أ + ء) (أ + ٩ء) - (أ + ٢ء) (أ + ٦ء) = ٢٤

∴ أ^{٢} + ١١أء + ١٨ء^{٢} - أ^{٢} - ٩أء - ١٨ء^{٢} = ٢٤

∴ ٢أء = ٢٤ ∴ أء = ١٢ وبالتعويض فى (١) :

∴ أ^{٢} + ٣٦ = ٤٥ ∴ أ^{٢} = ٩

∴ أ = -٣ (مرفوض) أ، أ = ٣ ومنها ء = ٤

∴ المتتابعة هى : (٣ ، ٧ ، ١١ ، ...)

٢٤

∵ عدد الحدود = ٢١ ∴ $ع_{١١}$ هو الحد الأوسط

∴ أ + ١٠ء = ٣٢ (١)

، $ع_{٢١}$ + $ع_{٢٠}$ + $ع_{١٩}$ = ١٧٧

∴ أ + ٢٠ء + أ + ١٩ء + أ + ١٨ء = ١٧٧

∴ ٣أ + ٥٧ء = ١٧٧

∴ أ + ١٩ء = ٥٩ (٢)

ويطرح (١) من (٢) : ∴ ٩ء = ٢٧

∴ ء = ٣ ومنها أ = ٢

∴ المتتابعة هي : (٢ ، ٥ ، ٨ ، ...)

٢٥

∵ (أ + ء) + (أ + ٢ء) = -٧ ∴ ٢أ + ٣ء = -٧

∴ أ = $\frac{-٧ - ٣ء}{٢}$ (١)

، (أ + ء)^{٢} + (أ + ٢ء)^{٢} = ٢٩ وبالتعويض من (١) :

∴ $\left(\frac{-٧ - ٣ء}{٢} + \frac{٢ء}{٢}\right)^{٢} + \left(\frac{-٧ - ٣ء}{٢} + \frac{٤ء}{٢}\right)^{٢}$ = ٢٩

∴ $\left(\frac{-٧ - ء}{٢}\right)^{٢} + \left(\frac{-٧ + ء}{٢}\right)^{٢}$ = ٢٩

∴ $\frac{٤٩ + ١٤ء + ء^{٢}}{٤} + \frac{٤٩ - ١٤ء + ء^{٢}}{٤}$ = ٢٩

∴ ٩٨ + ٢ء^{٢} = ١١٦

∴ ء^{٢} = ٩ ∴ ء = ± ٣

عندما ء = ٣ فإن أ = -٨

∴ المتتابعة هي : (-٨ ، -٥ ، -٢ ، ...)

، عندما ء = -٣ فإن أ = ١

∴ المتتابعة هي : (١ ، -٢ ، -٥ ، ...)

٢٦

نفرض أن الأعداد هي : أ - ٣ء ، أ - ء ، أ + ء ، أ + ٣ء

∴ (أ - ٣ء) + (أ - ء) + (أ + ء) + (أ + ٣ء) = ٣٦

∴ ٤أ = ٣٦ ∴ أ = ٩

، ∵ (أ - ٣ء)^{٢} + (أ - ء)^{٢} + (أ + ء)^{٢} + (أ + ٣ء)^{٢} = ٣٤٤

∴ ٤أ^{٢} + ٢٠ء^{٢} = ٣٤٤

∴ ٤ × ٨١ + ٢٠ء^{٢} = ٣٤٤

∴ ء^{٢} = ١ ∴ ء = ± ١

∴ الأعداد هي : ٦ ، ٨ ، ١٠ ، ١٢

٢٧

نفرض الثلاثة أعداد هي : أ - ء ، أ ، أ + ء

∴ أ - ء + أ + أ + ء = ٣٣ ∴ ٣أ = ٣٣

∴ أ = ١١

، (أ - ء) (أ) (أ + ء) = ٧٩٢

∴ (أ) (أ^{٢} - ء^{٢}) = ٧٩٢

∴ ١١ (١٢١ - ء^{٢}) = ٧٩٢ ∴ ١٢١ - ء^{٢} = ٧٢

∴ ء^{٢} = ٤٩ ∴ ء = ٧ أو -٧

∴ الأعداد هي : ٤ ، ١١ ، ١٨

٢٨

أول عدد يقبل القسمة على ١١ بين ١١٠ ، ٤٥٠ هو ١٢١ وآخر عدد هو ٤٤٠ نفرض متتابعة حسابية حدها الأول ١٢١ وأساسها ١١ وحدها الأخير ٤٤٠

∴ ٤٤٠ = ١٢١ + ١١ (ن - ١) ∴ ١١ن = ٣٣٠

∴ ن = ٣٠

∴ عدد الأعداد المطلوبة = ٣٠ عددًا

٢٩

∵ أ = ٣ ، ٣ + (ن - ١) ء = ٣٩

∴ ن ء - ء = ٣٦ ∴ ٢ن ء - ٢ء = ٧٢ (١)

، ٣ + (٢ن - ١) ء = ٧٩

∴ ٢ن ء - ء = ٧٦ (٢)

بطرح (١) من (٢) : ∴ ء = ٤

∴ ٤ن - ٤ = ٣٦ ∴ ن = ١٠

∴ المتتابعة هي : (٣ ، ٧ ، ١١ ، ...)

٣٠

∵ أ = ٧ ، ح$_{١١}$ من البداية = ٤٧

∴ ٧ + ١٠ء = ٤٧ ∴ ء = ٤

، ∵ ح$_{١١}$ من النهاية = ٣٩٥

∴ ل - ١٠ء = ٣٩٥ ∴ ل - ٤٠ = ٣٩٥

∴ ل = ٤٣٥

∴ (ح$_{ن}$) = (٧ ، ١١ ، ١٥ ، ... ، ٤٣٥)

٣١

∵ ح$_{٢ن}$ = ٣ ح$_{ن}$

∴ أ + (٢ن - ١) ء = ٣أ + ٣ (ن - ١) ء

∴ أ + ٢ن ء - ء = ٣أ + ٣ن ء - ٣ء

∴ ء = أ = ٨

∴ المتتابعة هي : (٨ ، ١٦ ، ٢٤ ، ...)

٣٢

نفرض أن الأعداد هي :

أ - ٣ء ، أ - ء ، أ + ء ، أ + ٣ء

، ∵ مجموعهم = ٤٤ ∴ ٤أ = ٤٤ ∴ أ = ١١

∴ الأعداد هي :

١١ - ٣ء ، ١١ - ء ، ١١ + ء ، ١١ + ٣ء

وبإضافة ٢ للعدد الثاني فإن الأول والثاني والرابع في تتابع حسابي

∴ (١١ - ٣ء) ، (١١ - ء + ٢) ، (١١ + ٣ء)

في تتابع حسابي

∴ (١١ - ء + ٢) - (١١ - ٣ء)

= (١١ + ٣ء) - (١١ - ء + ٢)

∴ ٢ء + ٢ = ٤ء - ٢ ∴ ء = ٢

∴ الأعداد هي : ٢ ، ٨ ، ١٤ ، ٢٠

٣٣

∵ س ، ص ، ع في تتابع حسابي

∴ ص - س = ع - ص (١)

، (٣ص + ١) - (٣س + ١) = ٣ (ص - س) (٢)

، (٣ع + ١) - (٣ص + ١) = ٣ (ع - ص) (٣)

من (١) ، (٢) ، (٣) :

∴ (٣ص + ١) - (٣س + ١)

= (٣ع + ١) - (٣ص + ١)

∴ ٣س + ١ ، ٣ص + ١ ، ٣ع + ١

تكون متتابعة حسابية.

٣٤

نفرض أن العددين : س ، ص

∴ س + ص = ٢٢ ∴ ص = ٢٢ - س (١)

، س^{٢} + ص^{٢} = ٢٥٠ (٢)

وبالتعويض من (١) في (٢) :

∴ س^{٢} + (٢٢ - س)^{٢} = ٢٥٠

∴ ٢س^{٢} - ٤٤س + ٢٣٤ = ٠

∴ س^{٢} - ٢٢س + ١١٧ = ٠

∴ (س - ٩) (س - ١٣) = ٠

∴ س = ٩ ومنها ص = ١٣ أو س = ١٣ ومنها ص = ٩

∴ العددان هما : ٩ ، ١٣

٣٥

∵ أ = ٢٧ ، ح$_{١٨}$ = -٢٤ ∴ ٢٧ + ١٧ء = -٢٤

∴ ١٧ء = -٥١ ∴ ء = -٣

∴ الأوساط هي : (٢٤ ، ٢١ ، ... ، -٢١)

٣٦

∵ أ = لو ٢ ، ح$_{١٠}$ = لو ١٠٢٤ = لو ٢^{١٠} = ١٠ لو ٢

∴ لو ٢ + ٩ء = ١٠ لو ٢

∴ ٩ء = ٩ لو ٢ ∴ ء = لو ٢

∴ الأوساط هي : (٢ لو ٢ ، ٣ لو ٢ ، ... ، ٩ لو ٢)

٣٧

الوسط السابع هو $ح_8$ ، الوسط الثاني هو $ح_3$

∴ $ح_8 = 3\,ح_3$

∴ ١ + ٧ء = ٣ (١ + ٢ء)

∴ ١ + ٧ء = ٣ + ٦ء ∴ ء = ٢

، $ح_{ن+2} = 17$

∴ ١ + ٢ (ن + ١) = ١٧ ∴ ٢ن + ٣ = ١٧

∴ ن = ٧ ∴ عدد الأوساط = ٧

٣٨

∵ أ + ٨ء = ٢٥ (١)

، $ح_4 = 10$ ∴ أ + ٣ء = ١٠ (٢)

بطرح (٢) من (١) : ∴ ٥ء = ١٥

∴ ء = ٣ ، أ = ١

∴ المتتابعة هي : (١ ، ٤ ، ٧ ، ...)

٣٩

∵ $\frac{ح_3 + ح_7}{2} = 19$

∴ أ + ٢ء + أ + ٦ء = ٣٨ ∴ أ + ٤ء = ١٩ (١)

، ∵ $ح_{10} - 2\,ح_4 = 2$

∴ أ + ٩ء - ٢ (أ + ٣ء) = ٢ ∴ - أ + ٣ء = ٢ (٢)

بجمع (١) ، (٢) :

∴ ٧ء = ٢١ ∴ ء = ٣ ، أ = ٧

∴ المتتابعة هي : (٧ ، ١٠ ، ١٣ ، ...)

٤٠

الوسط الثاني هو $ح_3$ ، الوسط الرابع هو $ح_5$ ، الوسط السابع هو $ح_8$ ، الوسط الثالث هو $ح_4$

∴ أ + ٢ء + أ + ٤ء = ١٢

∴ أ + ٣ء = ٦ (١)

، (أ + ٧ء) - (أ + ٣ء) = ٤ ∴ ٤ء = ٤

∴ ء = ١ ومن معادلة (١) : ∴ أ = ٣

∴ المتتابعة هي : (٣ ، ٤ ، ٥ ، ...)

٤١

بفرض أن عدد الأوساط = ن ∴ عدد الحدود = ن + ٢

، أ = ٢ ، $\frac{2 + 2ء}{47 - ء} = \frac{2}{11}$

∴ ٢٢ + ٢٢ء = ٩٤ - ٢ء ∴ ٢٤ء = ٧٢

∴ ء = ٣ ، ∵ $ح_{ن+2} = 47$

∴ ٢ + ٣ (ن + ١) = ٤٧ ∴ ن = ١٤

∴ عدد الأوساط = ١٤

٤٢

بفرض أن عدد الأوساط = ن

∴ عدد الحدود = ن + ٢

∵ أ = ٢٠

، (٢٠ + ١٥ء) + (٢٠ + ٢٠ء) = ٥ (٢٠ + ٥ء)

∴ ٤٠ + ٣٥ء = ١٠٠ + ٢٥ء

∴ ١٠ء = ٦٠ ∴ ء = ٦

، ∵ $ح_{ن+2} = 170$ ∴ ٢٠ + ٦ (ن + ١) = ١٧٠

∴ ن = ٢٤ ∴ عدد الأوساط = ٢٤

٤٣

بفرض أن عدد الأوساط = ن

∴ عدد الحدود = ن + ٢

∵ أ = ٦ ، $ح_{ن+2} = 36$

∴ $\frac{(6 + ء) + (6 + 2ء)}{(36 - ء) + (36 - 2ء)} = \frac{1}{3}$

∴ $\frac{12 + 3ء}{72 - 3ء} = \frac{1}{3}$ ∴ $\frac{3(4 + ء)}{3(24 - ء)} = \frac{1}{3}$

∴ ١٢ + ٣ء = ٢٤ - ء ∴ ٤ء = ١٢ ∴ ء = ٣

، ∵ $ح_{ن+2} = 36$ ∴ ٦ + ٣ (ن + ١) = ٣٦

∴ ن = ٩ ∴ عدد الأوساط = ٩

٤٤

∵ (س ، ل ، م ، ص) في تتابع حسابي

∴ ل = س + ء

، م = س + ٢ء ، ص = س + ٣ء

∴ الطرف الأيمن = ل - م

= س + ء - س - ٢ء

= - ء (١)

، الطرف الأيسر = $\frac{1}{3}$ (س - ص)

= $\frac{1}{3}$ (س - س - ٣ء) = - ء (٢)

من (١) ، (٢) : ∴ الطرفان متساويان.

٤٥

∵ (أ ، ب ، ح) في تتابع حسابي

∴ أ + ح = ٢ ب

، ∵ $\frac{1}{ب\,ح} + \frac{1}{أ\,ب} = \frac{أ\,ب + ب\,ح}{أ\,ب^2\,ح} = \frac{ب\,(أ + ح)}{أ\,ب^2\,ح}$

$= \frac{ب \times 2ب}{أ\,ب^2\,ح}$

$= \frac{2}{أ\,ح}$

∴ $\left(\frac{1}{ب\,ح} ، \frac{1}{أ\,ح} ، \frac{1}{أ\,ب}\right)$ في تتابع حسابي

ثالثًا مسائل تقيس مهارات التفكير

١

① (ب) ② (ج) ③ (د) ④ (ج) ⑤ (ج)

⑥ (ب) ⑦ (أ) ⑧ (ب) ⑨ (أ) ⑩ (أ)

إرشادات لحل رقم ١ :

① ∵ ل = ١٠ أ ، ل - ء = (أ + ٣ء) + (أ + ٤ء)

∴ ل - ء = ٢ أ + ٧ء ∴ ل = ٢ أ + ٨ء

∴ ١٠ أ = ٢ أ + ٨ء ∴ ٨ أ = ٨ء

∴ أ = ء

∴ $\frac{ح_6}{ح_3} = \frac{أ + 5ء}{أ + 2ء} = \frac{ء + 5ء}{ء + 2ء} = \frac{6ء}{3ء} = 2$

② ∵ $ء_1$ هو أساس المتتابعة الحسابية

(أ ، $س_1$ ، $س_2$ ، ... ، $س_5$ ، ب)

∴ ب = أ + ٦ $ء_1$ ∴ $ء_1 = \frac{ب - أ}{6}$ (١)

، ∵ $ء_2$ هو أساس المتتابعة الحسابية

(أ ، $ص_1$ ، $ص_2$ ، ... ، $ص_7$ ، ب)

∴ ب = أ + ٨ $ء_2$ ∴ $ء_2 = \frac{ب - أ}{8}$ (٢)

من (١) ، (٢) : ∴ $\frac{ء_1}{ء_2} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$

③ ∵ (س ، ص ، ع) في تتابع حسابي

∴ ٢ ص = س + ع

∴ (س + ٢ ص - ع) (٢ ص + ع - س)
(ع + س - ص)

= (س + س + ع - ع) (س + ع + ع - س)
(٢ ص - ص)

= (٢ س) (٢ ع) (ص) = ٤ س ص ع

④ ∵ مجموع الأبعاد = ١٥

والأبعاد تكون في تتابع حسابي

∴ الأبعاد هي : ٥ - ء ، ٥ ، ٥ + ء

، ∵ حجم متوازي المستطيلات = ١٠٥

∴ ٥ (٥ - ء) (٥ + ء) = ١٠٥

∴ ٢٥ - $ء^2$ = ٢١ ∴ $ء^2$ = ٤ ∴ ء = ± ٢

∴ أبعاد متوازي المستطيلات هي ٣ ، ٥ ، ٧

فإن أكبر الأبعاد طولا يساوى ٧ سم

⑤ ∵ (أ ، ب ، ح ، ك ، هـ) متتابعة حسابية

فإن $\frac{ب + ك}{2}$ = ح ومنها ب + ك = ٢ ح

، $\frac{أ + هـ}{2}$ = ح ومنها أ + هـ = ٢ ح

∴ أ - ٤ ب + ٦ ح - ٤ ك + هـ

= (أ + هـ) - ٤ (ب + ك) + ٦ ح

= ٢ ح - ٤ (٢ ح) + ٦ ح

= ٨ ح - ٨ ح = صفر

⑥ $\because \frac{1}{\text{ب}+\text{حـ}}$ ، $\frac{1}{\text{حـ}+\text{أ}}$ ، $\frac{1}{\text{أ}+\text{ب}}$ في تتابع حسابي

$\therefore \frac{1}{\text{ب}+\text{حـ}} + \frac{1}{\text{أ}+\text{ب}} = \frac{2}{\text{حـ}+\text{أ}}$

$\therefore \frac{\text{أ}+\text{ب}+\text{ب}+\text{حـ}}{(\text{ب}+\text{حـ})(\text{أ}+\text{ب})} = \frac{2}{\text{حـ}+\text{أ}}$

$\therefore (\text{أ}+2\text{ب}+\text{حـ})(\text{حـ}+\text{أ}) = 2(\text{ب}+\text{حـ})(\text{أ}+\text{ب})$

$\therefore \text{أحـ} + \text{أ}^2 + 2\text{بحـ} + 2\text{أب} + \text{حـ}^2 + \text{أحـ} = 2\text{أب} + 2\text{ب}^2 + 2\text{أحـ} + 2\text{بحـ}$

$\therefore \text{أ}^2 + \text{حـ}^2 = 2\text{ب}^2 \quad \therefore \text{ب}^2 = \frac{\text{أ}^2+\text{حـ}^2}{2}$

$\therefore (\text{أ}^2 ، \text{ب}^2 ، \text{حـ}^2)$ في تتابع حسابي

⑦ $\because 2 < \text{ء} < 7$

$\therefore$ ء يمكن أن يكون ٣ أ ٤ أ ٥ أ ٦

لأن حدود المتتابعة اعداد صحيحة

، $\because$ الفرق بين أى حدين فى المتتابعة هو أحد مضاعفات العدد ء

$\therefore (166 - 115)$ لابد أن يقبل القسمة على ء

$\therefore$ العدد ٥١ يقبل القسمة على ء $\quad \therefore \text{ء} = 3$

⑧ $\because$ لو$_2$ ٢ ، لو$_2 (2^{س} - 5)$ ، لو$_2 (2^{س} - \frac{7}{2})$

، في تتابع حسابي

$\therefore$ لو$_2$ ٢ + لو$_2 (2^{س} - \frac{7}{2}) = 2$ لو$_2 (2^{س} - 5)$

$\therefore$ لو$_2$ ٢$(2^{س} - \frac{7}{2}) =$ لو$_2 (2^{س} - 5)^2$

$\therefore (2^{س} - 5)^2 = 2 \times 2^{س} - 7$

$\therefore 2^{2س} - 10 \times 2^{س} + 25 - 2 \times 2^{س} + 7 = 0$

$\therefore 2^{2س} - 12 \times 2^{س} + 32 = 0$

$\therefore (2^{س} - 8)(2^{س} - 4) = 0$

$\therefore 2^{س} = 8 = 2^3$ ومنها س = ٣

أ، $2^{س} = 4 = 2^2$ ومنها س = ٢ (مرفوض)

⑨ بالتعويض عن ن = −١ فى المقدار $\frac{\text{أ}^{ن+1} + \text{ب}^{ن+1}}{\text{أ}^{ن} + \text{ب}^{ن}}$

يكون مساويًا $\frac{\text{أ}+\text{ب}}{1+1} = \frac{\text{أ}+\text{ب}}{2}$

أى يكون وسط حسابى بين أ ، ب

⑩ بفرض أن $\text{ح}_{ن}$ من المتتابعة الأولى = $\text{ح}_{ك}$ من المتتابعة الثانية

$\therefore 3 + (ن - 1) \times 4 = 2 + (ك - 1) \times 7$

$\therefore ك = \frac{4}{7}(ن + 1)$

$\because$ ك عدد صحيح موجب

$\therefore (ن + 1)$ من مضاعفات العدد ٧

$\therefore ن + 1 = 7 \quad \therefore ن = 6$

$\therefore$ الحد المشترك الأول $= 3 + 5 \times 4 = 23$

أ، $ن + 1 = 14 \quad \therefore ن = 13$

$\therefore$ الحد المشترك الثانى $= 3 + 12 \times 4 = 51$

أ، $ن + 1 = 21 \quad \therefore ن = 20$

$\therefore$ الحد المشترك الثالث $= 3 + 19 \times 4 = 79$

$\therefore$ متتابعة الحدود المشتركة هى :

(٢٣ ، ٥١ ، ٧٩ ، ... ، ل) حيث ل ≤ 407

$\therefore 23 + (ن - 1) \times 28 \le 407$

$\therefore ن - 1 \le 13\frac{5}{7} \quad \therefore ن \le 14\frac{5}{7}$

$\therefore$ عدد الحدود المشتركة = ١٤ حدًا.

٢

① الطرف الأيمن

$= \frac{1}{\text{ء}}\left[\frac{\text{ء}}{\text{ح}_1\text{ح}_2} + \frac{\text{ء}}{\text{ح}_2\text{ح}_3} + \dots + \frac{\text{ء}}{\text{ح}_{ن-1}\text{ح}_{ن}}\right]$

$= \frac{1}{\text{ء}}\left[\frac{\text{ح}_2-\text{ح}_1}{\text{ح}_1\text{ح}_2} + \frac{\text{ح}_3-\text{ح}_2}{\text{ح}_2\text{ح}_3} + \dots + \frac{\text{ح}_{ن}-\text{ح}_{ن-1}}{\text{ح}_{ن-1}\text{ح}_{ن}}\right]$

$= \frac{1}{\text{ء}}\left[\frac{1}{\text{ح}_1} - \frac{1}{\text{ح}_2} + \frac{1}{\text{ح}_2} - \frac{1}{\text{ح}_3} + \dots + \frac{1}{\text{ح}_{ن-1}} - \frac{1}{\text{ح}_{ن}}\right]$

$= \frac{1}{\text{ء}}\left[\frac{1}{\text{ح}_1} - \frac{1}{\text{ح}_{ن}}\right] = \frac{1}{\text{ء}}\left[\frac{\text{ح}_{ن}-\text{ح}_1}{\text{ح}_1\text{ح}_{ن}}\right]$

$= \frac{1}{\text{ء}} \times \frac{\text{أ} + (ن-1)\text{ء} - \text{أ}}{\text{ح}_1\text{ح}_{ن}}$

$= \frac{1}{\text{ء}} \times \frac{(ن-1)\text{ء}}{\text{ح}_1\text{ح}_{ن}} = \frac{ن-1}{\text{ح}_1\text{ح}_{ن}}$

② الطرف الأيمن $= \frac{\sqrt{\text{ح}_2} - \sqrt{\text{ح}_1}}{(\sqrt{\text{ح}_2} + \sqrt{\text{ح}_1})(\sqrt{\text{ح}_2} - \sqrt{\text{ح}_1})}$

$+ \frac{\sqrt{\text{ح}_3} - \sqrt{\text{ح}_2}}{(\sqrt{\text{ح}_3} + \sqrt{\text{ح}_2})(\sqrt{\text{ح}_3} - \sqrt{\text{ح}_2})}$

$+ \dots + \frac{\sqrt{\text{ح}_{ن}} - \sqrt{\text{ح}_{ن-1}}}{(\sqrt{\text{ح}_{ن}} + \sqrt{\text{ح}_{ن-1}})(\sqrt{\text{ح}_{ن}} - \sqrt{\text{ح}_{ن-1}})}$

$= \frac{\sqrt{\text{ح}_2} - \sqrt{\text{ح}_1}}{\text{ح}_2 - \text{ح}_1} + \frac{\sqrt{\text{ح}_3} - \sqrt{\text{ح}_2}}{\text{ح}_3 - \text{ح}_2}$

$+ \dots + \frac{\sqrt{\text{ح}_{ن}} - \sqrt{\text{ح}_{ن-1}}}{\text{ح}_{ن} - \text{ح}_{ن-1}}$

$= \frac{\sqrt{\text{ح}_2} - \sqrt{\text{ح}_1}}{\text{ء}} + \frac{\sqrt{\text{ح}_3} - \sqrt{\text{ح}_2}}{\text{ء}}$

$+ \dots + \frac{\sqrt{\text{ح}_{ن}} - \sqrt{\text{ح}_{ن-1}}}{\text{ء}} = \frac{1}{\text{ء}}\left[\sqrt{\text{ح}_{ن}} - \sqrt{\text{ح}_1}\right]$

$= \frac{1}{\text{ء}} \times \frac{(\sqrt{\text{ح}_{ن}} - \sqrt{\text{ح}_1})(\sqrt{\text{ح}_{ن}} + \sqrt{\text{ح}_1})}{(\sqrt{\text{ح}_{ن}} + \sqrt{\text{ح}_1})}$

$= \frac{1}{\text{ء}} \times \frac{\text{ح}_{ن} - \text{ح}_1}{\sqrt{\text{ح}_{ن}} + \sqrt{\text{ح}_1}}$

$= \frac{1}{\text{ء}} \times \frac{(ن-1)\text{ء}}{\sqrt{\text{ح}_{ن}} + \sqrt{\text{ح}_1}} = \frac{ن-1}{\sqrt{\text{ح}_1} + \sqrt{\text{ح}_{ن}}}$

تطبيقات على المتتابعة الحسابية

١

$(\text{ح}_{ن}) = (100 ، 220 ، 340 ، \dots)$

$\therefore \text{ح}_{10} = \text{أ} + 9\text{ء} = 100 + 9 \times 120 = 1180$ سم

٢

$\because 120ن + 80 = 1400 \quad \therefore ن = 11$

$\therefore$ عدد الأقساط = ١١

٣

نفرض أن قياسات الزوايا هى أ ، ب ، حـ مرتبة تصاعديًا

، ب هو الوسط الحسابى بين أ ، حـ

$\therefore 2\text{ب} = \text{أ} + \text{حـ}$ ولكن $\text{أ} + \text{ب} + \text{حـ} = 180°$

$\therefore 2\text{ب} + \text{ب} = 180°$ ومنها $\text{ب} = 60°$

ولكن $\text{حـ} - \text{أ} = 80°$ ، $\text{حـ} + \text{أ} = 120°$

$\therefore \text{حـ} = 100°$ ، $\text{أ} = 20°$

٤

$\because 2\text{أ} = \text{ب} + \text{حـ}$ (1)

$\therefore \text{ب} = 2\text{أ} - \text{حـ}$

، $\because \text{ب}^2 = \text{أ}^2 + \text{حـ}^2 \quad \therefore (2\text{أ} - \text{حـ})^2 = \text{أ}^2 + \text{حـ}^2$

$\therefore 4\text{أ}^2 - 4\text{أحـ} + \text{حـ}^2 = \text{أ}^2 + \text{حـ}^2$

$\therefore 3\text{أ}^2 = 4\text{أحـ}$

$\therefore \text{أ} = \frac{4\text{حـ}}{3}$

$\therefore 2\text{أ} = \frac{8\text{حـ}}{3}$

ومن (1) : $\therefore \frac{8\text{حـ}}{3} = \text{ب} + \text{حـ}$

$\therefore \text{ب} = \frac{5\text{حـ}}{3}$

$\therefore \text{أ} : \text{ب} : \text{حـ} = \frac{4\text{حـ}}{3} : \frac{5\text{حـ}}{3} : \text{حـ} = 4 : 5 : 3$

إجابات تمارين 4

أولا أسئلة الاختيار من متعدد

① (حـ) ② (حـ) ③ (حـ) ④ (أ) ⑤ (ب)

⑥ (ب) ⑦ (د) ⑧ (حـ) ⑨ (د) ⑩ (ب)

⑪ (د) ⑫ (د) ⑬ (حـ) ⑭ (د) ⑮ (ب)

⑯ (ب) ⑰ (د) ⑱ (حـ) ⑲ (د) ⑳ (أ)

(٢١) (د) (٢٢) (ب) (٢٣) (جـ) (٢٤) (جـ) (٢٥) (جـ)
(٢٦) (د) (٢٧) (أ) (٢٨) (ب) (٢٩) (ب) (٣٠) (جـ)
(٣١) (جـ) (٣٢) (ب) (٣٣) (جـ) (٣٤) (جـ) (٣٥) (ب)
(٣٦) (د) (٣٧) (جـ) (٣٨) (د) (٣٩) (ب) (٤٠) (جـ)
(٤١) (أ) (٤٢) (ب) (٤٣) (د) (٤٤) (جـ) (٤٥) (ب)
(٤٦) (جـ) (٤٧) (جـ) (٤٨) (جـ) (٤٩) (ب) (٥٠) (د)
(٥١) (د) (٥٢) **أولًا** : (أ) **ثانيًا** : (د) **ثالثًا** : (جـ)
(٥٣) **أولًا** : (ب) **ثانيًا** : (جـ)
(٥٤) **أولًا** : (ب) **ثانيًا** : (أ)
(٥٥) (د) (٥٦) (ب) (٥٧) (ب) (٥٨) (د) (٥٩) (د)
(٦٠) (أ) (٦١) (د) (٦٢) (جـ) (٦٣) (جـ) (٦٤) (أ)
(٦٥) (جـ) (٦٦) (د) (٦٧) (ب) (٦٨) (ب) (٦٩) (أ)
(٧٠) (د) (٧١) (د) (٧٢) (ب) (٧٣) (أ) (٧٤) (ب)

ثانيًا الأسئلة المقالية

١

① ∵ حن = أ + (ن − ١) ء
∴ ٨٠ = ٢ + (ن − ١) × ٣   ∴ ن = ٢٧
∴ جـ٢٧ = ٢٧/٢ [٢ + ٨٠] = ١١٠٧

② الأعداد الصحيحة التي تقبل القسمة على ٧ هي : (٧ ، ١٤ ، ٢١ ، ..... ، ٩٩٤)
∴ أ = ٧ ، ل = ٩٩٤ ، ء = ٧
، ∵ حن = أ + (ن − ١) ء
∴ ٩٩٤ = ٧ + (ن − ١) × ٧   ∴ ن = ١٤٢
∴ جـ١٤٢ = ١٤٢/٢ [٧ + ٩٩٤] = ٧١٠٧١

③ الحدود فردية الرتبة هي : (ح١ ، ح٣ ، ح٥ ، .....)
∵ حن = ١١٠
∴ ٢ + (ن − ١) × ٣ = ١١٠
∴ ن = ٣٧ وهو عدد فردى
∴ متتابعة الحدود الفردية الرتبة هى : (٢ ، ٨ ، ١٤ ، ..... ، ١١٠)
∴ أ = ٢ ، ل = ١١٠ ، ء = ٦
، ∵ حن = أ + (ن − ١) ء
∴ ١١٠ = ٢ + (ن − ١) × ٦   ∴ ن = ١٩
∴ جـ١٩ = ١٩/٢ [٢ + ١١٠] = ١٠٦٤

④ ∵ حن = أ + (ن − ١) ء
∴ ٧١ = ٨ + ٣ (ن − ١)
∴ ن = ٢٢   ∴ عدد نصف الحدود = ١١ حدًا
∴ المجموع المطلوب هو مجموع حدود المتتابعة المعطاة من ح١٢ إلى ح٢٢ وعددهم ١١ حدًا
، ∵ ح١٢ = ٨ + ١١ × ٣ = ٤١
∴ المجموع المطلوب = ١١/٢ [٤١ + ٧١] = ٦١٦

⑤ ∵ ل = −١٢٧   ∴ −١٢٧ = ٢٥ + (ن − ١) × −٤
∴ ن = ٣٩   ∴ الثلث الأخير مكون من ١٣ حدًا
∴ جـ١٣ حدًا الأخيرة = ١٣/٢ [٢ ل + (١٣ − ١) × −ء]
= ١٣/٢ [٢ × −١٢٧ + ١٢ × ٤] = −١٣٣٩

٢

∵ ن/٢ [٨٠ − ٤ (ن − ١)] = ٢٠٨
∴ ن [٨٤ − ٤ن] = ٤١٦
∴ ن٢ − ٢١ن + ١٠٤ = ٠
∴ (ن − ١٣) (ن − ٨) = ٠   ∴ ن = ٨ أو ن = ١٣
التفسير هو أن مجموع الحدود : ح٩ ، ح١٠ ، ح١١ ، ح١٢ ، ح١٣ يساوى صفر.

٣

① حن > صفر   ∴ −١١٥ + (ن − ١) × ٦ > ٠
∴ −١١٥ + ٦ن − ٦ > ٠
∴ ن > ٢٠ ١/٦   ∴ ح٢١ هو أول حد موجب

② جـن > ٠
∴ ن/٢ [−٢٣٠ + (ن − ١) × ٦] > ٠
∴ −٢٣٠ + (ن − ١) × ٦ > ٠
∴ −٢٣٠ + ٦ن − ٦ > ٠   ∴ ن > ٣٩ ١/٣
∴ ن = ٤٠ أو ٤١ أو ٤٢ أو .....
∴ أقل عدد من الحدود يعطى مجموعًا موجبًا هو ٤٠ حدًا.

٤

بوضع ن = ١
∴ أ = ح١ = ١٤٣ ، ء = −٩ ، بفرض حن < ٠
∴ ١٤٣ + (ن − ١) × −٩ < ٠
∴ ن > ١٦ ٨/٩   ∴ ن = ١٧ أو ١٨ أو ١٩ أو .....
∴ أول حد سالب هو ح١٧
، ∵ أكبر مجموع هو مجموع الحدود الموجبة فقط
∴ جـ١٦ = ١٦/٢ [٢ × ١٤٣ + ١٥ × −٩] = ١٢٠٨

٥

① ∵ جـن = ٥٤٥   ∴ ن/٢ [٢٣ + ٨٦] = ٥٤٥
∴ ن = ١٠   ∴ ح١٠ = ٨٦
∴ ٢٣ + ٩ء = ٨٦   ∴ ء = ٧
∴ المتتابعة هى : (٢٣ ، ٣٠ ، ٣٧ ، ..... ، ٨٦)

② ∵ جـن = −٥٨٥
∴ ن/٢ [١٧ + (−٩٥)] = −٥٨٥
∴ ن = ١٥   ∴ ح١٥ = −٩٥
∴ ١٧ + ١٤ء = −٩٥   ∴ ء = −٨
∴ المتتابعة هى : (١٧ ، ٩ ، ١ ، ..... ، −٩٥)

٦

أ = ٤٢ ، ح١٩ = −١٢   ∴ ٤٢ + ١٨ء = −١٢
∴ ء = −٣
∴ المتتابعة هى : (٤٢ ، ٣٩ ، ٣٦ ، ..... ، −١٢)
، بفرض حن < ٠   ٤٢ + (ن − ١) (−٣) < ٠
∴ −٣ن < −٤٥   ∴ ن > ١٥
∴ ن = ١٦ أو ١٧ أو ١٨ أو .....
∴ أول حد سالب هو ح١٦
، جـ١٩ = ١٩/٢ [٤٢ + (−١٢)] = ٢٨٥

٧

∵ ح٣ + ح٥ = ٢٢   ∴ أ + ٢ء + أ + ٤ء = ٢٢
∴ أ + ٣ء = ١١ (١) ، ح٧ − ح٤ = ٩
∴ (أ + ٦ء) − (أ + ٣ء) = ٩
∴ ٣ء = ٩   ∴ ء = ٣
ومن (١) : ∴ أ = ٢
∴ المتتابعة هى : (٢ ، ٥ ، ٨ ، .....)
، جـ٢٥ = ٢٥/٢ [٢ × ٢ + ٢٤ × ٣] = ٩٥٠

٨

∵ أ + ل = ٣٦ ، ن/٢ [أ + ل] = ٤٦٨
∴ ن/٢ (٣٦) = ٤٦٨   ∴ ن = ٢٦
، ح١٠ = ٤٧   ∴ أ + ٩ء = ٤٧   (١)
، ∵ ٢٦/٢ [٢أ + ٢٥ء] = ٤٦٨
∴ ٢أ + ٢٥ء = ٣٦   (٢)
من (١) ، (٢) ينتج أن : أ = ٨٣ ، ء = −٤
∴ المتتابعة هى : (٨٣ ، ٧٩ ، ٧٥ ، .....)

٩

∵ ح٢ + ح٤ = ٢٢٢   ∴ ٢أ + ٤ء = ٢٢٢   (١)
، ∵ جـ١٠ = ١٠٢٠   ∴ ١٠/٢ (٢أ + ٩ء) = ١٠٢٠
∴ ٢أ + ٩ء = ٢٠٤   (٢)

بطرح (١) من (٢) : ∴ ٨ د = -١٦   ∴ د = -٢

وبالتعويض فى (١) : ∴ أ = ١١٢

∴ المتتابعة هى : (١١٢ ، ١١٠ ، ١٠٨ ، .....)

، وبوضع حـن < ٠

∴ ن/٢ [٢ أ + (ن - ١) د] < ٠

∴ ٢ أ + (ن - ١) د < ٠

∴ ٢٢٤ - ٢ (ن - ١) < ٠   ∴ ن > ١١٣

∴ عدد الحدود المطلوبة = ١١٤ حدًا.

١٠

∵ أ = ٢٩ ، ح٢ = ٥ ح٧

∴ أ + د = ٥ (أ + ٦ د)   ∴ ٢٩ د = -٤ أ

∴ ٢٩ د = -٤ (٢٩)   ∴ د = -٤

∴ المتتابعة هى : (٢٩ ، ٢٥ ، ٢١ ، .....)

، المجموع يكون أكبر ما يمكن عند أخذ كل الحدود الموجبة فقط

∴ حن > صفر   ∴ أ + (ن - ١) د > صفر

∴ ٢٩ - ٤ (ن - ١) > صفر

∴ ن < ٣٣/٤   ∴ ن = ٨ أو ٧ أو .....

∴ رتبة آخر حد موجب هى ٨

∴ عدد الحدود التى يجب أخذها بدءًا من الحد الأول ليكون المجموع أكبر ما يمكن هو ٨

١١

∵ ح٢٠ = ٤١   ∴ أ + ١٩ د = ٤١   (١)

، ∵ ح٣ + ح٦ - ح٩ = ١

∴ أ + ٢ د + أ + ٥ د - أ - ٨ د = ١

∴ أ - د = ١   (٢)

بطرح (٢) من (١) : ∴ ٢٠ د = ٤٠

∴ د = ٢ ، أ = ٣

∴ المتتابعة هى : (٣ ، ٥ ، ٧ ، .....)

وبفرض عدد الحدود المطلوبة ن   ∴ حـن = ٤٤٠

∴ ن/٢ [٦ + ٢ (ن - ١)] = ٤٤٠

∴ ن (ن + ٢) = ٤٤٠

∴ ن² + ٢ ن - ٤٤٠ = صفر

∴ (ن + ٢٢) (ن - ٢٠) = صفر   ∴ ن = ٢٠ حدًا.

١٢

∵ ح١ - ٢ ح٥ = ٢   ∴ أ - ٢ (أ + ٤ د) = ٢

∴ -أ - ٨ د = ٢   (١)

، ∵ (أ + ٢ د + أ + ٥ د)/٢ = ١٦

∴ ٢ أ + ٧ د = ٣٢   (٢)

من (١) ، (٢) ينتج أن : أ = ٣٠ ، د = -٤

∴ المتتابعة هى : (٣٠ ، ٢٦ ، ٢٢ ، .....)

، حـن = ٠

∴ ن/٢ [٢ × ٣٠ + (ن - ١) × -٤] = ٠

∴ ٦٠ - ٤ ن + ٤ = ٠   ∴ ن = ١٦

١٣

∵ حـ٣ = ٣٠   ∴ ٣/٢ [٢ أ + ٢ د] = ٣٠

∴ ٣ أ + ٣ د = ٣٠   ∴ أ + د = ١٠

∴ أ = ١٠ - د   (١)

، ∵ ح٤ ح٦ = ٣٠٠

∴ (أ + ٢ د) (أ + ٣ د) = ٣٠٠   (٢)

وبالتعويض من (١) فى (٢) :

∴ (١٠ - د + ٢ د) (١٠ - د + ٣ د) = ٣٠٠

∴ (١٠ + د) (١٠ + ٢ د) = ٣٠٠

∴ ١٠٠ + ٣٠ د + ٢ د² = ٣٠٠

∴ د² + ١٥ د - ١٠٠ = ٠

∴ (د + ٢٠) (د - ٥) = ٠

∴ د = -٢٠ (مرفوض) أو د = ٥

، من (١) : ∴ أ = ٥

∴ المتتابعة هى : (٥ ، ١٠ ، ١٥ ، .....)

، حـ١٥ = ١٥/٢ [٢ × ٥ + ١٤ × ٥] = ٦٠٠

١٤

∵ حـ١١ = ٣٠٨   ∴ ١١/٢ (٢ أ + ١٠ د) = ٣٠٨

∴ أ + ٥ د = ٢٨   (١)

، ∵ ح٢ × ح٦ = ٢٢٤

∴ (أ + د) (أ + ٥ د) = ٢٢٤   (٢)

من (١) ، (٢) : ∴ (٢٨ - ٤ د) (٢٨) = ٢٢٤

∴ د = ٥

ومن (١) : ∴ أ = ٣

∴ المتتابعة هى : (٣ ، ٨ ، ١٣ ، .....)

١٥

∵ ح٣ + ح٥ = ٢٤   ∴ ٢ أ + ٦ د = ٢٤

∴ أ + ٣ د = ١٢   (١)

، ∵ (ح٦)² = ٣٢٤   ∴ (أ + ٥ د)² = ٣٢٤

وبالتعويض من (١) : ∴ (١٢ + ٢ د)² = ٣٢٤

∴ (٦ + د)² = ٨١

∴ ٣٦ + ١٢ د + د² - ٨١ = ٠

∴ د² + ١٢ د - ٤٥ = ٠   ∴ (د + ١٥) (د - ٣) = ٠

∴ د = -١٥ أو د = ٣

، ∵ المتتابعة تزايدية   ∴ د = ٣ ومنها أ = ٣

∴ المتتابعة هى : (٣ ، ٦ ، ٩ ، .....)

، حـ٢٠ = ٢٠/٢ [٦ + ١٩ × ٣] = ٦٣٠

١٦

∵ ح٣٦ = ٠   ∴ أ + ٣٥ د = ٠

∴ أ = -٣٥ د   (١)

، ∵ حـن = ٢ حـ٥

∴ ن/٢ [٢ أ + (ن - ١) د] = ٥ (٢ أ + ٤ د)

∴ ن/٢ [٢ أ + ن د - د] = ٥ (٢ أ + ٤ د)

، من معادلة (١) :

∴ ن/٢ [٢ × -٣٥ د + ن د - د] = ٥ [٢ × -٣٥ د + ٤ د]

∴ ن/٢ [-٧١ د + ن د] = ٥ [-٦٦ د]

∴ -٧١ ن د + ن² د = -٦٦٠ د   (وبالقسمة ÷ د)

∴ ن² - ٧١ ن + ٦٦٠ = ٠

∴ (ن - ١١) (ن - ٦٠) = ٠

∴ ن = ١١ أو ن = ٦٠

١٧

∵ الوسط السابع هو ح٨ ، الوسط الأخير = ل - د

∴ (١ + ٧ د)/(٣١ - د) = ١٥/٢٩

∴ ٢٩ + ٢٠٣ د = ٤٦٥ - ١٥ د

∴ د = ٢

∴ الأوساط هى : (٣ ، ٥ ، ٧ ، ..... ، ٢٩)

، ∵ حـن+٢ = ٣١

∴ ١ + (ن + ١) × ٢ = ٣١

∴ عدد الأوساط = ن = ١٤ وسطًا

، حـ١٦ = ١٦/٢ [١ + ٣١] = ٢٥٦

١٨

∵ حـ٧ الأولى = ٢٤٥   ∴ ٧/٢ [٢ أ + ٦ د] = ٢٤٥

∴ أ + ٣ د = ٣٥   (١)

، $\because$ حـ$_٧$ التالية = ٩٨ وأولها هو ع$_٨$

$\therefore \frac{٧}{٢}[٢(أ+٧ء)+٦ء]=٩٨$

$\therefore أ+٧ء+٣ء=١٤ \quad \therefore أ+١٠ء=١٤$ (٢)

وبطرح (٢) من (١) : $\therefore -٧ء=٢١$

$\therefore ء=-٣ \quad \therefore أ=٤٤$

$\therefore$ المتتابعة هي : (٤٤ ، ٤١ ، ٣٨ ، ......)

١٩

$\because$ حـ$_ن$ = ٣٢٠

$\therefore \frac{ن}{٢}[٢أ+٢(ن-١)]=٣٢٠$

$\therefore ن(أ+ن-١)=٣٢٠$

$\therefore أن+ن^٢-ن=٣٢٠$ (١)

، $\because$ حـ$_{٢ن}$ = ١١٥٢

$\therefore \frac{٢ن}{٢}[٢أ+٢(٢ن-١)]=١١٥٢$

$\therefore ٢ن(أ+٢ن-١)=١١٥٢$

$\therefore أن+٢ن^٢-ن=٥٧٦$ (٢)

وبطرح (١) من (٢) : $\therefore ن^٢=٢٥٦ \quad \therefore ن=١٦$

وبالتعويض في (١) : $\therefore ١٦أ+٢٥٦-١٦=٣٢٠$

$\therefore أ=٥$

$\therefore$ المتتابعة هي : (٥ ، ٧ ، ٩ ، ......)

وبفرض عدد الحدود المطلوبة ن

$\therefore \frac{ن}{٢}[٢\times٥+٢(ن-١)]=٧٢٥$

$\therefore ٥ن+ن(ن-١)=٧٢٥$

$\therefore ٥ن+ن^٢-ن=٧٢٥$

$\therefore ن^٢+٤ن-٧٢٥=$ صفر

$\therefore (ن-٢٥)(ن+٢٩)=$ صفر $\quad \therefore ن=٢٥$

٢٠

$\because ع_ن=٤ن+٢ \quad \therefore ء=٤ ، أ=٦$

وبفرض عدد حدود المتتابعة = ٣ن

$\therefore$ حـ$_ن$ الأولى $=\frac{ن}{٢}[١٢+٤(ن-١)]$

، $\because ل=أ+(٣ن-١)ء=٦+٤(٣ن-١)$

$=١٢ن+٢$

$\therefore$ حـ$_ن$ الأخيرة $=\frac{ن}{٢}[٢(١٢ن+٢)-٤(ن-١)]$

$\therefore \frac{ن}{٢}[٢(١٢ن+٢)-٤(ن-١)]$

$=٤\times\frac{ن}{٢}[١٢+٤(ن-١)]$

$\therefore ن[(١٢ن+٢)-٢(ن-١)]$

$=٤\times ن[٦+٢(ن-١)]$

$\therefore ١٠ن+٤=٨ن+١٦ \quad \therefore ن=٦$

$\therefore$ عدد الحدود = ١٨ حدًا.

٢١

$\because \frac{١١}{٢}(٢أ+١٠ء)=٢٦٤$

$\therefore أ+٥ء=٢٤$ (١)

، $\frac{١١}{٢}(٢ل-١٠ء)=٣٣٠$

$\therefore ل-٥ء=٣٠$ (٢)

بجمع (١) ، (٢) : $\therefore أ+ل=٥٤$

$\therefore$ مجموع حدود المتتابعة $=\frac{٣٣}{٢}(أ+ل)$

$=\frac{٣٣}{٢}\times٥٤=٨٩١$

، من المعادلة (٢) فإن : $أ+٣٢ء-٥ء=٣٠$

$\therefore أ+٢٧ء=٣٠$ (٣)

بطرح (١) من (٣) : $\therefore ٢٢ء=٦$

$\therefore ء=\frac{٣}{١١} ، أ=\frac{٢٤٩}{١١}$

$\therefore$ مجموع الحدود الخمسة الوسطى

$=ع_{١٥}+ع_{١٦}+ع_{١٧}+ع_{١٨}+ع_{١٩}$

$=٥أ+٨٠ء=٥\times\frac{٢٤٩}{١١}+٨٠\times\frac{٣}{١١}=١٣٥$

٢٢

① الصواب هو : بوضع ع$_ن$ > ٠ لإيجاد عدد الحدود الموجبة. ثم نوجد مجموعها.

② الصواب هو : بوضع ع$_ن$ < ٠ لإيجاد عدد الحدود السالبة ثم نوجد مجموعها.

③ الصواب هو : $\frac{ن}{٢}[٢أ+(ن-١)ء]=٠$ ،

أي أن : $٢أ+(ن-١)ء=٠$ حيث $ن\in ص^+$

④ الصواب هو : ع$_ن$ = حـ$_ن$ − حـ$_{ن-١}$ لكل ن > ١

ثالثًا مسائل تقيس مهارات التفكير

① (ب) ② (جـ) ③ (جـ) ④ (د) ⑤ (جـ)

⑥ (ب) ⑦ (ب) ⑧ (ب) ⑨ (أ) ⑩ (أ)

إرشادات الحل :

① $\because$ عدد الأوساط = ن ، الوسط الأول = (أ + ء)

والوسط الأخير = (ب − ء)

$\therefore$ مجموع هذه الأوساط $=\frac{ن}{٢}[أ+ء+ب-ء]$

$=\frac{ن}{٢}(أ+ب)$

$=ن\left(\frac{أ+ب}{٢}\right)$

② $\because ع_١+ع_٥+ع_{١٠}+ع_{١٦}=٦٤$

$\therefore أ+أ+٤ء+أ+٩ء+أ+١٥ء=٦٤$

$\therefore ٤أ+٢٨ء=٦٤$

$\therefore أ+٧ء=١٦$

، $\because$ حـ$_{١٥}$ الأولى $=\frac{١٥}{٢}[٢أ+١٤ء]$

$=١٥(أ+٧ء)$

$=١٥\times١٦=٢٤٠$

③ $\because$ حـ$_ن$ = حـ$_م$

$\therefore \frac{ن}{٢}[٢أ+(ن-١)ء]=\frac{م}{٢}[٢أ+(م-١)ء]$

$\therefore ٢أن+ن(ن-١)ء=٢أم+م(م-١)ء$

$\therefore ٢أن-٢أم=ء[م(م-١)-ن(ن-١)]$

$\therefore ٢أ(ن-م)=ء[م^٢-م-ن^٢+ن]$

$\therefore ٢أ(ن-م)=ء[(م^٢-ن^٢)-(م-ن)]$

$\therefore ٢أ(ن-م)=ء[(م-ن)(م+ن)-(م-ن)]$

$\therefore ٢أ(ن-م)=ء(م-ن)(م+ن-١)$

$\therefore ٢أ=(-م-ن+١)ء$

$\therefore$ حـ$_{ن+م}=\frac{ن+م}{٢}[٢أ+(ن+م-١)ء]$

$=\frac{ن+م}{٢}[(-م-ن+١)ء$

$+(ن+م-١)ء]$

$=\frac{ن+م}{٢}\times$ صفر = صفر

④ $\because$ المتتابعة هي (١٢٠° ، ١٢٥° ، ١٣٠° ، ...)

$\therefore أ=١٢٠° ، ء=٥°$

$\therefore$ مجموع قياسات الزاوية الداخلة للمضلع

$=(ن-٢)\times١٨٠°$ حيث ن عدد أضلاع المضلع

$\therefore (ن-٢)\times١٨٠°$

$=\frac{ن}{٢}[٢\times١٢٠°+٥(ن-١)]$

$\therefore ١٨٠°ن-٣٦٠°=\frac{ن}{٢}(٢٤٠°+٥ن-٥°)$

$\therefore ١٨٠°ن-٣٦٠°=\frac{ن}{٢}(٥ن+٢٣٥°)$

$\therefore ٣٦٠°ن-٧٢٠°=٥ن^٢+٢٣٥°ن$

$\therefore ٥ن^٢-١٢٥°ن+٧٢٠°=٠$

$\therefore ن^٢-٢٥ن+١٤٤=٠$

$\therefore (ن-١٦)(ن-٩)=٠$

$\therefore ن=١٦$ أو $ن=٩$

$\therefore$ عدد أضلاع المضلع = ٩ أو ١٦

⑤ $\because \frac{حـ_م}{حـ_ن}=\frac{م^٢}{ن^٢} \quad \therefore \frac{\frac{م}{٢}[٢أ+(م-١)ء]}{\frac{ن}{٢}[٢أ+(ن-١)ء]}=\frac{م^٢}{ن^٢}$

$\therefore \frac{٢أ + (م - ١)ء}{٢أ + (ن - ١)ء} = \frac{م}{ن}$

∴ ٢أن + م ن ء − ن ء = ٢أم + م ن ء − م ء

∴ ٢أ(ن − م) = ء(ن − م)   ∴ ء = ٢أ

$\therefore \frac{ح_م}{ح_ن} = \frac{أ + (م - ١)ء}{أ + (ن - ١)ء} = \frac{أ + (م - ١) \times ٢أ}{أ + (ن - ١) \times ٢أ}$

$= \frac{١ + ٢م - ٢}{١ + ٢ن - ٢}$

$= \frac{٢م - ١}{٢ن - ١}$

⑥ ∵ $ح_١^٢ - ح_٢^٢ = (ح_١ - ح_٢)(ح_١ + ح_٢)$
$= -ء(ح_١ + ح_٢)$

، $ح_٣^٢ - ح_٤^٢ = (ح_٣ - ح_٤)(ح_٣ + ح_٤)$
$= -ء(ح_٣ + ح_٤)$

، $ح_{٢ن-١}^٢ - ح_{٢ن}^٢ = (ح_{٢ن-١} - ح_{٢ن})(ح_{٢ن-١} + ح_{٢ن})$
$= -ء(ح_{٢ن-١} + ح_{٢ن})$

وبالجمع ينتج أن :

$ح_١^٢ - ح_٢^٢ + ح_٣^٢ - ح_٤^٢ + ... + ح_{٢ن-١}^٢ - ح_{٢ن}^٢$
$= -ء[ح_١ + ح_٢ + ح_٣ + ح_٤ + ... + ح_{٢ن-١} + ح_{٢ن}]$
$= -ء جـ_{٢ن}$

⑦ ∵ $جـ_{٢ن} = ٣ جـ_ن$

$\therefore \frac{٢ن}{٢}[٢أ + (٢ن - ١)ء] = ٣ \times \frac{ن}{٢}[٢أ + (ن - ١)ء]$

∴ ٢أ + ٢ن ء − ء = ٣أ + $\frac{٣}{٢}$ ن ء − $\frac{٣}{٢}$ ء

∴ $\frac{١}{٢}$ ن ء + $\frac{١}{٢}$ ء = أ   ∴ ٢أ = ء(ن + ١)

$\therefore \frac{جـ_{٣ن}}{جـ_ن} = \frac{\frac{٣ن}{٢}[٢أ + (٣ن - ١)ء]}{\frac{ن}{٢}[٢أ + (ن - ١)ء]}$

$= \frac{٣[ء(ن + ١) + (٣ن - ١)ء]}{[ء(ن + ١) + (ن - ١)ء]}$

$= \frac{٣(ن + ١ + ٣ن - ١)}{(ن + ١ + ن - ١)} = \frac{١٢ن}{٢ن} = ٦$

⑧ المتسلسلة ٢ + ٧ + ١٤ + ٢٣ + ٣٤ + ...
= ٢ + (٢ + ٥) + (٢ + ٥ + ٧)
+ (٢ + ٥ + ٧ + ٩) + ...

نلاحظ أن الحد الذى ترتيبه ن فى المتسلسلة عبارة عن مجموع العدد ٢ إلى مجموع (ن − ١) حدًا من المتتابعة الحسابية (٥ ، ٧ ، ٩ ، ١١ ، ...)

∴ $ح_{٩٩}$ من المتسلسلة

= ٢ + $\frac{٩٨}{٢}$ [٢ × ٥ + ٩٧ × ٢] = ٩٩٩٨

⑨ المتتابعة هى (لو س ، لو س + لو ص ، لو س + ٢ لو ص ، ...)

وهى متتابعة حسابية حدها الأول لو س وأساسها لو ص

∴ $جـ_٩$ = $\frac{٩}{٢}$ [٢ لو س + ٨ لو ص]
= ٩ [لو س + ٤ لو ص]

∴ $جـ_٩$ = ٩ [لو ١٦٠ + لو $(\frac{١}{٢})^٤$]
= ٩ × لو $(١٦٠ \times \frac{١}{١٦})$ = ٩

⑩ ∵ $ح_٢ - ح_١ = ٧$ ، $ح_٣ - ح_٢ = ٩$
$ح_٤ - ح_٣ = ١١$ ، $ح_{٤٩} - ح_{٤٨} = ١٠١$
$ح_{٥٠} - ح_{٤٩} = ١٠٣$

بجمع حدود الطرف الأيمن نجد أن :

$ح_{٥٠} - ح_١$ = ٧ + ٩ + ١١ + ... + ١٠١ + ١٠٣

، ∵ (٧ ، ٩ ، ١١ ، ١٣ ، ... ، ١٠٣) متتابعة حسابية فيها : أ = ٧ ، ء = ٢ ، ل = ١٠٣

$ح_{٥٠}$ − ٥ = $\frac{٤٩}{٢}$ (٧ + ١٠٣) = ٢٦٩٥

$ح_{٥٠}$ = ٢٧٠٠

تطبيقات عملية على المتتابعة الحسابية

١ عدد الكراسى يكون متتابعة حسابية هى : (٢٠ ، ٢٢ ، ٢٤ ، .....)

∴ $جـ_{٢٥}$ = $\frac{٢٥}{٢}$ [٢ × ٢٠ + ٢٤ × ٢] = ١١٠٠ كرسى.

٢ $جـ_{١٥}$ = $\frac{١٥}{٢}$ [٢ × ١٥ + ١٤ × ٢] = ٤٣٥ جنيهًا.

٣ قيمة القرض = $جـ_{١٠}$ = $\frac{١٠}{٢}$ [٢ × ٥٠٠ + ٩ × ٢٠٠]
= ١٤٠٠٠ جنيه.

٤ ما سدده الرجل من دين = ٤٨٠٠٠ × $\frac{١}{٥}$ = ٩٦٠٠ جنيه

∴ $جـ_٥$ = ٩٦٠٠   ∴ $\frac{٥}{٢}$ [٢أ + ٤ء] = ٩٦٠٠

∴ ٢أ + ٤ء = ٣٨٤٠   (١)

، ∵ $جـ_{٢٠}$ = ٤٨٠٠٠

∴ $\frac{٢٠}{٢}$ [٢أ + ١٩ء] = ٤٨٠٠٠

∴ ٢أ + ١٩ء = ٤٨٠٠   (٢)

وبطرح (١) من (٢) : ∴ ١٥ء = ٩٦٠   ∴ ء = ٦٤

ومن (١) : ∴ أ = ١٧٩٢ جنيهًا.

∴ مقدار القسط الأول = ١٧٩٢ جنيهًا.

٥ ∵ الثمرة الأولى بجوار الصندوق

∴ المسافة المقطوعة لإحضار الثمرة الأولى = صفر

، المسافة المقطوعة لإحضار الثمرة الثانية = ٢ × ٢

، المسافة المقطوعة لإحضار الثمرة الثالثة = ٢ × ٤ وهكذا

∴ المسافة الكلية = ٢ × ٢ + ٢ × ٤ + ٢ × ٦ + ... إلى ٢٠ حدًا

= ٢ [٢ + ٤ + ٦ + ... إلى ٢٠ حدًا]

= ٢ × $\frac{٢٠}{٢}$ [٢ × ٢ + ١٩ × ٢]

= ٨٤٠ مترًا.

٦

① $ح_٧$ = ٤ + ٦ × $\frac{١}{٢}$ = ٧ كم

② $جـ_٧$ = $\frac{٧}{٢}$ [٢ × ٤ + ٦ × $\frac{١}{٢}$] = ٣٨$\frac{١}{٢}$ كم

③ ٨١ = $\frac{ن}{٢}$ [٢ × ٤ + (ن − ١) × $\frac{١}{٢}$]

∴ ١٦٢ = ن(٨ + $\frac{١}{٢}$ ن − $\frac{١}{٢}$)

١٦٢ = ٧.٥ ن + $\frac{١}{٢}$ $ن^٢$

∴ $ن^٢$ + ١٥ن − ٣٢٤ = ٠

∴ (ن − ١٢)(ن + ٢٧) = ٠   ∴ ن = ١٢ يومًا.

٧ المسافات المقطوعة تكون متتابعة حسابية

① $ح_٦$ = ٤.٩ + ٥ × ٩.٨ = ٥٣.٩ م

② $جـ_٨$ = $\frac{٨}{٢}$ [٢ × ٤.٩ + ٧ × ٩.٨] = ٣١٣.٦ م

③ ٤٩٠ = $\frac{ن}{٢}$ [٢ × ٤.٩ + (ن − ١) × ٩.٨]

∴ ٤٩٠ = ن(٤.٩ + ٤.٩ن − ٤.٩)

∴ ٤.٩ $ن^٢$ = ٤٩٠   ∴ ن = ١٠ ث.

٨ بفرض أن المبلغ المودع شهريًا = ك جنيه

∴ فائدة آخر شهر = $\frac{١}{١٢٠}$ ك

، فائدة الشهر الحادى عشر = $\frac{٢}{١٢٠}$ ك

، فائدة الشهر العاشر = $\frac{٣}{١٢٠}$ ك وهكذا

∴ فوائد الشهور تكون متتابعة حسابية على الصورة ($\frac{ك}{١٢٠}$ ، $\frac{٢ك}{١٢٠}$ ، $\frac{٣ك}{١٢٠}$ ، ......)

∴ ١١٧ = $\frac{١٢}{٢}$ [٢ × $\frac{ك}{١٢٠}$ + ١١ × $\frac{ك}{١٢٠}$]

∴ ١١٧ = ٦ [$\frac{١٣ك}{١٢٠}$]

∴ ك = $\frac{١٢٠ \times ١١٧}{١٣ \times ٦}$ = ١٨٠ جنيهًا.

٩

المبلغ المتبقى الذى سيدفع على أقساط

= ١٦٤٠٠٠ − ٦٨٠٠٠ = ٩٦٠٠٠ جنيه.

، ∵ الأقساط تكون متتابعة حسابية حدها النونى :

$ح_ن = ٤٠٠ ن + ٦٠٠$

∴ القسط الأول = ١٠٠٠ ، الأساس = ٤٠٠

، ∵ مجموع الأقساط = المبلغ المتبقى

∴ $\frac{ن}{٢}[٢ × ١٠٠٠ + ٤٠٠ (ن − ١)] = ٩٦٠٠٠$

∴ $٢٠٠ ن (٥ + ن − ١) = ٩٦٠٠٠$

∴ $ن(ن + ٤) = ٤٨٠$ ∴ $ن^٢ + ٤ ن − ٤٨٠ = ٠$

∴ $(ن − ٢٠) (ن + ٢٤) = ٠$

∴ ن = ٢٠ ∴ عدد الأقساط = ٢٠ قسطًا.

١٠

$(ح_ن) = (١٢ ، ١١ ، ١٠ ، ..... ، ١)$

① $ح_٧ = ١٢ + ٦ × −١ = ٦$

② $ح_ن = ٣$ ∴ $١٢ + (ن − ١) × −١ = ٣$

∴ ن = ١٠

③ $ج_{١٢} = \frac{١٢}{٢} [١٢ + ١] = ٧٨$

إجابات تمارين 5

أولًا أسئلة الاختيار من متعدد

① (ب) ② (جـ) ③ (جـ) ④ (جـ) ⑤ (ب)
⑥ (ب) ⑦ (جـ) ⑧ (ب) ⑨ (د) ⑩ (د)
⑪ (د) ⑫ (أ) ⑬ (د) ⑭ (أ) ⑮ (د)
⑯ (د) ⑰ (جـ) ⑱ (د) ⑲ (د) ⑳ (د)
㉑ (ب) ㉒ (جـ) ㉓ (أ) ㉔ (جـ) ㉕ (د)
㉖ (د) ㉗ (جـ) ㉘ (جـ) ㉙ (جـ) ㉚ (جـ)
㉛ (جـ) ㉜ (ب) ㉝ (أ) ㉞ (ب) ㉟ (د)
㊱ (د) ㊲ (جـ) ㊳ (د) ㊴ (أ) ㊵ (جـ)
(٤١) (جـ) (٤٢) (د) (٤٣) (جـ) (٤٤) (جـ) (٤٥) (جـ)
(٤٦) (ب) (٤٧) (أ) (٤٨) (ب) (٤٩) (د) (٥٠) (أ)
(٥١) (ب) (٥٢) (جـ) (٥٣) (جـ) (٥٤) (جـ) (٥٥) (ب)
(٥٦) (أ) (٥٧) (د) (٥٨) (جـ) (٥٩) (جـ) (٦٠) (د)
(٦١) (ب) (٦٢) (د) (٦٣) (جـ) (٦٤) (ب) (٦٥) (ب)
(٦٦) (ب) (٦٧) (د) (٦٨) (د) (٦٩) (ب) (٧٠) (جـ)
(٧١) (ب) (٧٢) (أ)

ثانيًا الأسئلة المقالية

تمارين على تعريف المتتابعة الهندسية وحدها العام وتعيين المتتابعة الهندسية

١

① $\frac{ح_{ن+١}}{ح_ن} = \frac{٥ × ٢^{ن+١}}{٥ × ٢^ن} = ٢^{ن+١−ن} = ٢$ = مقدار ثابت.

∴ $(ح_ن)$ متتابعة هندسية وأساسها ر = ٢

، الحدود الثلاثة الأولى هى : ١٠ ، ٢٠ ، ٤٠

② $\frac{ح_{ن+١}}{ح_ن} = \frac{٤ (ن + ١)^٢}{٤ ن^٢} = \left(\frac{ن + ١}{ن}\right)^٢ = \left(١ + \frac{١}{ن}\right)^٢$ ≠ مقدار ثابت.

∴ $(ح_ن)$ ليست متتابعة هندسية.

③ $\frac{ح_ن}{ح_{ن−١}} = \frac{١}{٤}$ = مقدار ثابت.

∴ $(ح_ن)$ متتابعة هندسية وأساسها ر = $\frac{١}{٤}$

، الحدود الثلاثة الأولى هى : ١٢ ، ٣ ، $\frac{٣}{٤}$

٢

$\frac{ح_{ن+١}}{ح_ن} = \frac{٢ × ٣^{ن+١−٥}}{٢ × ٣^{ن−٥}} = ٣$ = مقدار ثابت.

∴ $(ح_ن)$ متتابعة هندسية ، $ح_٧ = ٢ × ٣^{٧−٥} = ١٨$

٣

$\frac{ح_{ن+١}}{ح_ن} = \frac{\frac{٣}{٨}(٢)^{ن+١}}{\frac{٣}{٨}(٢)^ن} = ٢$ = مقدار ثابت.

∴ $(ح_ن)$ متتابعة هندسية ، $ح_٩ = \frac{٣}{٨} × (٢)^٨ = ٩٦$

، $ح_ن = ٧٦٨$

∴ $\frac{٣}{٨} × ٢^ن = ٧٦٨$ ∴ $٢^ن = ٢٠٤٨$

∴ $٢^ن = ٢^{١١}$ ∴ ن = ١١

٤

① أساس المتتابعة = $\frac{١}{٢}$ وبالتالى فإن الحدود السبعة الأولى هى : $(٨ ، ٤ ، ٢ ، ١ ، \frac{١}{٢} ، \frac{١}{٤} ، \frac{١}{٨})$

التمثيل البيانى :

النقط هى : (١ ، ٨) ، (٢ ، ٤) ، (٣ ، ٢)

، (٤ ، ١) ، $(٥ ، \frac{١}{٢})$ ، $(٦ ، \frac{١}{٤})$ ، $(٧ ، \frac{١}{٨})$

② أساس المتتابعة = ٣ وبالتالى فإن الحدود السبعة الأولى هى :

$(\frac{١}{٢٧} ، \frac{١}{٩} ، \frac{١}{٣} ، ١ ، ٣ ، ٩ ، ٢٧)$

التمثيل البيانى :

النقط هى : $(١ ، \frac{١}{٢٧})$ ، $(٢ ، \frac{١}{٩})$ ، $(٣ ، \frac{١}{٣})$

، (٤ ، ١) ، (٥ ، ٣) ، (٦ ، ٩) ، (٧ ، ٢٧)

٥

① ∵ أ + أ ر = ٣ ∴ أ(١ + ر) = ٣ (١)

، $أ + أ ر^٣ = ٦٣$

∴ $أ(١ + ر^٣) = ٦٣$

∴ $أ(١ + ر)(١ − ر + ر^٢) = ٦٣$ (٢)

بقسمة (٢) على (١) : ∴ $١ − ر + ر^٢ = ٢١$

∴ $ر^٢ − ر − ٢٠ = ٠$

∴ $(ر − ٥) (ر + ٤) = ٠$

∴ ر = ٥ ومنها أ = $\frac{١}{٢}$

∴ المتتابعة هى : $(\frac{١}{٢} ، \frac{٥}{٢} ، \frac{٢٥}{٢} ، ...)$

أ، ر = −٤ ومنها أ = −١

∴ المتتابعة هى : (−١ ، ٤ ، −١٦ ، ...)

② أ ر = ٨ ، $أ + أ ر^٢ = ٢٠$

∴ $أ(١ + ر^٢) = ٢٠$

∴ $\frac{أ(ر^٢ + ١)}{أ ر} = \frac{٢٠}{٨}$ ∴ $\frac{ر^٢ + ١}{ر} = \frac{٥}{٢}$

∴ $٢ ر^٢ − ٥ ر + ٢ = ٠$

∴ (٢ ر − ١) (ر − ٢) = ٠

∴ ر = $\frac{١}{٢}$ ومنها أ = ١٦ أو ر = ٢ ومنها أ = ٤

∴ المتتابعة هي : (١٦ ، ٨ ، ٤ ، ...)

أو (٤ ، ٨ ، ١٦ ، ...)

③ أ = ٤ أ ر^{٢} ∴ ر^{٢} = $\frac{١}{٤}$

∴ ر = $\frac{١}{٢}$ أو ر = −$\frac{١}{٢}$ (مرفوض)

، ∵ ح$_{٢}$ + ح$_{٥}$ = ٣٦

∴ أ ر + أ ر^{٤} = ٣٦ ∴ $\frac{١}{٢}$ أ + $\frac{١}{١٦}$ أ = ٣٦

∴ $\frac{٩}{١٦}$ أ = ٣٦ ∴ أ = ٦٤

∴ المتتابعة هي : (٦٤ ، ٣٢ ، ١٦ ، ...)

④ ح$_{٣}$ = $\frac{١}{أ}$ ∴ أ ر^{٢} = $\frac{١}{أ}$

∴ أ^{٢} ر^{٢} = ١ ∴ أ ر = ± ١ (١)

، ح$_{٥}$ = $\frac{١}{١٢٥}$ ∴ أ ر^{٤} = $\frac{١}{١٢٥}$ (٢)

من (١) ، (٢) ينتج أن :

$\frac{أ ر^{٤}}{أ ر}$ = ± $\frac{١}{١٢٥}$ ∴ ر^{٣} = ± $\frac{١}{١٢٥}$

∴ ر = ± $\frac{١}{٥}$ ∴ أ = ٥

∴ يوجد حلان هما : (٥ ، ١ ، $\frac{١}{٥}$ ، ...)

أو (٥ ، −١ ، $\frac{١}{٥}$ ، ...)

⑤ أ + أ ر^{٢} = ٢٠

∴ أ (١ + ر^{٢}) = ٢٠ (١)

، ∵ أ ر^{٢} + أ ر^{٤} = ٥ أ^{٢} ر^{٢}

وبالقسمة على أ ر^{٢} : ∴ ١ + ر^{٢} = ٥ أ

وبالتعويض في (١) :

∴ أ × ٥ أ = ٢٠ ∴ أ^{٢} = ٤

∴ أ = ٢ (والسالب مرفوض)

ومن (١) : ∴ ١ + ر^{٢} = ١٠ ∴ ر^{٢} = ٩

∴ ر = ٣ (والسالب مرفوض)

∴ المتتابعة هي : (٢ ، ٦ ، ١٨ ، ...)

⑥ أ ر^{٢} − (أ + أ ر) = ١٠

∴ أ (ر^{٢} − ر − ١) = ١٠ (١)

، أ + أ ر^{٢} − أ ر = ١٤

∴ أ (ر^{٢} − ر + ١) = ١٤ (٢)

وبقسمة (٢) على (١) :

∴ $\frac{ر^{٢} - ر + ١}{ر^{٢} - ر - ١}$ = $\frac{١٤}{١٠}$ = $\frac{٧}{٥}$

∴ ٥ ر^{٢} − ٥ ر + ٥ = ٧ ر^{٢} − ٧ ر − ٧

∴ ٢ ر^{٢} − ٢ ر − ١٢ = ٠

∴ ر^{٢} − ر − ٦ = ٠

∴ (ر + ٢) (ر − ٣) = ٠

∴ ر = ٣ أو ر = −٢ (مرفوض لأن المتتابعة تزايدية)

وبالتعويض في (١) : ∴ أ (٩ − ٣ − ١) = ١٠

∴ أ = ٢

∴ المتتابعة هي : (٢ ، ٦ ، ١٨ ، ...)

⑦ ٣ (أ + أ ر^{٢}) = أ ر + أ ر^{٣}

بالقسمة على أ حيث أ ≠ ٠ :

∴ ٣ + ٣ ر^{٢} = ر + ر^{٣}

∴ ر^{٣} − ٣ ر^{٢} + ر − ٣ = ٠

∴ ر^{٢} (ر − ٣) + (ر − ٣) = ٠

∴ (ر − ٣) (ر^{٢} + ١) = ٠ ∴ ر = ٣

، أ ر^{٤} − ٢ (أ + أ ر + أ ر^{٢} + أ ر^{٣}) = ٢

∴ أ (ر^{٤} − ٢ − ٢ ر − ٢ ر^{٢} − ٢ ر^{٣}) = ٢

وبالتعويض عن ر = ٣ :

∴ أ (٨١ − ٢ − ٦ − ١٨ − ٥٤) = ٢

∴ أ = ٢

∴ المتتابعة هي : (٢ ، ٦ ، ١٨ ، ...)

⑧ أ + أ ر + أ ر^{٢} + أ ر^{٣} + أ ر^{٤} = ٢٤٢ (١)

، أ ر^{٣} = أ ر^{٢} + ٦ أ ر

، بالقسمة على أ ر : ∴ ر^{٢} − ر − ٦ = ٠

∴ (ر − ٣) (ر + ٢) = ٠

∴ ر = ٣ أو −٢ (مرفوض)

وبالتعويض في (١) :

∴ أ (١ + ٣ + ٩ + ٢٧ + ٨١) = ٢٤٢

∴ أ = ٢

∴ المتتابعة هي : (٢ ، ٦ ، ١٨ ، ...)

⑨ ∵ أ ر + أ ر^{٣} = ٥

∴ أ ر (١ + ر^{٢}) = ٥ (١)

، ∵ أ^{٢} + أ^{٢} ر^{٢} = ٨٠

∴ أ^{٢} (١ + ر^{٢}) = ٨٠ (٢)

بقسمة (٢) على مربع (١) :

∴ $\frac{أ^{٢} (١ + ر^{٢})}{أ^{٢} ر^{٢} (١ + ر^{٢})^{٢}}$ = $\frac{٨٠}{٢٥}$

∴ $\frac{١}{ر^{٢} (١ + ر^{٢})}$ = $\frac{١٦}{٥}$

∴ ١٦ ر^{٤} + ١٦ ر^{٢} − ٥ = ٠

∴ (٤ ر^{٢} + ٥) (٤ ر^{٢} − ١) = ٠

∴ ر^{٢} = $\frac{-٥}{٤}$ (مرفوض)

أو ر^{٢} = $\frac{١}{٤}$ ومنها ر = ± $\frac{١}{٢}$

وبالتعويض في (١) : ∴ أ = ± ٨

∴ المتتابعة هي : (٨ ، ٤ ، ٢ ، ...)

أو (−٨ ، ٤ ، −٢ ، ...)

⑩ أ ر + أ ر^{٢} = ١٢

∴ أ ر (١ + ر) = ١٢ (١)

، أ × أ ر^{٣} = ٢٧ ∴ أ^{٢} ر^{٣} = ٢٧ (٢)

بتربيع معادلة (١) :

∴ أ^{٢} ر^{٢} (١ + ر)^{٢} = ١٤٤ (٣)

بقسمة (٢) على (٣) : $\frac{أ^{٢} ر^{٣}}{أ^{٢} ر^{٢} (١ + ر)^{٢}}$ = $\frac{٢٧}{١٤٤}$

∴ $\frac{ر}{١ + ٢ ر + ر^{٢}}$ = $\frac{٣}{١٦}$

∴ ٣ + ٦ ر + ٣ ر^{٢} = ١٦ ر

∴ ٣ ر^{٢} − ١٠ ر + ٣ = ٠

∴ (ر − ٣) (٣ ر − ١) = ٠

∴ ر = ٣ أو ر = $\frac{١}{٣}$

من (١) ينتج أن : أ = ١ أو أ = ٢٧

∴ يوجد متتابعتان هما :

(١ ، ٣ ، ٩ ، ...) أو (٢٧ ، ٩ ، ٣ ، ...)

٦

نفرض أن الأعداد هي : $\frac{أ}{ر}$ ، أ ، أ ر

∴ $\frac{أ}{ر}$ × أ × أ ر = ٦٤

∴ أ^{٣} = ٦٤ ∴ أ = ٤

، $\frac{أ}{ر}$ + أ + أ ر = ٢١ ∴ $\frac{٤}{ر}$ + ٤ + ٤ ر = ٢١

∴ ٤ + ٤ ر + ٤ ر^{٢} = ٢١ ر

∴ ٤ ر^{٢} − ١٧ ر + ٤ = ٠

∴ (٤ ر − ١) (ر − ٤) = ٠

∴ ر = $\frac{١}{٤}$ أو ٤ ∴ الأعداد هي : ١ ، ٤ ، ١٦

٧

نفرض أن الأعداد هي : أ ، أ ر ، أ ر^{٢}

∴ أ + أ ر + أ ر^{٢} = ١٤

∴ أ (١ + ر + ر^{٢}) = ١٤ (١)

، أ^{٢} × أ^{٢} ر^{٢} × أ^{٢} ر^{٤} = ٤٠٩٦

∴ أ^{٦} ر^{٦} = ٤٠٩٦ = (٤)^{٦} ∴ أ ر = ٤ (٢)

بقسمة (١) على (٢) : ∴ $\frac{ر^{٢} + ر + ١}{ر}$ = $\frac{٧}{٢}$

∴ ٢ ر^{٢} + ٢ ر + ٢ = ٧ ر

∴ ٢ ر^{٢} − ٥ ر + ٢ = ٠

∴ (٢ ر − ١) (ر − ٢) = ٠

∴ ر = $\frac{١}{٢}$ ومنها أ = ٨ أو ر = ٢ ومنها أ = ٢

∴ الأعداد هي : ٨ ، ٤ ، ٢

٨

نفرض أن الأعداد هي : أ ، أ ر ، أ $ر^٢$

∴ $أ + أ ر + أ ر^٢ = ٢٨$

∴ $أ (١ + ر + ر^٢) = ٢٨$ (١)

، $\frac{١}{أ} + \frac{١}{أ ر} + \frac{١}{أ ر^٢} = \frac{٧}{١٦}$

∴ $\frac{ر^٢ + ر + ١}{أ ر^٢} = \frac{٧}{١٦}$ (٢)

بقسمة (١) على (٢) :

∴ $أ (١ + ر + ر^٢) \times \frac{أ ر^٢}{١ + ر + ر^٢} = ٢٨ \times \frac{١٦}{٧}$

∴ $أ^٢ ر^٢ = ٦٤$ ∴ $أ ر = ٨$ (٣)

وبقسمة (١) على (٣) : ∴ $\frac{١ + ر + ر^٢}{ر} = \frac{٢٨}{٨} = \frac{٧}{٢}$

∴ $٢ + ٢ ر + ٢ ر^٢ = ٧ ر$

∴ $٢ ر^٢ - ٥ ر + ٢ = ٠$

∴ $(٢ ر - ١)(ر - ٢) = ٠$

∴ $ر = \frac{١}{٢}$ ومنها أ = ١٦

أ، ر = ٢ ومنها أ = ٤

∴ الأعداد هي : ١٦ ، ٨ ، ٤

٩

نفرض أن الأعداد هي أ ، أ ر ، أ $ر^٢$

∴ $أ + أ ر + أ ر^٢ = ٧$

∴ $أ (١ + ر + ر^٢) = ٧$

∴ $أ^٢ (١ + ر + ر^٢)^٢ = ٤٩$ (١)

، $أ^٢ + أ^٢ ر^٢ + أ^٢ ر^٤ = ٢١$

∴ $أ^٢ (١ + ر^٢ + ر^٤) = ٢١$

∴ $أ^٢ [(١ + ر^٢)^٢ - ر^٢] = ٢١$

∴ $أ^٢ (١ + ر^٢ + ر)(١ + ر^٢ - ر) = ٢١$ (٢)

بقسمة (٢) على (١) :

∴ $\frac{أ^٢ (١ + ر^٢ + ر)(١ + ر^٢ - ر)}{أ^٢ (١ + ر + ر^٢)^٢} = \frac{٢١}{٤٩} = \frac{٣}{٧}$

∴ $\frac{١ + ر^٢ - ر}{١ + ر + ر^٢} = \frac{٣}{٧}$

∴ $٧ + ٧ ر^٢ - ٧ ر = ٣ + ٣ ر + ٣ ر^٢$

∴ $٤ ر^٢ - ١٠ ر + ٤ = ٠$

∴ $٢ ر^٢ - ٥ ر + ٢ = ٠$

∴ $(٢ ر - ١)(ر - ٢) = ٠$

∴ $ر = \frac{١}{٢}$ ومنها أ = ٤ أ، ر = ٢ ومنها أ = ١

∴ الأعداد هي : ٤ ، ٢ ، ١

١٠

$ح_{ن+٢} = أ \times (٥)^{ن+١} = ١٢٥$ (١)

$ح_{٢ن-٦} = أ \times (٥)^{٢ن-٧} = ٢٥$ (٢)

بقسمة (١) على (٢) : ∴ $٥^{ن+١-٢ن+٧} = ٥$

∴ $٥^{٨-ن} = ٥^١$ ∴ $٨ - ن = ١$

∴ ن = ٧

وبالتعويض في (١) : ∴ $أ \times ٥^٨ = ٥^٣$

∴ $أ = ٥^{٣-٨} = ٥^{-٥}$

∴ المتتابعة هي : $(٥^{-٥} ، ٥^{-٤} ، ٥^{-٣} ، ...)$

١١

$ر = \frac{ح_{ن+١}}{ح_ن} = \frac{١}{٢}$

∴ $ح_{ن+١} = أ (\frac{١}{٢})^ن = \frac{١}{٢}$ (١)

، ∵ $ح_{٢ن-١} = أ ر^{٢ن-٢} = \frac{١}{٣٢}$

∴ $أ (\frac{١}{٢})^{٢ن-٢} = \frac{١}{٣٢}$ (٢)

وبقسمة (٢) على (١) : ∴ $(\frac{١}{٢})^{٢ن-٢-ن} = \frac{١}{٣٢} \times ٢$

∴ $(\frac{١}{٢})^{ن-٢} = (\frac{١}{٢})^٤$ ∴ ن = ٦

وبالتعويض في (١) : ∴ $أ (\frac{١}{٢})^٦ = \frac{١}{٢}$

∴ $أ = (\frac{١}{٢})^{-٥} = ٣٢$

∴ المتتابعة هي : (٣٢ ، ١٦ ، ٨ ، ...)

١٢ العبارات خطأ والتصحيح هو

① تمثل حدود المتتابعة الهندسية بمجموعة من النقاط المنفصلة التي تتبع الدالة الأسية.

② أساس المتتابعة الهندسية = $\frac{ح_{ن+١}}{ح_ن}$

③ المتتابعة تكون متناوبة الإشارة وليست تناقصية.

تمارين على الأوساط الهندسية

١٣

بفرض أن العددين هما : س ، ص حيث س > ص

∵ س − ص = ٦٠

∴ س = ص + ٦٠ (١)

∵ س ص = ٢٥٦

وبالتعويض من (١) : ∴ (٦٠ + ص) ص = ٢٥٦

∴ $ص^٢ + ٦٠ ص - ٢٥٦ = ٠$

∴ (ص + ٦٤)(ص − ٤) = ٠

∴ ص = ٤ أ، ص = −٦٤ (مرفوض)

∴ س = ٦٤ ∴ العددان هما : ٦٤ ، ٤

١٤

بفرض أن العددين هما : س ، ص

∴ س + ص = ١٠ (١) ، س ص = ٩

وبالتعويض من (١) : ∴ س (١٠ − س) = ٩

∴ $س^٢ - ١٠ س + ٩ = ٠$

∴ (س − ٩)(س − ١) = ٠

∴ س = ٩ أ، س = ١

ومنها ص = ١ أ، ص = ٩ ∴ العددان هما : ٩ ، ١

١٥

بفرض أن العددين هما : س ، ص

∴ $\sqrt{س ص} - س = ٢$ (١)

، $ص - \sqrt{س ص} = ٣$ (٢)

بجمع (١) ، (٢) :

∴ ص − س = ٥ ∴ ص = س + ٥ (٣)

ومن (١) : ∴ $\sqrt{س ص} = ٢ + س$

وبالتربيع : ∴ $س ص = س^٢ + ٤ س + ٤$

وبالتعويض من (٣) :

∴ $س (س + ٥) = س^٢ + ٤ س + ٤$

∴ $س^٢ + ٥ س = س^٢ + ٤ س + ٤$

∴ س = ٤ ومن (٣) : ص = ٩

∴ العددان هما : ٤ ، ٩

١٦

∵ أصغر العددين هو ٩ ، وبفرض أن العدد الآخر هو س

∴ $\frac{١}{٢}(٩ + س) = \frac{٥}{٣}\sqrt{٩ س} = ٥\sqrt{س}$

∴ $\frac{١}{٤}(٩ + س)^٢ = ٢٥ س$

∴ $٨١ + ١٨ س + س^٢ = ١٠٠ س$

∴ $س^٢ - ٨٢ س + ٨١ = ٠$

∴ (س − ٨١)(س − ١) = ٠

∴ س = ٨١ أ، ١

، ∵ أصغر العددين = ٩ ∴ س = ٨١

∴ العدد الآخر هو ٨١

١٧

بفرض أن العدد الأكبر س ، الأصغر ص

∴ $\sqrt{س ص} - ص = ٦$

∴ $\sqrt{س ص} = ٦ + ص$ بتربيع الطرفين

∴ $س ص = ٣٦ + ١٢ ص + ص^٢$ (١)

، $س - \frac{١}{٢}(س + ص) = ٩$

∴ $\frac{١}{٢} س = ٩ + \frac{١}{٢} ص$

∴ س = ١٨ + ص (٢)

وبالتعويض من (٢) في (١) :

∴ (١٨ + ص) ص = ٣٦ + ١٢ ص + ص^{٢}

∴ ص^{٢} + ١٨ ص = ٣٦ + ١٢ ص + ص^{٢}

∴ ٦ ص = ٣٦ ∴ ص = ٦

وبالتعويض في (٢) : ∴ س = ٢٤

∴ العددان هما : ٦ ، ٢٤

١٨

∵ عدد الأوساط = ٦ ∴ عدد الحدود = ٨

∴ أ = $\frac{١}{٤}$ ، ح$_{٨}$ = ٣٢ ∴ $\frac{١}{٤}$ ر^{٧} = ٣٢

∴ ر^{٧} = ١٢٨ = ٢^{٧} ∴ ر = ٢

∴ الأوساط هي : $\frac{١}{٢}$ ، ١ ، ٢ ، ٤ ، ٨ ، ١٦

١٩

عدد الحدود = ٧ ∴ أ = ٤ ، ح$_{٧}$ = ٢٩١٦

∴ ٤ ر^{٦} = ٢٩١٦ ∴ ر^{٦} = ٧٢٩

∴ ر^{٦} = (±٣)^{٦} ∴ ر = ±٣

∴ الأوساط هي : (١٢ ، ٣٦ ، ١٠٨ ، ٣٢٤ ، ٩٧٢)

أ، الأوساط هي : (-١٢ ، ٣٦ ، -١٠٨ ، ٣٢٤ ، -٩٧٢)

٢٠

(س + ٢) (ص − ٦) = ٢٥ (١)

، س + ص = ١٤ ∴ س = ١٤ − ص (٢)

وبالتعويض من (٢) في (١) :

∴ (١٤ − ص + ٢) (ص − ٦) = ٢٥

∴ (− ص + ١٦) (ص − ٦) = ٢٥

∴ − ص^{٢} + ٢٢ ص − ٩٦ = ٢٥

∴ ص^{٢} − ٢٢ ص + ١٢١ = ٠

∴ (ص − ١١)^{٢} = ٠

∴ ص = ١١ وبالتعويض في (٢) : ∴ س = ٣

٢١

∵ $\frac{١}{٢}$ أ ، ب ، حـ في تتابع هندسي

∴ $\frac{\frac{١}{٢}أ + حـ}{٢}$ > ب بالضرب × (٤)

∴ أ + ٢ حـ > ٤ ب أي أن : ٤ ب < أ + ٢ حـ

٢٢

∵ س ، ص ، ع في تتابع هندسي.

∴ $\frac{س + ع}{٢}$ > ص ∴ س + ع > ٢ ص (١)

، ∵ ص ، ع ، ل في تتابع هندسي.

∴ $\frac{ص + ل}{٢}$ > ع ∴ ص + ل > ٢ ع (٢)

بجمع (١) ، (٢) :

∴ س + ع + ص + ل > ٢ ص + ٢ ع

∴ س + ل > ص + ع

٢٣

الوسطين الأخيرين هما : $\frac{٤٨٦}{ر}$ ، $\frac{٤٨٦}{ر^{٢}}$

، الوسطين الأولين هما : ٢ ر ، ٢ ر^{٢}

∴ $\frac{٤٨٦}{ر}$ + $\frac{٤٨٦}{ر^{٢}}$ = ٩ (٢ ر + ٢ ر^{٢})

∴ $\frac{٤٨٦}{ر^{٢}}$ (ر + ١) = ١٨ ر (١ + ر)

∴ ر^{٣} = ٢٧ ∴ ر = ٣

ويفرض أن عدد الأوساط = ن

∴ ح$_{ن+٢}$ = ٤٨٦ ∴ ٢ × (٣)$^{ن+١}$ = ٤٨٦

∴ ٣$^{ن+١}$ = ٢٤٣ = ٣^{٥}

∴ ن = ٤ ∴ عدد الأوساط = ٤

٢٤

الوسط الثاني = ٢ ر^{٢} ، الوسط الأخير = $\frac{٣٨٤}{ر}$

∴ ٢ ر^{٢} × $\frac{٣٨٤}{ر}$ = ٢٣٠٤ ∴ ر = $\frac{٢٣٠٤}{٣٨٤ × ٢}$ = ٣

، بفرض أن عدد الأوساط = ن

∴ عدد الحدود = ن + ٢ ∴ ح$_{ن+٢}$ = ٣٨٤

∴ ٣ × (٢)$^{ن+١}$ = ٣٨٤ ∴ ٢$^{ن+١}$ = ١٢٨ = ٢^{٧}

∴ ن = ٦ ∴ عدد الأوساط = ٦

٢٥

∵ ١ ، س ، ص في تتابع حسابي.

∴ ٢ س = ١ + ص

∴ ص = ٢ س − ١ (١)

، ∵ ١ ، ص ، س في تتابع هندسي.

∴ س = ص^{٢} (٢)

وبالتعويض من (٢) في (١) :

∴ ٢ ص^{٢} − ص − ١ = ٠

∴ (٢ ص + ١) (ص − ١) = ٠

∴ ص = $-\frac{١}{٢}$ أ، ص = ١ (مرفوض)

وبالتعويض في (١) : ∴ س = $\frac{١}{٤}$

٢٦

∵ ٤ ، ب ، حـ في تتابع حسابي.

∴ $\frac{٤ + حـ}{٢}$ = ب ∴ حـ = ٢ ب − ٤ (١)

، ∵ ٢ ، ب + ٣ ، ٥ حـ في تتابع هندسي.

∴ (ب + ٣)^{٢} = ١٠ حـ (٢)

من (١) ، (٢) :

∴ ب^{٢} + ٦ ب + ٩ = ١٠ (٢ ب − ٤)

∴ ب^{٢} − ١٤ ب + ٤٩ = ٠ ∴ (ب − ٧)^{٢} = ٠

∴ ب = ٧ ∴ حـ = ١٠

٢٧

بفرض أن الأعداد هي : أ − ء ، أ ، أ + ء

∴ أ − ء + أ + أ + ء = ١٥

∴ ٣ أ = ١٥ ∴ أ = ٥

∴ الأعداد هي : ٥ − ء ، ٥ ، ٥ + ء

∴ ٤ − ء ، ٤ ، ٦ + ء في تتابع هندسي.

∴ (٤ − ء) (٦ + ء) = ١٦ ∴ ٢٤ − ٢ ء − ء^{٢} = ١٦

∴ ء^{٢} + ٢ ء − ٨ = ٠ ∴ (ء + ٤) (ء − ٢) = ٠

∴ ء = −٤ أ، ء = ٢

∴ الأعداد هي : ٩ ، ٥ ، ١ أ، ٣ ، ٥ ، ٧

٢٨

نفرض أن الأعداد هي : أ ، أ ر ، أ ر^{٢}

∴ أ + أ ر + أ ر^{٢} = ٧٠

∴ أ (١ + ر + ر^{٢}) = ٧٠

، ∵ ٤ أ ، ٥ أ ر ، ٤ أ ر^{٢} في تتابع حسابي.

∴ ١٠ أ ر = ٤ أ + ٤ أ ر^{٢}

∴ ٢ أ ر^{٢} − ٥ أ ر + ٢ أ = ٠ وبالقسمة على أ :

∴ ٢ ر^{٢} − ٥ ر + ٢ = ٠

∴ (٢ ر − ١) (ر − ٢) = ٠

∴ ر = $\frac{١}{٢}$ أ، ر = ٢ ومنها أ = ٤٠ أ، أ = ١٠

∴ الأعداد هي : ٤٠ ، ٢٠ ، ١٠

٢٩

بفرض أن الأعداد هي : $\frac{أ}{ر}$ ، أ ، أ ر

∴ $\frac{أ}{ر}$ × أ × أ ر = ٨ ∴ أ^{٣} = ٨

∴ أ = ٢

، بفرض أن العدد الأكبر ٢ ر حيث ر > ١

∴ $\frac{٢}{ر}$ ، ٢ ، ٢ ر − ١ في تتابع حسابي.

(أو بفرض أن $\frac{٢}{ر}$ العدد الأكبر حيث ٠ < ر < ١

∴ $\frac{٢}{ر}$ − ١ ، ٢ ، ٢ ر في تتابع حسابي)

∴ ٤ = $\frac{٢}{ر}$ + ٢ ر − ١

∴ ٤ ر = ٢ + ٢ ر^2 − ر

∴ ٢ ر^2 − ٥ ر + ٢ = ٠

∴ (٢ ر − ١) (ر − ٢) = ٠

∴ ر = ٢ أ ، ر = $\frac{1}{2}$ (مرفوض)

∴ الأعداد هي : ١ ، ٢ ، ٤

٢٠

٢ ب وسط هندسي بين أ ، ٣ حـ

∴ $\frac{أ + ٣ حـ}{٢}$ > ٢ ب

∴ أ + ٣ حـ > ٤ ب (١)

، ∵ ٣ حـ وسط هندسي بين ٢ ب ، ٤ ء

∴ $\frac{٢ ب + ٤ ء}{٢}$ > ٣ حـ

∴ ب + ٢ ء > ٣ حـ (٢)

بضرب (١) × (٢) :

∴ (أ + ٣ حـ) (ب + ٢ ء) > ١٢ ب حـ

٢١

∵ ب حـ وسط حسابي بين أ ب ، حـ ء

∴ ب حـ > $\sqrt{أ ب حـ ء}$

∴ ب^2 حـ^2 > أ ب حـ ء (١)

، ∵ حـ ء وسط حسابي بين ب حـ ، ء هـ

∴ حـ ء > $\sqrt{ب حـ ء هـ}$

∴ حـ^2 ء^2 > ب حـ ء هـ (٢)

بضرب (١) × (٢) : ∴ ب^2 حـ^4 ء^2 > أ ب^2 حـ^2 ء^2 هـ

وبالقسمة على (ب^2 حـ^2 ء^2)

∴ حـ^2 > أ هـ

٢٢

∵ لو أ ، لو ب ، لو حـ في تتابع حسابي.

∴ ٢ لو ب = لو أ + لو حـ

∴ لو ب^2 = لو أ حـ ∴ ب^2 = أ حـ

∴ أ ، ب ، حـ في تتابع هندسي.

٢٣

∵ أ ، ٣ ب ، ٢ حـ في تتابع حسابي.

∴ ٣ ب > $\sqrt{٢ أ حـ}$ وبتربيع الطرفين

∴ ٩ ب^2 > ٢ أ حـ (١)

∵ ٣ ب ، ٢ حـ ، ٦ ء في تتابع حسابي.

∴ ٢ حـ > $\sqrt{١٨ ب ء}$

∴ ٤ حـ^2 > ١٨ ب ء (٢)

بضرب (١) في (٢) : ∴ ٣٦ ب^2 حـ^2 > ٣٦ أ ب حـ ء

∴ ب حـ > أ ء (المطلوب أولاً)

وبجمع (١) ، (٢) :

∴ ٩ ب^2 + ٤ حـ^2 > ٢ أ حـ + ١٨ ب ء (المطلوب ثانيًا)

٢٤ التصحيح هو :

① تعرف الأوساط الهندسية بأنها الحدود الواقعة بين حدين غير متتاليين من متتابعة هندسية ويمكن إيجادها متى عُلم قيمة هذين الحدين وعدد هذه الأوساط.

② الوسط الحسابي لعددين حقيقيين (موجبين) مختلفين أكبر من وسطهما الهندسي.

٢٥

① ∵ أ ، ب كميتان موجبتان.

∴ $\frac{أ + ب}{٢}$ > $\sqrt{أ ب}$

∴ أ + ب > ٢ $\sqrt{أ ب}$ (١)

، ∵ ب ، حـ كميتان موجبتان.

∴ $\frac{ب + حـ}{٢}$ > $\sqrt{ب حـ}$

∴ ب + حـ > ٢ $\sqrt{ب حـ}$ (٢)

، ∵ أ ، حـ كميتان موجبتان.

∴ $\frac{أ + حـ}{٢}$ > $\sqrt{أ حـ}$

∴ أ + حـ > ٢ $\sqrt{أ حـ}$ (٣)

بضرب (١) × (٢) × (٣) :

∴ (أ + ب) (ب + حـ) (أ + حـ) > ٨ $\sqrt{أ^2 ب^2 حـ^2}$

∴ (أ + ب) (ب + حـ) (أ + حـ) > ٨ أ ب حـ

، ∵ أ + ب + حـ = ١

∴ أ + ب = ١ − حـ ، ب + حـ = ١ − أ

، أ + حـ = ١ − ب

∴ (١ − أ) (١ − ب) (١ − حـ) > ٨ أ ب حـ

② ∵ س ∈ ع$^+$ ∴ $\frac{١}{س}$ ∈ ع$^+$

∴ س ، $\frac{١}{س}$ عددان حقيقيان موجبان.

، ∵ س ≠ ١ ∴ العددان مختلفان.

∴ $\frac{س + \frac{١}{س}}{٢}$ > $\sqrt{س × \frac{١}{س}}$

∴ س + $\frac{١}{س}$ > ٢

③ ∵ أ ، ١ كميتان موجبتان

∴ $\frac{أ + ١}{٢}$ > $\sqrt{أ}$ ∴ (أ + ١) > ٢ $\sqrt{أ}$ (١)

وبالمثل (ب + ١) > ٢ $\sqrt{ب}$ (٢)

، (حـ + ١) > ٢ $\sqrt{حـ}$ (٣)

، (ء + ١) > ٢ $\sqrt{ء}$ (٤)

من (١) ، (٢) ، (٣) ، (٤) :

∴ (أ + ١) (ب + ١) (حـ + ١) (ء + ١)

> ١٦ $\sqrt{أ ب حـ ء}$

، ∵ أ ب حـ ء = ١

∴ (أ + ١) (ب + ١) (حـ + ١) (ء + ١) > ١٦

ثالثًا مسائل تقيس مهارات التفكير

① (د) ② (د) ③ (ب)

④ (حـ) ⑤ (حـ) ⑥ (أ)

إرشادات الحل :

① إذا كان (حـ$_ن$) متتابعة هندسية أساسها (د)

∴ (حـ$_ن$)^ك تكون متتابعة هندسية أيضًا

وأساسها د^ك

، إذا كان (حـ$_ن$) متتابعة هندسية أساسها (م)

∴ (ك حـ$_ن$) تكون متتابعة هندسية أيضًا

وأساسها (م)

، (حـ$_ن$ حـ$_ن$) تكون متتابعة هندسية أساسها (د م)

أي كل ما سبق صحيح

② ∵ أ ، ب ، حـ متتابعة حسابية أساسها م

∴ ب − أ = حـ − ب = م

، ∵ $\frac{٣^ب}{٣^أ}$ = ٣$^{ب - أ}$ = ٣^م

، $\frac{٣^حـ}{٣^ب}$ = ٣$^{حـ - ب}$ = ٣^م

∴ $\frac{٣^ب}{٣^أ}$ = $\frac{٣^حـ}{٣^ب}$

∴ (٣^أ ، ٣^ب ، ٣$^حـ$) متتابعة هندسية

أساسها (٣)^م

③ ∵ (أ ، ب ، حـ) في تتابع حسابي

∴ ب = أ + ء

∴ ب − أ = ء (١)

، حـ = أ + ٢ ء

∴ حـ − أ = ٢ ء (٢)

، من (١) ، (٢) :

∴ ب − حـ = − ء (٣)

من (١) ، (٢) ، (٣) :

∴ س$^{ب - حـ}$. ص$^{حـ - أ}$. ع$^{أ - ب}$

= س$^{-ء}$. ص^{٢ء} . ع$^{-ء}$

= $\frac{ص^{٢ء}}{س^ء ع^ء}$ = $\left(\frac{ص^2}{س ع}\right)^ء$

، ∵ س ، ص ، ع في تتابع هندسي

∴ ص^2 = س ع

∴ س$^{ب - حـ}$. ص$^{حـ - أ}$. ع$^{أ - ب}$

= $\left(\frac{ص^2}{س ع}\right)^ء$ = (١)^ء = ١

④ نفرض أن ل ، م هما جذرى المعادلة

$\therefore \frac{ل + م}{٢} = ٨ \quad \therefore ل + م = ١٦$

، ل م = ٢٥

$\therefore$ المعادلة هى $س^٢ - ١٦ س + ٢٥ = ٠$

⑤ بفرض ارتفاعات المثلث هى $ل_١$ ، $ل_٢$ ، $ل_٣$ فى تتابع حسابى

$\therefore ٢ ل_٢ = ل_١ + ل_٣$

، $\because$ مساحة المثلث $= \frac{١}{٢} أ ل_١ = \frac{١}{٢} بَ ل_٢ = \frac{١}{٢} حَ ل_٣$

$\therefore أ ل_١ = بَ ل_٢ = حَ ل_٣$

$\therefore ل_١ = \frac{بَ ل_٢}{أ} ، ل_٣ = \frac{بَ ل_٢}{حَ}$

$\therefore ٢ ل_٢ = \frac{بَ ل_٢}{أ} + \frac{بَ ل_٢}{حَ}$

$\therefore ٢ \cancel{ل_٢} = \frac{(أ + حَ) بَ \cancel{ل_٢}}{أ حَ}$

$\therefore أ بَ + حَ بَ = ٢ أ حَ$

$\therefore$ (أ بَ ، أ حَ ، حَ بَ) فى تتابع حسابى.

⑥ $\because$ (أ ، ب ، حـ ، ...) متتابعة هندسية

$\therefore ب^٢ = أ حـ$

$\because أ^س = ب^ص \Leftarrow أ = ب^{\frac{ص}{س}}$

$\because حـ^ع = ب^ص \Leftarrow حـ = ب^{\frac{ص}{ع}}$

$\because أ حـ = ب^٢ \quad \therefore ب^{\frac{ص}{س}} . ب^{\frac{ص}{ع}} = ب^٢$

$\therefore \frac{ص}{س} + \frac{ص}{ع} = ٢ \quad \therefore \frac{١}{س} + \frac{١}{ع} = \frac{٢}{ص}$

تطبيقات على المتتابعة الهندسية

١ ثمن السيارة يكون متتابعة هندسية

أ = ١٥٠٠٠٠ ، ر = ١ − ١٠٪ = ٠٫٩

بعد أربع سنوات يكون ثمن السيارة $= ح_٥$

$= أ ر^٤ = ١٥٠٠٠٠ \times (٠٫٩)^٤ = ٩٨٤١٥$ جنيه.

٢ راتب الموظف يكون متتابعة هندسية

أ = ١٢٠٠ ، ر = ١ + ١٠٪ = ١٫١

بعد أربع سنوات يكون راتبه $= ح_٥ = أ ر^٤$

$= ١٢٠٠ \times (١٫١)^٤$

$= ١٧٥٦٫٩٢$ جنيه.

٣ $\because ل = أ ر^{ن - ١}$

$\therefore ١٥٣٦ = ١٢ \times (٢)^{ن - ١}$

$\therefore ٢^{ن - ١} = ١٢٨ = ٢^٧$

$\therefore ن - ١ = ٧ \quad \therefore ن = ٨$

أى بعد ٨ أيام.

٤ عدد الطلاب يكون متتابعة هندسية

أ = ٢٤٠٠ ، ر = ١ + ٤٪ = ١٫٠٤

$\therefore$ عدد الطلاب بعد ٦ سنوات $= ح_٧ = أ ر^٦$

$= ٢٤٠٠ \times (١٫٠٤)^٦ = ٣٠٣٧$ طالب.

٥ ارتفاع الكرة بعد التصادم الأول $= ٢٤٠ \times \frac{٣}{٤}$

$= ١٨٠$ متر

$\therefore$ الارتفاعات بعد كل تصادم تكون متتابعة هندسية ، أ = ١٨٠ ، ر = $\frac{٣}{٤}$

، بعد الاصطدام السابع $= ح_٧ = أ ر^٦$

$= ١٨٠ \times (\frac{٣}{٤})^٦$

$\simeq ٣٢$ متر.

إجابات تمارين 6

أولا أسئلة الاختيار من متعدد

① (أ)	② (أ)	③ (ب)	④ (أ)	⑤ (أ)
⑥ (ب)	⑦ (د)	⑧ (جـ)	⑨ (أ)	⑩ (أ)
⑪ (د)	⑫ (جـ)	⑬ (د)	⑭ (أ)	⑮ (جـ)
⑯ (أ)	⑰ (د)	⑱ (ب)	⑲ (جـ)	⑳ (د)

㉑ (أ)	㉒ (جـ)	㉓ (جـ)	㉔ (د)	㉕ (جـ)
㉖ (ب)	㉗ (د)	㉘ (ب)	㉙ (أ)	㉚ (جـ)
㉛ (د)	㉜ (جـ)	㉝ (جـ)	㉞ (د)	㉟ (د)
㊱ (جـ)	㊲ (جـ)	㊳ (ب)	㊴ (ب)	㊵ (جـ)
㊶ (أ)	㊷ (جـ)	㊸ (ب)	㊹ (ب)	㊺ (د)
㊻ (أ)	㊼ (د)	㊽ (جـ)	㊾ (ب)	㊿ (جـ)
(٥١) (ب)	(٥٢) (جـ)	(٥٣) (د)	(٥٤) (جـ)	(٥٥) (ب)
(٥٦) (د)	(٥٧) (أ)	(٥٨) (د)		

ثانيا الأسئلة المقالية

تمارين على المتسلسلة الهندسية ومجموع ن حدا الأولى من متسلسلة هندسية

١

① $حـ_ن = \frac{أ - ل ر}{١ - ر} = \frac{١ - ٦٥٦١ \times ٣}{١ - ٣} = ٩٨٤١$

② $حـ_ن = \frac{أ - ل ر}{١ - ر} = \frac{٢٠ + \frac{٥}{٣٢} \times (-\frac{١}{٢})}{١ + \frac{١}{٢}} = \frac{٤٢٥}{٣٢}$

٢

① $حـ_ن = \frac{أ(١ - ر^ن)}{١ - ر} = \frac{٤(١ - ٣^٦)}{١ - ٣} = ١٤٥٦$

② $حـ_ن = \frac{أ - ل ر}{١ - ر} = \frac{-٤ - \frac{١}{٨} \times -\frac{١}{٢}}{١ - (-\frac{١}{٢})} = \frac{-٢١}{٨}$

٣

① $\sum_{ر=١}^{٥} ٢ \times (\frac{١}{٢})^{ر - ١}$

هو مجموع متتابعة هندسية

فيها أ = ٢ ، ر = $\frac{١}{٢}$ ، ن = ٥

$\therefore حـ_٥ = \frac{٢(١ - (\frac{١}{٢})^٥)}{١ - \frac{١}{٢}} = \frac{٣١}{٨}$

② $\sum_{ر=٥}^{١٢} ٣ \times (٢)^{ر - ١}$

هو مجموع متتابعة هندسية فيها أ = ٣ ، ر = ٢

، $ح_٥ = ٣ \times ٢^٤ = ٤٨$ ، ن = ١٢ − ٥ + ١ = ٨

$\therefore حـ_٨ = \frac{٤٨(١ - (٢)^٨)}{١ - ٢} = ١٢٢٤٠$

٤

$\frac{ح_{ن+١}}{ح_ن} = \frac{١٠ \times ٢^{ن + ١ - ٢}}{١٠ \times ٢^{ن - ٢}} = ٢$ (مقدار ثابت)

$\therefore$ المتتابعة هندسية ، ر = ٢ ، أ = ٥

بفرض أن عدد الحدود = ن

$\therefore ٢٥٥٥ = \frac{٥(١ - ٢^ن)}{١ - ٢} \quad \therefore ١ - (٢)^ن = -٥١١$

$\therefore ٢^ن = ٢^٩ \quad \therefore ن = ٩$

$\therefore$ عدد الحدود = ٩

٥

$\because ح_٤ = ٥٤ \quad \therefore ٢ \times ر^٣ = ٥٤$

$\therefore ر^٣ = ٢٧ \quad \therefore ر = ٣$

، بفرض أن عدد الحدود = ن

$\therefore \frac{٢(٣^ن - ١)}{٣ - ١} > ٥٠٠٠ \quad \therefore ٣^ن > ٥٠٠١$

$\therefore ن$ لو ٣ > لو ٥٠٠١ $\quad \therefore ن > \frac{لو ٥٠٠١}{لو ٣}$

$\therefore ن > ٧٫٨$

$\therefore ن = ٨ ، ٩ ، ...$

$\therefore$ أقل عدد من الحدود يجب أخذه = ٨

٦

$\because أ ر^٣ = ٨$ (١)

، $أ ر^٦ = ٦٤$ (٢)

وبقسمة (٢) على (١) :

$\therefore ر^٣ = ٨ \quad \therefore ر = ٢$

وبالتعويض فى (١) : $\therefore أ = ١$

$\therefore$ المتتابعة هى : (١ ، ٢ ، ٤ ، ...)

، $حـ_{١٠} = \frac{١(٢^{١٠} - ١)}{٢ - ١} = ١٠٢٣$

٧

$∵ أ ر = ٦$ (١)

$أ ر^{٢} - أ = ٩$

$أ(ر^{٢} - ١) = ٩$ (٢)

بقسمة (٢) على (١):

$∴ \frac{أ(ر^{٢} - ١)}{أ ر} = \frac{٩}{٦}$ $∴ \frac{ر^{٢} - ١}{ر} = \frac{٣}{٢}$

$∴ ٢ ر^{٢} - ٣ ر - ٢ = ٠$

$∴ (٢ ر + ١)(ر - ٢) = ٠$

$∴ ر = ٢$ أو $ر = -\frac{١}{٢}$ (مرفوض)

$∴ أ = ٣$

∴ المتتابعة هي: (٣ ، ٦ ، ١٢ ، ...)

$، ح_{١٢} = \frac{٣(٢^{١٢} - ١)}{٢ - ١} = ١٢٢٨٥$

٨

$∵ أ = ٤ أ ر^{٢}$ $∴ ر^{٢} = \frac{١}{٤}$

$∴ ر = \frac{١}{٢}$ (الحدود موجبة)

$، ∵ أ ر + أ ر^{٤} = ٣٦$ $∴ أ(ر + ر^{٤}) = ٣٦$

$∴ أ(\frac{١}{٢} + \frac{١}{١٦}) = ٣٦$ $∴ أ = ٦٤$

∴ المتتابعة هي: (٦٤ ، ٣٢ ، ١٦ ، ...)

$، ح_{١٠} = \frac{٦٤(١ - (\frac{١}{٢})^{١٠})}{١ - \frac{١}{٢}} = ١٢٧ \frac{٧}{٨}$

٩

$∵ أ ر^{٢} + أ ر^{٣} = ٦ أ ر$ ، وبالقسمة على أ ر

$∴ ر + ر^{٢} = ٦$ $∴ ر^{٢} + ر - ٦ = ٠$

$∴ (ر - ٢)(ر + ٣) = ٠$

$∴ ر = ٢$ أو -٣ (مرفوض)

$، ∵ ع_{٧} = ٣٢٠$

$∴ أ × ٢^{٦} = ٣٢٠$ $∴ أ = ٥$

∴ المتتابعة هي: (٥ ، ١٠ ، ٢٠ ، ...)

$، ح_{٨} = \frac{٥(٢^{٨} - ١)}{٢ - ١} = ١٢٧٥$

١٠

$∵ أ + أ ر + أ ر^{٢} = ١٣$

$∴ أ(١ + ر + ر^{٢}) = ١٣$ (١)

$، ∵ أ ر^{٣} + أ ر^{٤} + أ ر^{٥} = ٣٥١$

$∴ أ ر^{٣}(١ + ر + ر^{٢}) = ٣٥١$ (٢)

بقسمة (٢) على (١):

$∴ \frac{أ ر^{٣}(١ + ر + ر^{٢})}{أ(١ + ر + ر^{٢})} = \frac{٣٥١}{١٣}$

$∴ ر^{٣} = ٢٧$ $∴ ر = ٣$

ومن (١): $∴ أ = ١$ ∴ المتتابعة هي: (١ ، ٣ ، ٩ ، ...)

$، ح_{١٠} = \frac{١(١ - (٣)^{١٠})}{١ - ٣} = ٢٩٥٢٤$

١١

$∵ \frac{أ[ر^{٤} - ١]}{ر - ١} = ٦٠$ (١)

$، \frac{أ ر^{٤}[ر^{٤} - ١]}{ر - ١} = \frac{١٦ أ[ر^{٤} - ١]}{ر - ١}$

$∴ ر^{٤} = ١٦$ $∴ ر = ٢$ أو -٢

وبالتعويض في (١): $∴ أ = ٤$ أو $أ = -١٢$

∴ المتتابعة هي: (٤ ، ٨ ، ١٦ ، ...)

أو (−١٢ ، ٢٤ ، −٤٨ ، ...)

١٢

$∵ \frac{ع_{ن+١}}{ع_{ن}} = \frac{ح_{ن+١} - ح_{ن}}{ح_{ن} - ح_{ن-١}}$

$= \frac{\frac{١}{٢}(٣^{ن+٣} - ٩) - \frac{١}{٢}(٣^{ن+٢} - ٩)}{\frac{١}{٢}(٣^{ن+٢} - ٩) - \frac{١}{٢}(٣^{ن+١} - ٩)}$

$= \frac{\frac{١}{٢}[٣^{ن+٣} - ٩ - ٣^{ن+٢} + ٩]}{\frac{١}{٢}[٣^{ن+٢} - ٩ - ٣^{ن+١} + ٩]}$

$= \frac{٣^{ن+٣} - ٣^{ن+٢}}{٣^{ن+٢} - ٣^{ن+١}}$

$= \frac{٣(٣^{ن+٢} - ٣^{ن+١})}{(٣^{ن+٢} - ٣^{ن+١})} = ٣ =$ مقدار ثابت،

∴ المتتابعة هندسية،

$، ∵ ح_{١} = \frac{١}{٢}(٣^{٣} - ٩) = ٩ = ع_{١}$

∴ المتتابعة هي: (٩ ، ٢٧ ، ٨١ ، ...)

١٣

الوسطين الأولين هما: ٨١ ر ، ٨١ ر^٢

، الوسطين الأخيرين هما: $\frac{١}{٧٢٩ ر}$ ، $\frac{١}{٧٢٩ ر^{٢}}$

$∴ ٨١ ر + ٨١ ر^{٢} = ٣٦$

$∴ ٨١ ر(١ + ر) = ٣٦$ (١)

$، \frac{١}{٧٢٩ ر} + \frac{١}{٧٢٩ ر^{٢}} = \frac{٤}{٢٤٣}$

$∴ \frac{ر + ١}{٧٢٩ ر^{٢}} = \frac{٤}{٢٤٣}$ (٢)

بقسمة (١) ÷ (٢):

$∴ \frac{٨١ ر(١ + ر)}{١} × \frac{٧٢٩ ر^{٢}}{ر + ١} = \frac{٣٦ × ٢٤٣}{٤}$

$∴ ر^{٣} = \frac{١}{٢٧}$ $∴ ر = \frac{١}{٣}$

∴ الأوساط هي: (٢٧ ، ٩ ، ٣ ، ... ، $\frac{١}{٢٤٣}$)

$، ح_{ن} = \frac{٢٧ - \frac{١}{٢٤٣} × \frac{١}{٣}}{١ - \frac{١}{٣}} = \frac{٩٨٤١}{٢٤٣}$

١٤

$∵ \frac{أ(١ - ر^{٩})}{١ - ر} = ل$ (١)

$، \frac{أ ر^{٩}(١ - ر^{٩})}{١ - ر} = م$ (٢)

بقسمة (٢) على (١):

$∴ ر^{٩} = \frac{م}{ل}$ $∴ ر = \sqrt[٩]{\frac{م}{ل}}$

١٥

① $ر = \frac{٢١}{٧} = ٣$ $∴ |ر| > ١$

∴ لا يمكن جمع عدد لا نهائي من حدودها

② $ر = \frac{٤٥}{٧٥} = \frac{٣}{٥}$ $∴ |ر| < ١$

∴ يمكن إيجاد مجموع عدد لا نهائي من حدودها

$، ح_{∞} = \frac{٧٥}{١ - \frac{٣}{٥}} = ١٨٧,٥$

③ $ر = \frac{-٥}{١٥} = -\frac{١}{٣}$ $∴ |ر| < ١$

∴ يمكن إيجاد مجموع عدد لا نهائي من حدودها

$، ح_{∞} = \frac{١٥}{١ - (-\frac{١}{٣})} = ١١,٢٥$

④ $ر = \frac{-٤٨}{٩٦} = -\frac{١}{٢}$ $∴ |ر| < ١$

∴ يمكن إيجاد مجموع عدد لا نهائي من حدودها

$، ح_{∞} = \frac{٩٦}{١ - (-\frac{١}{٢})} = ٦٤$

١٦

① $ر = \frac{١٢}{٢٤} = \frac{١}{٢}$ $∴ |ر| < ١$

∴ يمكن إيجاد مجموع حدود المتتابعة إلى ∞

$، ح_{∞} = \frac{٢٤}{١ - \frac{١}{٢}} = ٤٨$

② $ر = \frac{-٦}{٣} = -٢$ $∴ |ر| > ١$

∴ لا يمكن إيجاد مجموع حدود المتتابعة إلى ∞

③ $ع_{٢} = ٥ × ٢ = ١٠$ ، $ع_{٣} = ٥ × ٢^{٢} = ٢٠$

$∴ ر = \frac{ع_{٣}}{ع_{٢}} = \frac{٢٠}{١٠} = ٢$ $∴ |ر| > ١$

∴ لا يمكن إيجاد مجموع حدود المتتابعة إلى ∞

④ $ع_١ = ٢ \times ٥^٠ = ٢$ ، $ع_٢ = ٢ \times ٥^{-١} = \frac{٢}{٥}$

$\therefore ر = \frac{\frac{٢}{٥}}{٢} = \frac{١}{٥}$ $\therefore |ر| < ١$

∴ يمكن إيجاد مجموع حدود المتتابعة إلى ∞

، $ج_\infty = \frac{٢}{١ - \frac{١}{٥}} = \frac{٥}{٢}$

١٧

① $٠,\overline{٣} = ٠,٣ + ٠,٠٣ + ٠,٠٠٣ + \cdots$

$= \frac{٠,٣}{١ - ٠,١} = \frac{١}{٣}$

② $٠,\overline{١٨} = ٠,١٨ + ٠,٠٠١٨ + ٠,٠٠٠٠١٨ + \cdots$

$= \frac{٠,١٨}{١ - ٠,٠١} = \frac{٢}{١١}$

③ $٠,\overline{٠٣٧} = ٠,٠٣٧ + ٠,٠٠٠٠٣٧ + ٠,٠٠٠٠٠٠٠٣٧ + \cdots$

$= \frac{٠,٠٣٧}{١ - ٠,٠٠١} = \frac{١}{٢٧}$

$\therefore \sqrt[٣]{٠,\overline{٠٣٧}} = \sqrt[٣]{\frac{١}{٢٧}} = \frac{١}{٣}$

④ $٠,\overline{٤} = ٠,٤ + ٠,٠٤ + ٠,٠٠٤ + \cdots$

$= \frac{٠,٤}{١ - ٠,١} = \frac{٤}{٩}$ (١)

، $٠,٢\overline{٣} = ٠,٢ + [٠,٠٣ + ٠,٠٠٣ + ٠,٠٠٠٣ + \cdots]$

$= ٠,٢ + \frac{٠,٠٣}{١ - ٠,١} = \frac{٧}{٣٠}$ (٢)

من (١) ، (٢) :

$\therefore ٠,\overline{٤} + ٠,٢\overline{٣} = \frac{٤}{٩} + \frac{٧}{٣٠} = \frac{٦١}{٩٠}$

١٨

① $\sum_{ر=١}^{\infty} ٥٦ \times \left(\frac{٣}{٤}\right)^{ر-١}$

$\therefore أ = ٥٦$ ، $ر = \frac{٣}{٤}$

$\therefore ج_\infty = \frac{٥٦}{١ - \frac{٣}{٤}} = ٢٢٤$

② $\sum_{ر=٢}^{\infty} \frac{١}{٨١} (٣)^{١-ر} = \sum_{ر=٢}^{\infty} \frac{١}{٨١} \left(\frac{١}{٣}\right)^{ر-١}$

$\therefore أ = \frac{١}{٢٤٣}$ ، $ر = \frac{١}{٣}$

$\therefore ج_\infty = \frac{\frac{١}{٢٤٣}}{١ - \frac{١}{٣}} = \frac{١}{١٦٢}$

١٩

$أ = ١٨$ ، $أ ر^٢ = \frac{١٦}{٣}$

$\therefore ١٨ ر^٢ = \frac{١٦}{٣}$ $\therefore ر = \frac{٢}{٣}$

$\therefore ج_\infty = \frac{١٨}{١ - \frac{٢}{٣}} = ٥٤$

٢٠

$\frac{أ}{١ - ر} = ١٠٨$ $\therefore أ = ١٠٨ (١ - ر)$ (١)

، $أ - أ ر = ١٢$ $\therefore أ (١ - ر) = ١٢$ (٢)

بالتعويض من (١) فى (٢) :

$\therefore ١٠٨ (١ - ر)^٢ = ١٢$

$\therefore (١ - ر)^٢ = \frac{١}{٩}$ $\therefore ١ - ر = \pm \frac{١}{٣}$

$\therefore ر = \frac{٢}{٣}$ أ، $ر = \frac{٤}{٣}$ (مرفوض)

$\therefore أ = ٣٦$

∴ المتتابعة هى : (٣٦ ، ٢٤ ، ١٦ ، ...)

، $ج_٧ = \frac{٣٦ \left(١ - \left(\frac{٢}{٣}\right)^٧\right)}{١ - \frac{٢}{٣}} = \frac{٨٢٣٦}{٨١}$

٢١

$\because أ + أ ر = ١٦$ $\therefore أ (١ + ر) = ١٦$ (١)

، $\frac{أ}{١ - ر} = ٢٥$ $\therefore أ = ٢٥ (١ - ر)$ (٢)

بالتعويض من (٢) فى (١) :

$\therefore ٢٥ (١ - ر)(١ + ر) = ١٦$

$\therefore ١ - ر^٢ = \frac{١٦}{٢٥}$ $\therefore ر^٢ = \frac{٩}{٢٥}$

∴ $ر = \frac{٣}{٥}$ ومنها $أ = ١٠$ أ، $ر = -\frac{٣}{٥}$ ومنها $أ = ٤٠$

∴ المتتابعة هى : (١٠ ، ٦ ، $\frac{١٨}{٥}$ ، ...)

أ، المتتابعة هى : (٤٠ ، −٢٤ ، $\frac{٧٢}{٥}$ ، ...)

٢٢

$أ = \frac{أ ر}{١ - ر}$ $\therefore ١ = \frac{ر}{١ - ر}$

$\therefore ١ - ر = ر$ $\therefore ر = \frac{١}{٢}$

، $أ + أ ر = ٩$ $\therefore أ + \frac{١}{٢} أ = ٩$

$\therefore أ = ٦$

∴ المتتابعة هى : (٦ ، ٣ ، $\frac{٣}{٢}$ ، ...)

٢٣

$\because ع_ن = ٢ \times \frac{ع_{ن+١}}{١ - ر}$

$\therefore أ ر^{ن-١} = ٢ \left(\frac{أ ر^ن}{١ - ر}\right)$ $\therefore ١ = \frac{٢ ر}{١ - ر}$

$\therefore ر = \frac{١}{٣}$ $\because ع_٣ \times ع_٤ = ١$

$\therefore أ^٢ ر^٥ = ١$ $\therefore أ^٢ \times \frac{١}{٧٢٩} = ١$

$\therefore أ^٢ = ٧٢٩$ $\therefore أ = ٢٧$

$\therefore (ع_ن) = (٢٧ ، ٩ ، ٣ ، ...)$

، $ج_٥ = \frac{٢٧ \left[١ - \left(\frac{١}{٣}\right)^٥\right]}{١ - \frac{١}{٣}} = \frac{١٢١}{٣}$

٢٤

$\because ع_ن = ٧ \times \frac{ع_{ن+١}}{١ - ر}$ $\therefore أ ر^{ن-١} = \frac{٧ أ ر^ن}{١ - ر}$

$\therefore ١ = \frac{٧ ر}{١ - ر}$ $\therefore ٧ ر = ١ - ر$

$\therefore ر = \frac{١}{٨}$

، $\because ع_٣ = \frac{٣}{٨}$ $\therefore أ ر^٢ = \frac{٣}{٨}$

$\therefore أ \left(\frac{١}{٦٤}\right) = \frac{٣}{٨}$ $\therefore أ = ٢٤$

∴ المتتابعة هى : (٢٤ ، ٣ ، $\frac{٣}{٨}$ ، ...)

٢٥

$\frac{أ}{١ - ر} = \frac{٣٧٥}{٤}$ (١)

، $أ + أ ر = ٩٠$

$\therefore أ (١ + ر) = ٩٠$ (٢)

بقسمة (١) على (٢) :

$\therefore \frac{أ}{١ - ر} \times \frac{١}{أ (١ + ر)} = \frac{٣٧٥}{٤} \times \frac{١}{٩٠}$

$\therefore ١ - ر^٢ = \frac{٢٤}{٢٥}$ $\therefore ر^٢ = \frac{١}{٢٥}$

∴ $ر = \frac{١}{٥}$ ومنها $أ = ٧٥$ أ، $ر = -\frac{١}{٥}$ ومنها $أ = ١١٢,٥$

∴ يوجد متتابعتان هما : (٧٥ ، ١٥ ، ٣ ، ...)

أ، (١١٢,٥ ، −٢٢,٥ ، ٤,٥ ، ...)

٢٦

$\because أ ر - أ ر^٥ = ٤٥$ $\therefore أ ر (١ - ر^٤) = ٤٥$ (١)

، $\frac{أ (١ - ر^٤)}{١ - ر} = ١٨٠$ (٢)

بقسمة (١) على (٢) :

$\therefore أ ر (١ - ر^٤) \times \frac{١ - ر}{أ (١ - ر^٤)} = \frac{٤٥}{١٨٠}$

$\therefore ر - ر^٢ = \frac{١}{٤}$

$\therefore ٤ ر^٢ - ٤ ر + ١ = ٠$ $\therefore (٢ ر - ١)^٢ = ٠$

$\therefore ر = \frac{١}{٢}$ $\therefore |ر| < ١$

∴ يمكن إيجاد مجموع عدد لا نهائى من حدودها

، من (١) : $\therefore أ = ٩٦$

∴ المتتابعة هى : (٩٦ ، ٤٨ ، ٢٤ ، ...)

، $ج_\infty = \frac{٩٦}{١ - \frac{١}{٢}} = ١٩٢$

٢٧

$أ + أ ر = ١٠٨$ $\therefore أ (١ + ر) = ١٠٨$ (١)

، $أ ر^٢ + أ ر^٣ = ١٢$ $\therefore أ ر^٢ (١ + ر) = ١٢$ (٢)

بقسمة (٢) على (١) :

$\therefore \frac{أ ر^٢ (١ + ر)}{أ (١ + ر)} = \frac{١}{٩}$

$\therefore ر^٢ = \frac{١}{٩}$ $\therefore ر = \frac{١}{٣}$ أ، $-\frac{١}{٣}$ (مرفوض)

وبالتعويض فى (١) : $\therefore أ = ٨١$

∴ المتتابعة هى : (٨١ ، ٢٧ ، ٩ ، ...)

، $\because |ر| < ١$

∴ يمكن إيجاد مجموع عدد غير منته من حدود المتتابعة

، $ج_\infty = \frac{٨١}{١ - \frac{١}{٣}} = ١٢١,٥$

٢٨

$\because أ + أ ر^{٣} = ٧٠ \quad \therefore أ(١ + ر^{٣}) = ٧٠ \quad (١)$

$، أ ر + أ ر^{٢} = ٦٠ \quad \therefore أ ر(١ + ر) = ٦٠ \quad (٢)$

بقسمة (٢) على (١):

$\therefore \frac{أ ر(١+ر)}{أ(١+ر)(١ - ر + ر^{٢})} = \frac{٦٠}{٧٠}$

$\therefore \frac{ر}{١ - ر + ر^{٢}} = \frac{٦}{٧} \quad \therefore ٦ - ٦ ر + ٦ ر^{٢} = ٧ ر$

$\therefore ٦ ر^{٢} - ١٣ ر + ٦ = ٠$

$\therefore (٢ ر - ٣)(٣ ر - ٢) = ٠$

$\therefore ر = \frac{٣}{٢}$ أ، $ر = \frac{٢}{٣}$

∴ يوجد متتابعتان تحققان الشروط ويمكن إيجاد مجموع عدد غير منته من حدود المتتابعة الثانية حيث إن $|ر| < ١$

، عند $ر = \frac{٢}{٣}$ فإن $أ = ٥٤$

∴ المتتابعة هي: (٥٤ ، ٣٦ ، ٢٤ ، ...)

$، ح_{\infty} = \frac{٥٤}{١ - \frac{٢}{٣}} = ١٦٢$

٢٩

$أ \times أ ر \times أ ر^{٢} = ٦٤ \quad \therefore أ^{٣} ر^{٣} = ٦٤$

$\therefore أ ر = ٤ \quad (١)$

$، أ ر + أ ر^{٢} + أ ر^{٣} = ٧$

وبالتعويض من (١): $\therefore ٤ + ٤ ر + ٤ ر^{٢} = ٧$

$\therefore ٤ ر^{٢} + ٤ ر - ٣ = ٠$

$\therefore (٢ ر - ١)(٢ ر + ٣) = ٠$

$\therefore ر = \frac{١}{٢}$ ومنها $أ = ٨$ أ، $ر = -\frac{٣}{٢}$ ومنها $أ = \frac{-٨}{٣}$

∴ المتتابعة هي: (٨ ، ٤ ، ٢ ، ...)

أ، $(\frac{-٨}{٣} ، ٤ ، -٦ ، ...)$

∴ توجد متتابعتان تحققان الشروط ويمكن جمع الأولى إلى ∞

$، ح_{\infty} = \frac{٨}{١ - \frac{١}{٢}} = ١٦$

٣٠

$\because \frac{أ}{١ - ر} = ١٨ \quad \therefore أ = ١٨(١ - ر) \quad (١)$

، ∵ مجموع مربعات حدودها إلى ∞ هو مجموع حدود متتابعة هندسية حدها الأول $أ^{٢}$ والأساس $ر^{٢}$

$\therefore \frac{أ^{٢}}{١ - ر^{٢}} = ١٠٨ \quad (٢)$

وبالتعويض من (١) في (٢):

$\therefore \frac{(١٨)^{٢}(١ - ر)^{٢}}{(١ - ر)(١ + ر)} = ١٠٨ \quad \therefore \frac{١ - ر}{١ + ر} = \frac{١}{٣}$

$\therefore ٣ - ٣ ر = ١ + ر \quad \therefore ٤ ر = ٢$

$\therefore ر = \frac{١}{٢}$

وبالتعويض في (١): $\therefore أ = ١٨(١ - \frac{١}{٢}) = ٩$

∴ المتتابعة هي: $(٩ ، \frac{٩}{٢} ، \frac{٩}{٤} ، ...)$

٣١

$\because أ + أ ر + أ ر^{٢} = ١٤$

$\therefore أ(١ + ر + ر^{٢}) = ١٤ \quad (١)$

$، \because أ^{٢} + أ^{٢} ر^{٢} + أ^{٢} ر^{٤} = ٨٤$

$\therefore أ^{٢}(١ + ر^{٢} + ر^{٤}) = ٨٤ \quad (٢)$

وبتربيع (١) وبالقسمة على (٢):

$\therefore \frac{(١ + ر + ر^{٢})^{٢}}{١ + ر^{٢} + ر^{٤}} = \frac{١٩٦}{٨٤}$

$\therefore \frac{(١ + ر + ر^{٢})^{٢}}{١ + ٢ ر^{٢} + ر^{٤} - ر^{٢}} = \frac{٧}{٣}$

$\therefore \frac{(١ + ر + ر^{٢})^{٢}}{(١ + ر^{٢})^{٢} - ر^{٢}} = \frac{٧}{٣}$

$\therefore \frac{(١ + ر + ر^{٢})^{٢}}{(١ + ر^{٢} - ر)(١ + ر^{٢} + ر)} = \frac{٧}{٣}$

$\therefore \frac{١ + ر + ر^{٢}}{١ + ر^{٢} - ر} = \frac{٧}{٣}$

$\therefore ٤ ر^{٢} - ١٠ ر + ٤ = ٠$

$\therefore ٢ ر^{٢} - ٥ ر + ٢ = ٠$

$\therefore (ر - ٢)(٢ ر - ١) = ٠$

$\therefore ر = ٢$ ومنها $أ = ٢$

∴ المتتابعة هي: (٢ ، ٤ ، ٨ ، ...)

أ، $ر = \frac{١}{٢}$ ومنها $أ = ٨$

∴ المتتابعة هي: (٨ ، ٤ ، ٢ ، ...)

ويمكن جمع المتتابعة الثانية إلى ∞

$\therefore ح_{\infty} = \frac{٨}{١ - \frac{١}{٢}} = ١٦$

٣٢

① الخطأ: $|ر| \geq ١$ ، الصواب: $|ر| < ١$

② التصحيح: يساوي ضعف حدها الأول.

ثالثًا مسائل تقيس مهارات التفكير

① (أ) ② (جـ) ③ (ب) ④ (جـ) ⑤ (د)

⑥ (د) ⑦ (ب) ⑧ (ب) ⑨ (د) ⑩ (ب)

⑪ (د)

إرشادات الحل:

① $\because ع_{١} + ع_{٢} = ٣$ وهما عددان صحيحان

$\therefore ع_{١} = ١ ، ع_{٢} = ٢$ ومنها $ر = ٢$

(مرفوض لأن المتتابعة غير منتهية)

أ، $ع_{١} = ٢ ، ع_{٢} = ١$ ، ومنها $ر = \frac{١}{٢}$

$\therefore ح_{\infty} = \frac{أ}{١ - ر} = \frac{٢}{١ - \frac{١}{٢}} = ٤$

② $\because \sum_{ر=٠}^{\infty} \frac{أ}{(٤)^{ر}} = \sum_{ر=٠}^{\infty} أ (\frac{١}{٤})^{ر}$

$= \frac{أ}{١ - \frac{١}{٤}} = \frac{٤ أ}{٣}$

$\therefore \frac{٤ أ}{٣} = ١٦ \quad \therefore أ = ١٢$

③ $\because ح_{\infty} = ٥ \quad \therefore \frac{س}{١ - ر} = ٥$

$\therefore ١ - ر = \frac{١}{٥} س \quad \therefore ر = ١ - \frac{١}{٥} س$

$\therefore -١ < ١ - \frac{١}{٥} س < ١$

$\therefore -٢ < -\frac{١}{٥} س < ٠$

$\therefore ١٠ > س > ٠$ أي أن: $٠ < س < ١٠$

④ $\because ح_{١٨}$ الأولى $- ح_{١٠}$ الأولى $= س$

$\therefore \frac{أ(١ - ر^{١٨})}{١ - ر} - \frac{أ(١ - ر^{١٠})}{١ - ر} = س$

$\therefore \frac{أ}{١ - ر}(١ - ر^{١٨} - ١ + ر^{١٠}) = س$

$\therefore \frac{أ}{١ - ر}(ر^{١٠} - ر^{١٨}) = س$

$\therefore \frac{أ ر^{١٠}(١ - ر^{٨})}{١ - ر} = س \quad (١)$

$، \because ح_{١٥}$ الأولى $- ح_{٧}$ الأولى $= ص$

$\therefore \frac{أ(١ - ر^{١٥})}{١ - ر} - \frac{أ(١ - ر^{٧})}{١ - ر} = ص$

$\therefore \frac{أ}{١ - ر}(١ - ر^{١٥} - ١ + ر^{٧}) = ص$

$\therefore \frac{أ}{١ - ر}(ر^{٧} - ر^{١٥}) = ص$

$\therefore \frac{أ ر^{٧}(١ - ر^{٨})}{١ - ر} = ص \quad (٢)$

بقسمة (١) ، (٢): $\therefore ر^{٣} = \frac{س}{ص}$

$\therefore ر = \sqrt[٣]{\frac{س}{ص}}$

⑤ بفرض المتتابعة $(أ ، أ ر ، أ ر^{٢} ، أ ر^{ن-١})$

∴ مجموعها $(حـ) = \frac{أ(١ - ر^{ن})}{١ - ر}$

، ∵ متتابعة المقلوبات هي:

$(\frac{١}{أ} ، \frac{١}{أ ر} ، \frac{١}{أ ر^{٢}} ، ... ، \frac{١}{أ ر^{ن-١}})$

حدها الأول $= \frac{١}{أ}$ ، أساسها $= \frac{١}{ر}$

∴ مجموعها $(حـَ) = \frac{\frac{١}{أ}(١ - (\frac{١}{ر})^{ن})}{(١ - \frac{١}{ر})}$

$= \frac{(ر^{ن} - ١)}{أ ر^{ن-١}(ر - ١)}$

$= \frac{أ(ر^{ن} - ١)}{أ^{٢} ر^{ن-١}(ر - ١)}$

$= \frac{حـ}{أ^{٢} ر^{ن-١}}$

(٦) ∵ المتتابعة هى $(أ ، أ ر ، \dots ، \frac{ل}{ر} ، ل)$

∵ حاصل ضرب الحد الأول × الحد الأخير = أ ل

، حاصل ضرب الحد الثانى × الحد قبل الأخير $= أ ر \times \frac{ل}{ر} = أ ل$

∴ حاصل ضرب كل الحدود $= (أ ل)^{\frac{ن}{٢}}$

(٧) ∵ $س = \sum_{ن=٠}^{\infty} جتا^{٢ن} هـ$

$= ١ + جتا^٢ هـ + جتا^٤ هـ + \dots$

$= \frac{١}{١ - جتا^٢ هـ} = \frac{١}{جا^٢ هـ}$

، $ص = \sum_{ن=٠}^{\infty} جا^{٢ن} هـ$

$= ١ + جا^٢ هـ + جا^٤ هـ + \dots$

$= \frac{١}{١ - جا^٢ هـ} = \frac{١}{جتا^٢ هـ}$

∴ $س + ص = \frac{١}{جا^٢ هـ} + \frac{١}{جتا^٢ هـ}$

$= \frac{جتا^٢ هـ + جا^٢ هـ}{جا^٢ هـ \, جتا^٢ هـ}$

$= \frac{١}{جا^٢ هـ \, جتا^٢ هـ} = س ص$

أى أن : س + ص = س ص

(٨) ∵ $ب = \sum_{ن=١}^{١٠٠} ح_{٢ن} = ح_٢ + ح_٤ + ح_٦ + ح_٨ + \dots + ح_{٢٠٠}$

$= ح_١ ر + ح_٣ ر + ح_٥ ر + \dots + ح_{١٩٩} ر$

$= ر [ح_١ + ح_٣ + ح_٥ + \dots + ح_{١٩٩}]$

$= ر \times \sum_{ن=١}^{١٠٠} ح_{٢ن-١} = ر \times أ$

∴ ب = ر أ   ∴ $ر = \frac{ب}{أ}$

(٩) $١ + ٢ س + ٣ س^٢ + ٤ س^٣ + \dots$ إلى ∞

$= ١ + س + س^٢ + س^٣ + \dots$ إلى ∞

$+ س + س^٢ + س^٣ + \dots$ إلى ∞

$+ س^٢ + س^٣ + \dots$ إلى ∞

$+ س^٣ + \dots$ إلى ∞ ... وهكذا

$= \frac{١}{١ - س} + \frac{س}{١ - س} + \frac{س^٢}{١ - س} + \dots$ إلى ∞

$= \frac{١ + س + س^٢ + \dots \text{ إلى } \infty}{١ - س} = \frac{١}{(١ - س)^٢}$

(١٠) ∵ $١٦ س^٢ - ١٦ س + ١ = ٠$

∴ ل + م = ١ ، $ل م = \frac{١}{١٦}$

$\sum_{ر=١}^{\infty} ل^ر = ل + ل^٢ + ل^٣ + \dots = \frac{ل}{١ - ل}$

$\sum_{ر=١}^{\infty} م^ر = م + م^٢ + م^٣ + \dots = \frac{م}{١ - م}$

$\frac{ل}{١ - ل} + \frac{م}{١ - م} = \frac{(ل + م) - ٢ ل م}{١ - (ل + م) + ل م}$

$= \frac{١ - \frac{١}{٨}}{١ - ١ + \frac{١}{١٦}} = \frac{٧}{٨} \times ١٦ = ١٤$

(١١) المتتابعة المعطاة تتكون من متتابعتين إحداهما من الحدود الفردية الرتبة (١ ، ٣ ، ٥ ، ٧ ، ...) وتكون حسابية حدها الأول = ١ ، وأساسها = ٢

∴ ح$_{١٠}$ الأولى $= \frac{١٠}{٢} [٢ \times ١ + ٩ \times ٢] = ١٠٠$

والأخرى من الحدود الزوجية الرتبة (٢ ، ٤ ، ٨ ، ١٦ ، ...) وتكون هندسية حدها الأول = ٢ ، وأساسها = ٢

∴ ح$_{١٠}$ الأولى $= \frac{٢ (٢^{١٠} - ١)}{٢ - ١} = ٢٠٤٦$

∴ مجموع العشرين حدًا الأولى من المتتابعة المعطاة = ٢٠٤٦ + ١٠٠ = ٢١٤٦

تطبيقات حياتية

١ عدد البكتريا يكون متتابعة هندسية فيها أ = ٨٠٠ ، ر = ٢

∴ $ح_{١٠} = \frac{٨٠٠ (٢^{١٠} - ١)}{٢ - ١} = ٨١٨٤٠٠$

٢ ∵ مقدار ما يتسرب من الخزان يوميًا يكون متتابعة هندسية حدها الأول ٦ وأساسها ٢

وبفرض أن الخزان سيفرغ بعد ن يومًا

∴ $ح_ن = ٦١٣٨$ ∴ $\frac{٦ (٢^ن - ١)}{٢ - ١} = ٦١٣٨$

∴ $٢^ن - ١ = ١٠٢٣$ ∴ $٢^ن = ١٠٢٤ = ٢^{١٠}$

∴ ن = ١٠   ∴ الخزان سيفرغ بعد ١٠ أيام

٣ المرتب يكون متتابعة هندسية فيها :

أ = ٧٢٠٠ ، ر = ١٫٠٦

∴ $ع_٧ = ٧٢٠٠ \times (١٫٠٦)^٦ = ١٠٢١٣$

، $ح_٧ = \frac{٧٢٠٠ [(١٫٠٦)^٧ - ١]}{١٫٠٦ - ١} = ٦٠٤٣٦$ جنيه

٤ سعة التخزين تكون متتابعة هندسية فيها

أ = ٢٧٠ ، $ر = \frac{٢}{٣}$

أكبر سعة تخزين هى : $ح_٧ = \frac{٢٧٠ (١ - (\frac{٢}{٣})^٧)}{١ - \frac{٢}{٣}}$

= ٧٦٢ طن

∴ لا يمكن للشركة تخزين ٨٠٠ طن من القمح.

٥ إنتاج الذهب يكون متتابعة هندسية

أ = ٤٢٠٠ ، ر = ٠٫٩

∴ $ع_٨ = ٤٢٠٠ \times (٠٫٩)^٧ = ٢٠٠٨٫٨$ كجم

، $ح_٨ = \frac{٤٢٠٠ [١ - (٠٫٩)^٨]}{١ - ٠٫٩} = ٢٣٩٢٠$ كجم

٦ محيط المثلثات يكون متتابعة هندسية هى : (١٢٠ ، ٦٠ ، ٣٠ ، ...)

∴ أ = ١٢٠ ، $ر = \frac{١}{٢}$

∴ $ح_{١٠} = \frac{١٢٠ (١ - (\frac{١}{٢})^{١٠})}{١ - \frac{١}{٢}} = ٢٤٠$ سم

٧ عمل يبدأ بمرتب سنوى ١٠٠٠ جنيه مع علاوة ثابتة سنويًا قدرها ٣٠ جنيهًا يعطى متتابعة حسابية فيها

أ = ١٠٠٠ ، ء = ٣٠

∴ $ح_{٢٥} = \frac{٢٥}{٢} [٢ \times ١٠٠٠ + ٢٤ \times ٣٠] = ٣٤٠٠٠$ جنيه

أما عمل يبدأ بمرتب سنوى ١٠٠٠ جنيه مع علاوة سنوية قدرها ٢ ٪ من قيمة مرتب السنة السابقة يعطى متتابعة هندسية فيها أ = ١٠٠٠ ، ر = ١٫٠٢

∴ $ح_{٢٥} = \frac{١٠٠٠ [(١٫٠٢)^{٢٥} - ١]}{١٫٠٢ - ١} = ٣٢٠٣٠$ جنيهًا

∴ العمل بمرتب سنوى ١٠٠٠ جنيه مع علاوة سنوية ثابتة ٣٠ جنيهًا أفضل على مدى ٢٥ عامًا، والفرق بين الدخلين = ٣٤٠٠٠ − ٣٢٠٣٠ = ١٩٧٠ جنيهًا.

٨ ما ينتجه البئر من بترول يكون متتابعة هندسية حدها الأول ٤٨٠٠٠ والأساس = ١ − ٠٫٠٥ = ٠٫٩٥

∴ أقصى ما يمكن إنتاجه $ح_\infty = \frac{٤٨٠٠٠}{١ - ٠٫٩٥}$

= ٩٦٠٠٠٠ برميل

٩ المسافات المقطوعة تكون متتابعة هندسية فيها :

أ = ٢٥ ، $ر = \frac{٦٠}{١٠٠} = \frac{٣}{٥}$

∴ المسافة الكلية $= ح_\infty = \frac{٢٥}{١ - \frac{٣}{٥}} = \frac{١٢٥}{٢}$ متر

١٠ المسافات التى تكون قد قطعتها الكرة من لحظة سقوطها حتى تسكن

$= ١٠ + ٢ \times \frac{٥}{١ - \frac{١}{٢}}$

= ٣٠ مترًا

إجابات الوحدة الثانية

إجابات تمارين 7

أولاً أسئلة الاختيار من متعدد

① (د) ② (أ) ③ (جـ) ④ (جـ) ⑤ (د)
⑥ (ب) ⑦ (أ) ⑧ (جـ) ⑨ (جـ) ⑩ (ب)
⑪ (د) ⑫ (جـ) ⑬ (د) ⑭ (جـ) ⑮ (ب)
⑯ (جـ) ⑰ (جـ) ⑱ (د) ⑲ (ب) ⑳ (ب)
(٢١) (ب) (٢٢) (جـ) (٢٣) (د) (٢٤) (د) (٢٥) (جـ)
(٢٦) (د) (٢٧) (د) (٢٨) (جـ) (٢٩) (جـ) (٣٠) (د)
(٣١) (جـ) (٣٢) (جـ) (٣٣) (أ) (٣٤) (جـ) (٣٥) (أ)
(٣٦) (جـ) (٣٧) (أ) (٣٨) (ب) (٣٩) (جـ) (٤٠) (ب)
(٤١) (د) (٤٢) (ب) (٤٣) (ب) (٤٤) (ب) (٤٥) (جـ)
(٤٦) (جـ) (٤٧) (ب) (٤٨) (أ) (٤٩) (ب) (٥٠) (أ)
(٥١) (جـ) (٥٢) (جـ) (٥٣) (ب) (٥٤) (د) (٥٥) (ب)
(٥٦) (أ) (٥٧) (أ) (٥٨) (أ) (٥٩) (ب) (٦٠) (أ)
(٦١) (جـ) (٦٢) (جـ)

ثانياً الأسئلة المقالية

١

① ∵ ن! = ٧٢٠ = ٦! ∴ ن = ٦

② ∵ $^{١٥}ل_{ر}$ = ٢٧٣٠ = ١٥ × ١٤ × ١٣ = $^{١٥}ل_{٣}$
∴ ر = ٣

③ ∵ $^{ن}ل_{٣}$ = ٥٠٤ = ٩ × ٨ × ٧ = $^{٩}ل_{٣}$ ∴ ن = ٩

④ $^{(ن-١)}ل_{٤}$ = ١٢٠ = ٥ × ٤ × ٣ × ٢ = $^{٥}ل_{٤}$
∴ ن − ١ = ٥   ∴ ن = ٦

⑤ ∵ $^{ن}ل_{٠}$ + $^{ن}ل_{١}$ + $^{ن}ل_{٢}$ = ٥٠
∴ ١ + ن + ن (ن − ١) = ٥٠
∴ ن² + ١ = ٥٠   ∴ ن² = ٤٩
∴ ن = ٧

⑥ (ن − ٤)! = ١٢٠ = ٥! ∴ ن − ٤ = ٥
∴ ن = ٩

⑦ ∵ ن (٢ن − ١)! = ١٢ ∴ ٢ن (٢ن − ١)! = ٢٤
∴ (٢ن)! = ٤! ∴ ٢ن = ٤ ∴ ن = ٢

⑧ ∵ (ن + ١)! / ن! = ٥ ∴ (ن + ١) ن! / ن! = ٥
∴ ن + ١ = ٥ ∴ ن = ٤

٢

① ∵ (ن − ٥)! = ١ ∴ ن − ٥ = ٠ ومنها ن = ٥
أو ن − ٥ = ١ ومنها ن = ٦
∴ م.ح = {٥ ، ٦}

② ∵ (ن + ١)! / (ن − ١)! = ٤٢ ∴ (ن + ١) (ن) (ن − ١)! / (ن − ١)! = ٤٢
∴ (ن + ١) (ن) = ٤٢ = ٧ × ٦ ∴ ن = ٦
∴ م.ح = {٦}

③ ∵ ١٢ ن! = (ن + ٢)!
∴ ١٢ ن! = (ن + ٢) (ن + ١) ن!
∴ (ن + ٢) (ن + ١) = ١٢ = ٤ × ٣
∴ ن + ٢ = ٤ ∴ ن = ٢ ∴ م.ح = {٢}

④ ∵ ن! = ٣٠ (ن − ٢)!
∴ ن (ن − ١) (ن − ٢)! = ٣٠ (ن − ٢)!
∴ ن (ن − ١) = ٣٠ = ٦ × ٥
∴ ن = ٦ ∴ م.ح = {٦}

٣

① ∵ $^{ن}ل_{٤}$ = ١٤ × $^{ن-٢}ل_{٢}$
∴ ن! / (ن − ٤)! = ١٤ (ن − ٢)! / (ن − ٤)!
∴ ن (ن − ١) (ن − ٢)! / ((ن − ٤) (ن − ٥)!) = ١٤ (ن − ٢)! / (ن − ٥)!
∴ ن (ن − ١) = ١٤ (ن − ٤)
∴ ن² − ن = ١٤ ن − ٥٦
∴ ن² − ١٥ ن + ٥٦ = ٠
∴ (ن − ٨) (ن − ٧) = ٠ ∴ ن = ٨ أ، ن = ٧

② ∵ $^{٥}ل_{ر}$ = ٢ × $^{٦}ل_{ر-١}$
∴ ٥! / (٥ − ر)! = ٢ × ٦! / (٧ − ر)!
∴ ٥! / (٥ − ر)! = ٢ × ٦ × ٥! / ((٧ − ر) (٦ − ر) (٥ − ر)!)
∴ (٧ − ر) (٦ − ر) = ٢ × ٦ = ١٢ = ٤ × ٣
∴ ٧ − ر = ٤   ∴ ر = ٣

③ ∵ $^{ن-١}ل_{٣}$: $^{ن+١}ل_{٣}$ = ٥ : ١٢
∴ (ن − ١)! / (ن − ٤)! ÷ (ن + ١)! / (ن − ٢)! = ٥ / ١٢
∴ (ن − ١)! / (ن − ٤)! × (ن − ٢)! / (ن + ١)! = ٥ / ١٢
∴ (ن − ١)! / (ن − ٤)! × (ن − ٢) (ن − ٣) (ن − ٤)! / ((ن + ١) (ن) (ن − ١)!) = ٥ / ١٢
∴ ١٢ (ن − ٢) (ن − ٣) = ٥ ن (ن + ١)
∴ ١٢ ن² − ٦٠ ن + ٧٢ = ٥ ن² + ٥ ن
∴ ٧ ن² − ٦٥ ن + ٧٢ = ٠
∴ (٧ ن − ٩) (ن − ٨) = ٠
∴ ن = $\frac{٩}{٧}$ (مرفوض) أ، ن = ٨
∴ (ن − ٣)! = ٥! = ١٢٠

④ ∵ $^{٢ن+١}ل_{ن-١}$: $^{٢ن-١}ل_{ن}$ = ٣ : ٥
∴ (٢ن + ١)! / (ن + ٢)! ÷ (٢ن − ١)! / (ن − ١)! = $\frac{٣}{٥}$
∴ (٢ن + ١)! / (ن + ٢)! × (ن − ١)! / (٢ن − ١)! = $\frac{٣}{٥}$
∴ (٢ن + ١) (٢ن) (٢ن − ١)! / ((ن + ٢) (ن + ١) (ن) (ن − ١)!) × (ن − ١)! / (٢ن − ١)! = $\frac{٣}{٥}$
∴ ٢ (٢ن + ١) / ((ن + ٢) (ن + ١)) = $\frac{٣}{٥}$
∴ ٣ (ن + ٢) (ن + ١) = ١٠ (٢ن + ١)
∴ ٣ ن² + ٩ ن + ٦ = ٢٠ ن + ١٠
∴ ٣ ن² − ١١ ن − ٤ = ٠
∴ (٣ ن + ١) (ن − ٤) = ٠
∴ ن = − $\frac{١}{٣}$ (مرفوض) أ، ن = ٤

⑤ ∵ ر! = ٥٠٤٠ = ٧!   ∴ ر = ٧
، ∵ $^{ن}ل_{ر}$ = ٦٠٤٨٠٠
∴ $^{ن}ل_{٧}$ = ٦٠٤٨٠٠ = ١٠ × ٩ × ٨ × ٧ × ٦
× ٥ × ٤ = $^{١٠}ل_{٧}$
∴ ن = ١٠ ∴ $^{ن+ر}ل_{ن-ر}$ = $^{١٧}ل_{٣}$ = ٤٠٨٠

⑥ ∵ $^{ن}ل_{١١}$ يضم ١١ عاملاً تبدأ بالعامل ن
وتنتهي بالعامل (ن − ١١ + ١) = ن − ١٠
∴ العامل الأوسط = (ن + (ن − ١٠)) / ٢ = ن − ٥
∴ ن − ٥ = ١٥   ∴ ن = ٢٠

٤

① الطرف الأيمن = (ن + ١) (ن) (ن − ١)! / (ن − ١)!
− ن (ن − ١) (ن − ٢)! / (ن − ٢)!
= ن (ن + ١) − ن (ن − ١)
= ن² + ن − ن² + ن = ٢ ن
= الطرف الأيسر.

٥

① ∵ $\frac{(ن+١)}{(ن+١)\,|ن} + \frac{٢}{|ن+١} = \frac{٥٦}{(ن+٢)\,|ن+١}$

∴ $\frac{(ن+١+٢)}{|ن+١} = \frac{٥٦}{(ن+٢)\,|ن+١}$

∴ (ن + ٢) (ن + ٣) = ٥٦ = ٧ × ٨

∴ ن + ٢ = ٧ ∴ ن = ٥

② ∵ $\frac{|ن+١}{(ن+٢)\,|ن+١} + \frac{|ن}{(ن+١)\,|ن} = \frac{١٣}{٤٢}$

∴ $\frac{١}{ن+٢} + \frac{١}{ن+١} = \frac{١٣}{٤٢}$

∴ $\frac{ن+١+ن+٢}{(ن+٢)(ن+١)} = \frac{١٣}{٤٢}$

∴ $\frac{٢ن+٣}{(ن+٢)(ن+١)} = \frac{١٣}{٤٢}$

∴ ١٣ (ن + ٢) (ن + ١) = ٤٢ (٢ ن + ٣)

∴ ١٣ $ن^{٢}$ + ٣٩ ن + ٢٦ = ٨٤ ن + ١٢٦

∴ ١٣ $ن^{٢}$ − ٤٥ ن − ١٠٠ = ٠

∴ (١٣ ن + ٢٠) (ن − ٥) = ٠

∴ ن = $\frac{-٢٠}{١٣}$ (مرفوض) أ، ن = ٥

③ الطرف الأيمن = $\frac{(ن+٣)(ن+٢)(ن+١)\,|ن}{|ن}$

= (ن + ٣) (ن + ٢) (ن + ١)

= (ن + ٣) × $ل^{ن+٣}_{٣}$

= الطرف الأيسر.

③ الطرف الأيمن = $\frac{(ن+٢)(ن+١)}{(ن+٢)(ن+١)\,|ن}$ − $\frac{(ن+٢)}{(ن+٢)\,|ن+١}$ + $\frac{١}{|ن+٢}$

= $\frac{(ن+٢)(ن+١) - (ن+٢) + ١}{|ن+٢}$

= $\frac{ن^{٢}+٢ن+١}{|ن+٢}$

= $\frac{(ن+١)^{٢}}{(ن+٢)(ن+١)\,|ن}$

= $\frac{ن+١}{(ن+٢)\,|ن}$ = الطرف الأيسر.

④ الطرف الأيمن = $\frac{٨×٧\,|٦}{٨×٧\,|٦}$ + $\frac{٨\,|٣}{٨\,|٧}$ + $\frac{|٤}{|٨}$

= $\frac{٥٦×٢ + ٨×٦ + ٢٤}{|٨}$ = $\frac{١٨٤}{|٨}$

= $\frac{١٨٤}{٨\,|٧}$ = $\frac{٢٣}{|٧}$ = الطرف الأيسر.

⑤ الطرف الأيمن = $\frac{|ن+١}{|ن-ر}$ = $\frac{(ن+١)\,|ن}{|ن-ر}$

= (ن + ١) × $ل^{ن}_{ر}$ = الطرف الأيسر.

⑥ الطرف الأيمن = $\frac{|ن}{|ر\,|ن-ر}$

= $\frac{ن\,|ن-١}{ر\,|ر-١\,|ن-ر}$

، الطرف الأيسر = $\frac{ن}{ر}$ × $\frac{|ن-١}{|ر-١\,|ن-ر}$

∴ الطرفان متساويان.

⑦ $\frac{ل^{ن}_{ر}}{ل^{ن-١}_{ر-١}}$ = $\frac{|ن}{|ن-ر}$ × $\frac{|ن-ر}{|ن-١}$ = $\frac{ن\,|ن-١}{|ن-١}$ = ن

∴ $ل^{٩٧}_{٤٠}$: $ل^{٩٦}_{٣٩}$ = $ل^{٩٧}_{٤٠}$: $ل^{٩٧-١}_{٤٠-١}$ = ٩٧

٦

① $ل^{٧}_{٥}$ = ٢٥٢٠ طريقة.

② $|٩-١$ = $|٨$ = ٤٠٣٢٠ طريقة.

③ $ل^{١٠}_{٣}$ = ٧٢٠ طريقة.

④ عدد الطرق

= ٣ × ٢ = ٦ طرق.

كفتة
عصير
مياه غازية
فراخ
عصير
مياه غازية
سمك
عصير
مياه غازية

⑤ عدد الترتيبات = $ل^{٢٨}_{٥}$

= ١١٧٩٣٦٠٠ ترتيب.

⑥ عدد الطرق = ٢ × ٣ × ٢ = ١٢ طريقة.

⑦ $ل^{٤}_{٢}$ = ٤ × ٣ = ١٢ عددًا. ⑧ $٣^{٣}$ = ٢٧ عددًا

⑨ $٤^{٢}$ = ١٦ عددًا.

آحاد	عشرات	مئات
٣	٤	٤

⑩ ٤ × ٤ × ٣ = ٤٨ طريقة.

⑪ ٢ × ٤ × ٣ = ٢٤ عددًا. [٢] [٤] [٣]

⑫ ٣ × ٢ × ٢ × ١ = ١٢ طريقة. [٣] [٢] [٢] [١]

٧

① $ل^{٧}_{٣}$ = ٢١٠ ② $ل^{٧}_{٧}$ = $|٧$ = ٥٠٤٠

③ ٣ × $ل^{٦}_{٤}$ = ٣ × ٦ × ٥ × ٤ × ٣ = ١٠٨٠ طريقة.

آحاد	عشرات	مئات	الآلاف	عشرات الألف
٣	٦	٥	٤	٣

④ ١ × $ل^{٦}_{٣}$ = ١ × ٦ × ٥ × ٤ [١] [٦] [٥] [٤]

= ١٢٠ طريقة.

⑤ ٣ × $ل^{٦}_{٣}$ = ٣ × ٦ × ٥ × ٤ [٤] [٥] [٦] [٣]

= ٣٦٠ طريقة.

٨

① $ل^{٥}_{٢}$ = ٥ × ٤ = ٢٠ ② $٥^{٢}$ = ٥ × ٥ = ٢٥

③ $ل^{٥}_{٣}$ = ٥ × ٤ × ٣ = ٦٠

④ ٢ × $ل^{٤}_{٢}$ = ٢ × ٤ × ٣ = ٢٤ [٣] [٤] [٢]

⑤ ١ × $ل^{٤}_{٣}$ = ١ × ٤ × ٣ × ٢ [١] [٤] [٣] [٢]

= ٢٤

٩

① $ل^{٦}_{١}$ = ٦

② عدد طرق اختيار حرفين مع مراعاة الترتيب

= $ل^{٦}_{٢}$ = ٦ × ٥ = ٣٠

١٠

∵ س = {١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ ، ٧}

∴ ن(س) = ٧ ، ن(ص) = $ل^{٧}_{٢}$ = ٧ × ٦ = ٤٢

١١

∵ $ل^{س+ص}_{٣}$ = ٥٠٤ = ٩ × ٨ × ٧ = $ل^{٩}_{٣}$

∴ س + ص = ٩ (١)

، ∵ $ل^{س-ص}_{٤}$ = ١٢٠ = ٥ × ٤ × ٣ × ٢ = $ل^{٥}_{٤}$

∴ س − ص = ٥ (٢)

من (١) ، (٢) : ∴ س = ٧ ، ص = ٢

∴ $ل^{س}_{ص}$ = $ل^{٧}_{٢}$ = ٤٢

١٢

① ∵ $ل^{س+٢}_{٢}$ = ٤٢ س

∴ (س + ٢) (س + ١) × س = ٤٢ س

∴ (س + ٢) (س + ١) = ٤٢ = ٧ × ٦

∴ س + ٢ = ٧ ∴ س = ٥

② ∵ $ل^{٧}_{س}$ = س × $ل^{٧}_{س-١}$

∴ $\frac{|٧}{|٧-س}$ = $\frac{س\,|٧}{|٧-س+١}$

∴ $\frac{١}{|٧-س}$ = $\frac{س}{|٨-س}$

∴ $\frac{١}{|٧-س}$ = $\frac{س}{(٨-س)\,|٧-س}$

∴ ٨ − س = س ∴ س = ٤

③ ∵ $|س-٣$ × $\frac{|س}{|س-٢}$ = ٢٠ $|س-٢$

∴ $|س$ = ٢٠ $|س-٢$

∴ س (س − ١) $|س-٢$ = ٢٠ $|س-٢$

∴ س (س − ١) = ٢٠ = ٥ × ٤

∴ س = ٥

④ ∵ $|س+٢$ = ١٨٢ × $\frac{|س}{|س-١١}$ × $|س-١١$

∴ $|س+٢$ = ١٨٢ $|س$

∴ (س + ٢) (س + ١) $|س$ = ١٨٢ $|س$

∴ (س + ٢) (س + ١) = ١٨٢ = ١٤ × ١٣

∴ س + ٢ = ١٤ ∴ س = ١٢

١٣

∵ $\frac{٣٠ \times |س + ٢}{|س} = \frac{|س + ٥}{|س}$

∴ ٣٠ |س + ٢ = (س + ٥) (س + ٤) |س + ٣

∴ (س + ٥) (س + ٤) = ٣٠ = ٦ × ٥

∴ س + ٥ = ٦ ∴ س = ١ ∴ م.ح = {١}

١٤

∵ $^{ن}ل_{١٥} < {}^{ن}ل_{١٤}$

∴ $\frac{|ن}{|ن - ١٥} < \frac{|ن}{|ن - ١٤}$

∴ |ن - ١٤ > |ن - ١٥

∴ (ن - ١٤) |ن - ١٥ > |ن - ١٥

∴ ن - ١٤ > ١ ∴ ن > ١٥

∴ ن = ١٦ أ، ١٧ أ، ١٨ أ، ...

∴ أقل قيمة للعدد ن = ١٦

١٥

∵ $^{أ+ب}ل_{٤} = ٨٤٠ = ٧ \times ٦ \times ٥ \times ٤ = {}^{٧}ل_{٤}$

∴ أ + ب = ٧ (١)

، ∵ |أ - ب = ٦ = |٣ ∴ أ - ب = ٣ (٢)

من (١) ، (٢) : ∴ أ = ٥ ، ب = ٢

∴ |٢أ - ٥ب = |٢ × ٥ - ٥ × ٢ = |٠ = ١

١٦

∵ |ر = ١٢٠ = |٥

∴ ر = ٥

، $^{ن}ل_{٥} = ٢٥٢٠ = ٧ \times ٦ \times ٥ \times ٤ \times ٣ = {}^{٧}ل_{٥}$

∴ ن = ٧

∴ |٣ر - ٢ن = |٣ × ٥ - ٢ × ٧ = |١ = ١

١٧

① |٨٠ = ٨٠ × ٧٩ × ٧٨ × ٧٧ × ... × ٤ × ٣ × ٢ × ١

= (٨٠ × ٧٨ × ٧٦ × ... × ٢)

× (١ × ٣ × ٥ × ... × ٧٩)

= [(٢ × ٤٠) × (٢ × ٣٩) × (٢ × ٣٨) × .....

× [(٢ × ١)] × [١ × ٣ × ٥ × ..... × ٧٩]

= $٢^{٤٠}$ (٤٠ × ٣٩ × ٣٨ × ... × ١)

× (١ × ٣ × ٥ × ... × ٧٩)

= $٢^{٤٠}$ |٤٠ (١ × ٣ × ٥ × ... × ٧٩)

② نثبت كما في (١) أن :

|١٠٠ = $٢^{٥٠}$ |٥٠ (١ × ٣ × ٥ × ... × ٩٩)

∴ $\frac{|١٠٠}{|٥٠} = ٢^{٥٠}$ (١ × ٣ × ٥ × ... × ٩٩)

③ |٢ن = ٢ن (٢ن - ١) (٢ن - ٢) × (٢ن - ٣) × ... × ٤ × ٣ × ٢ × ١

∴ |٢ن = [٢ × ٤ × ٦ × ... × ٢ن]

× [١ × ٣ × ٥ × ... (٢ن - ١)]

∴ |٢ن = $٢^{ن}$ [١ × ٢ × ٣ × ... × ن]

× [١ × ٣ × ٥ × ... × (٢ن - ١)]

∴ |٢ن = $٢^{ن}$ |ن [١ × ٣ × ٥ × ... × (٢ن - ١)]

١٨

الطرف الأيمن = $\frac{(ن - ر + ١) |ن}{(ن - ر + ١) |ر |ن - ر}$

+ $\frac{ر |ن}{ر |ر - ١ |ن - ر + ١}$

= $\frac{(ن - ر + ١) |ن + ر |ن}{|ر |ن - ر + ١}$

= $\frac{(ن + ١) |ن}{|ر |ن - ر + ١}$

= $\frac{|ن + ١}{|ر |ن - ر + ١}$ = الطرف الأيسر.

تدرب مسائل تقيس مهارات التفكير

① (جـ)	② (جـ)	③ (د)	④ (ب)
⑤ (د)	⑥ (ب)	⑦ (جـ)	⑧ (د)
⑨ (ب)	⑩ (د)		

إرشادات الحل :

① ∵ $^{ن}ل_{٢}$ ، $^{ن}ل_{٢}$ ، $^{ن+١}ل_{٢}$ في تتابع حسابي

∴ $^{ن}ل_{٢} + {}^{ن+١}ل_{٢} = ٢ \; {}^{ن}ل_{٢}$

∴ ن(ن - ١) + (ن + ١) (ن) (ن - ١)

= ٢ن (ن - ١) (ن - ٢)

بالقسمة على ن(ن - ١) حيث ن ≠ ٠ ، ن ≠ ١

∴ ١ + (ن + ١) = ٢ (ن - ٢) ∴ ن = ٦

∴ ن + |ن - ٣ = ٦ + |٣ = ١٢

② ∵ س = |س ∴ س = س |س - ١

، بالقسمة على س حيث س ≠ ٠

∴ |س - ١ = ١

∴ س - ١ = ٠ ومنها س = ١

أ، س - ١ = ١ ومنها س = ٢

∴ عدد حلول المعادلة يساوي ٢

③ ∵ |ن يقبل القسمة على ٧ ، ١٣

∴ يجب أن يحتوي مفكوك |ن على العامل ٧ والعامل ١٣ وذلك يحدث فقط عندما ن ≥ ١٣

④ ∵ رقم الآحاد يساوي صفر في |ن عندما ن ≥ ٥

∴ رقم الآحاد لا يساوي صفر في |ن عندما ن < ٥

⑤ ∵ |ر = |ن ، ن = ر

يتحقق عندما ن = ر = ١ ، ن = ر = ٢

∴ ن + ر = ٢ أ، ٤

⑥ ∵ $\frac{١}{٢}$ |ن ، |ن - ٢ ، |ن - ٢

هي أطوال أضلاع مثلث وذلك لا يتحقق إلا عندما تكون ن = ٢

∴ أطوال أضلاع المثلث هي $\frac{١}{٢}$ |٢ ، |٠ ، |٠

أي أن : ١ ، ١ ، ١

∴ المثلث متساوي الأضلاع وطول ضلعه ١ سم

∴ مساحته = $\frac{١}{٢}$ × ١ × ١ × جا ٦٠°

= $\frac{\sqrt{٣}}{٤}$ سم^{٢}

⑦ ∵ |١ + |٢ + |٣ + ... + |٩ + |٨ + |٧ تقبل القسمة على ٧

∵ |١ + |٢ + |٣ + |٤ + |٥ + |٦ = ٨٧٣

عند قسمتها على ٧ يكون الباقي ٥

⑧ ∵ |ن ، ٣ |ن ، |ن + ١ في تتابع هندسي

∴ (٣ |ن)^{٢} = |ن |ن + ١

∴ ٩ (|ن)^{٢} = |ن × (ن + ١) |ن

∴ ن + ١ = ٩ ∴ ن = ٨

∴ |ن ، ٥ |ن ، |ن + ١ ، هي |٨ ، ٥ |٨ ، |٩

أي أن : |٨ ، ٥ |٨ ، ٩ |٨

في تتابع حسابي

⑨ ∵ |٠ + |١ + |٢ + |٣ + |٤

= ١ + ١ + ٢ + ٦ + ٢٤ = ٣٤

آحاد (|٥ + |٦ + |٧ + ... + |٢٠٢٢) هو (صفر)

∴ آحاد العدد المطلوب = ٤

⑩ س = |أ + (أ + ١) |أ + (أ + ٢) (أ + ١) |أ

= (١ + أ + ١ + أ^{٢} + ٣أ + ٢) |أ

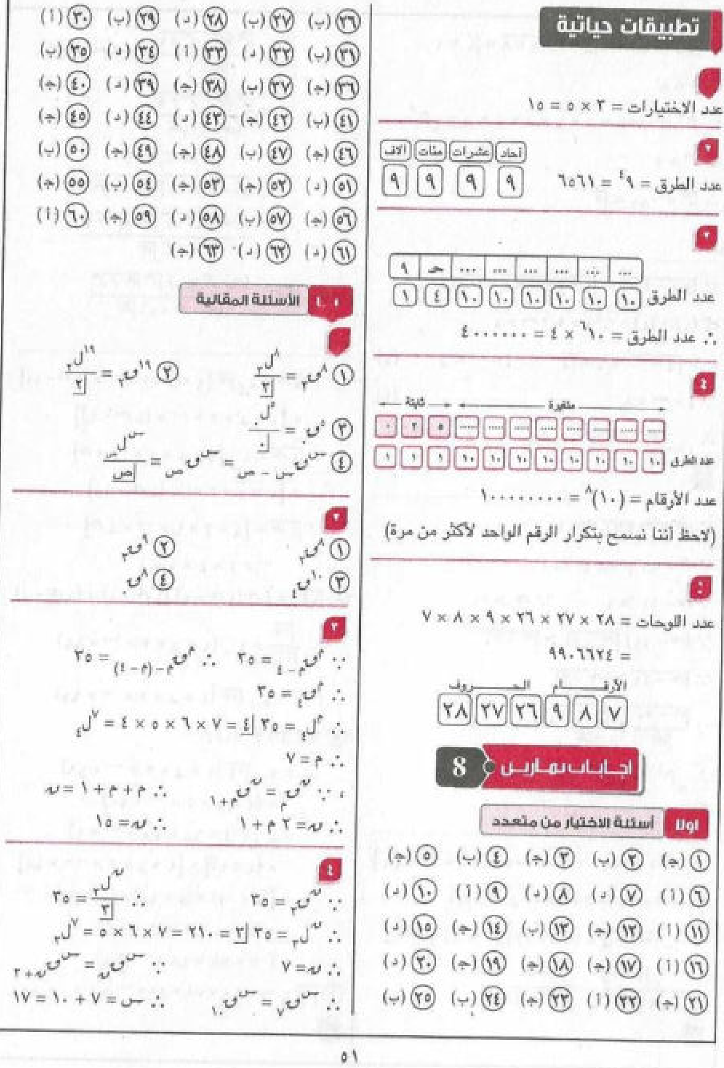
= (أ^{٢} + ٤أ + ٤) |أ

= (أ + ٢)^{٢} |أ

∵ س = ب |أ

∴ ب = (أ + ٢)^{٢}

مربع كامل لجميع قيم أ ∈ ط



تطبيقات حياتية

١

عدد الاختيارات = ٣ × ٥ = ١٥

٢

آحاد	عشرات	مئات	آلاف
٩	٩	٩	٩

عدد الطرق = ٩^٤ = ٦٥٦١

٣

...	...	...	...	...	...	...	...	حـ	٩
١٠	١٠	١٠	١٠	١٠	١٠	١٠	٤	١	١

عدد الطرق

∴ عدد الطرق = ١٠^٦ × ٤ = ٤٠٠٠٠٠٠

٤

ثابتة ← مفتوحة

عدد الطرق: ١٠ ، ١٠ ، ١٠ ، ١٠ ، ١٠ ، ١٠ ، ١٠ ، ١٠ ، ١ ، ١ ، ١

عدد الأرقام = (١٠)^٨ = ١٠٠٠٠٠٠٠٠

(لاحظ أننا نسمح بتكرار الرقم الواحد لأكثر من مرة)

٥

عدد اللوحات = ٢٨ × ٢٧ × ٢٦ × ٩ × ٨ × ٧

= ٩٩٠٦٦٢٤

الأرقام: ٧ ، ٨ ، ٩ — الحروف: ٢٦ ، ٢٧ ، ٢٨

إجابات تمارين 8

أولا أسئلة الاختيار من متعدد

① (جـ) ② (ب) ③ (جـ) ④ (ب) ⑤ (جـ)

⑥ (أ) ⑦ (د) ⑧ (د) ⑨ (أ) ⑩ (د)

⑪ (أ) ⑫ (جـ) ⑬ (ب) ⑭ (جـ) ⑮ (د)

⑯ (أ) ⑰ (جـ) ⑱ (جـ) ⑲ (جـ) ⑳ (د)

(٢١) (جـ) (٢٢) (أ) (٢٣) (جـ) (٢٤) (ب) (٢٥) (ب)

(٢٦) (ب) (٢٧) (ب) (٢٨) (د) (٢٩) (ب) (٣٠) (أ)

(٣١) (ب) (٣٢) (د) (٣٣) (أ) (٣٤) (د) (٣٥) (ب)

(٣٦) (جـ) (٣٧) (ب) (٣٨) (جـ) (٣٩) (د) (٤٠) (جـ)

(٤١) (ب) (٤٢) (جـ) (٤٣) (د) (٤٤) (د) (٤٥) (جـ)

(٤٦) (جـ) (٤٧) (ب) (٤٨) (جـ) (٤٩) (جـ) (٥٠) (ب)

(٥١) (د) (٥٢) (جـ) (٥٣) (جـ) (٥٤) (ب) (٥٥) (جـ)

(٥٦) (جـ) (٥٧) (ب) (٥٨) (د) (٥٩) (جـ) (٦٠) (أ)

(٦١) (د) (٦٢) (د) (٦٣) (جـ)

ثانيا الأسئلة المقالية

١

① $^{٨}ق_{٢} = \frac{^{٨}ل_{٢}}{\lfloor ٢}$ ② $^{١٩}ق_{٢} = \frac{^{١٩}ل_{٢}}{\lfloor ٢}$

③ $^{ن}ق_{ر} = \frac{^{ن}ل_{ر}}{\lfloor ر}$

④ $^{س}ق_{س - ص} = {^{س}ق_{ص}} = \frac{^{س}ل_{ص}}{\lfloor ص}$

٢

① $^{٨}ق_{٣}$ ② $^{٩}ق_{٣}$

③ $^{١٠}ق_{٤}$ ④ $^{٨}ق_{٠}$

٣

∵ $^{م}ق_{م-٤} = ٣٥$ ∴ $^{م}ق_{م-(م-٤)} = ٣٥$

∴ $^{م}ق_{٤} = ٣٥$

∴ $^{م}ل_{٤} = ٣٥ \lfloor ٤ = ٧ \times ٦ \times ٥ \times ٤ = {^{٧}ل_{٤}}$

∴ م = ٧

، ∵ $^{ن}ق_{م} = {^{ن}ق_{م+١}}$ ∴ م + م + ١ = ن

∴ ن = ٢ م + ١ ∴ ن = ١٥

٤

∵ $^{ن}ق_{٣} = ٣٥$ ∴ $\frac{^{ن}ل_{٣}}{\lfloor ٣} = ٣٥$

∴ $^{ن}ل_{٣} = ٣٥ \lfloor ٣ = ٢١٠ = ٧ \times ٦ \times ٥ = {^{٧}ل_{٣}}$

∴ ن = ٧ ∵ $^{س}ق_{ن} = {^{س}ق_{ن+٣}}$

∴ $^{س}ق_{٧} = {^{س}ق_{١٠}}$ ∴ س = ٧ + ١٠ = ١٧

٥

س = ٢ س − ٤٧ ∴ س = ٤٧ (مرفوض)

أ، س + ٢ س − ٤٧ = ٢٨

∴ ٣ س = ٧٥ ∴ س = ٢٥

٦

٢ س + ١ = ٣ س − ١ ∴ س = ٢

أ، ٢ س + ١ + ٣ س − ١ = ٢٥ ∴ ٥ س = ٢٥

∴ س = ٥

٧

٣ س − ٥ = س − ٣ ∴ س = ١ (مرفوض)

لأن (٣ س − ٥) ∉ ط

أ، ٣ س − ٥ + س − ٣ = ٣٦ ومنها س = ١١

∴ $^{١١}ق_{س} = {^{١١}ق_{١١}} = ١$

٨

$\frac{\lfloor ن+١}{\lfloor ٤ \lfloor ن-٣} = \frac{٥}{٢} \times \frac{\lfloor ن}{\lfloor ٣ \lfloor ن-٣}$

∴ $\frac{(ن+١)\lfloor ن}{\lfloor ٣ \times ٤} = \frac{٥}{٢} \times \frac{\lfloor ن}{\lfloor ٣}$ ∴ $\frac{ن+١}{٤} = \frac{٥}{٢}$

∴ ن + ١ = ١٠ ∴ ن = ٩

٩

$\frac{ن(ن-١)(ن-٢)}{\lfloor ٣} = \frac{٩١}{٣} ن$

∴ $(ن-١)(ن-٢) = \frac{٩١}{٣} \times \lfloor ٣ = ١٨٢ = ١٤ \times ١٣$

∴ ن − ١ = ١٤ ∴ ن = ١٥

١٠

∵ $\frac{^{ن}ق_{٤}}{^{ن-٢}ق_{٣}} = \frac{٧}{٢}$

∴ $\frac{ن(ن-١)(ن-٢)(ن-٣)}{٤ \times ٣ \times ٢ \times ١} \times \frac{١ \times ٢ \times ٣}{(ن-٢)(ن-٣)(ن-٤)} = \frac{٧}{٢}$

∴ $\frac{ن(ن-١)}{٤(ن-٤)} = \frac{٧}{٢}$

∴ ن (ن − ١) = ١٤ (ن − ٤)

∴ ن^٢ − ١٥ ن + ٥٦ = ٠

∴ (ن − ٧) (ن − ٨) = ٠ ∴ ن = ٧ أ، ٨

١١

∵ $\frac{^{ن}ق_{٥}}{^{ن}ق_{٤}} = \frac{\lfloor ن}{\lfloor ٥ \lfloor ن-٥} \times \frac{\lfloor ٤ \lfloor ن-٤}{\lfloor ن}$

$= \frac{\lfloor ٤ \times (ن-٤) \lfloor ن-٥}{٥ \lfloor ٤ \lfloor ن-٥} = \frac{ن-٤}{٥}$

∴ $\frac{ن-٤}{٥} = \frac{٨}{٥}$ ∴ ن − ٤ = ٨ ∴ ن = ١٢

١٢

① $\frac{^{ن}ل_{٣}}{\lfloor ٣} = ٨٤$

∴ $^{ن}ل_{٣} = ٥٠٤ = ٩ \times ٨ \times ٧ = {^{٩}ل_{٣}}$

∴ ن = ٩ ∴ م.ح = {٩}

② س = ٢ س + ٣ ∴ س = −٣ (مرفوض)

أ، س + ٢ س + ٣ = ١٢

∴ ٣ س = ٩ ∴ س = ٣ ∴ م.ح = {٣}

③ ٢ ن − ٢١ = ٣ ∴ ن = ١٢

أ، ٢ ن − ٢١ + ٣ = ن

∴ ن = ١٨ ∴ م.ح = {١٢ ، ١٨}

④ $\frac{(ن+١)(ن)(ن-١)}{\lfloor ٣} = ٤ \times \frac{(ن)(ن-١)(ن-٢)}{\lfloor ٢}$

∴ (ن + ١) ن = ١٢ (ن − ٢)

∴ ن^٢ − ١١ ن + ٢٤ = ٠

∴ (ن − ٨) (ن − ٣) = ٠

∴ ن = ٨ أ، ن = ٣ ∴ م.ح = {٨ ، ٣}

١٣

① $2^5 = 32$

② ∵ $({}^{5}ق_{0} = {}^{5}ق_{5})$ ، $({}^{5}ق_{1} = {}^{5}ق_{4})$ ، $({}^{5}ق_{2} = {}^{5}ق_{3})$

∴ ${}^{5}ق_{0} - {}^{5}ق_{1} + {}^{5}ق_{2} - {}^{5}ق_{3} + {}^{5}ق_{4} - {}^{5}ق_{5} = 0$

١٤

$\frac{{}^{2ن+م}ل_{2}}{|\underline{2}} = 190$

∴ ${}^{2ن+م}ل_{2} = 190\ |\underline{2} = 380 = 20 \times 19 = {}^{20}ل_{2}$

∴ $2ن + م = 20$ (١)

، ${}^{ن-2م}ل_{3} = 60 = 5 \times 4 \times 3 = {}^{5}ل_{3}$

∴ $ن - 2م = 5$ (٢)

من (١) ، (٢) ينتج أن : $ن = 9$ ، $م = 2$

١٥

∵ ${}^{ن}ق_{ر-1} = 56$

∴ $\frac{{}^{ن}ل_{ر-1}}{|\underline{ر-1}} = 56$ ∴ $\frac{6720}{|\underline{ر-1}} = 56$

∴ $|\underline{ر-1} = 120 = |\underline{5}$ ∴ $ر - 1 = 5$

∴ $ر = 6$

∴ ${}^{ن}ل_{5} = 6720 = 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 = {}^{8}ل_{5}$

∴ $ن = 8$

١٦

الطرف الأيمن $= \frac{{}^{ن}ق_{ر}}{{}^{ن}ق_{ر-1}}$

$= \frac{|\underline{ن}}{|\underline{ر}\ |\underline{ن-ر}} \times \frac{|\underline{ر-1}\ |\underline{ن-ر+1}}{|\underline{ن}}$

$= \frac{ن\ |\underline{ن-1}\ |\underline{ر-1}}{ر\ |\underline{ر-1}\ |\underline{ن-1}} = \frac{ن}{ر} =$ الطرف الأيسر.

، ${}^{100}ق_{50} \div {}^{99}ق_{49} = \frac{100}{50} = 2$

١٧

الطرف الأيمن $= \frac{{}^{ن}ق_{ر}}{{}^{ن}ق_{ر-1}}$

$= \frac{|\underline{ن}}{|\underline{ر}\ |\underline{ن-ر}} \times \frac{|\underline{ر-1}\ |\underline{ن-ر+1}}{|\underline{ن}}$

$= \frac{|\underline{ر-1}\ (ن-ر+1)\ |\underline{ن-ر}}{ر\ |\underline{ر-1}\ |\underline{ن-ر}} = \frac{ن-ر+1}{ر}$

= الطرف الأيسر.

، ${}^{10}ق_{6} \div {}^{10}ق_{5} = \frac{10-6+1}{6} = \frac{5}{6}$

١٨

الطرف الأيمن $= {}^{ن}ق_{ر} + {}^{ن}ق_{ر-1}$

$= \frac{|\underline{ن}}{|\underline{ر}\ |\underline{ن-ر}} + \frac{|\underline{ن}}{|\underline{ر-1}\ |\underline{ن-ر+1}}$

$= \frac{(ن-ر+1)\ |\underline{ن} + ر\ |\underline{ن}}{|\underline{ر}\ |\underline{ن-ر+1}}$

$= \frac{|\underline{ن}\ (ن-ر+1+ر)}{|\underline{ر}\ |\underline{ن-ر+1}} = \frac{|\underline{ن+1}}{|\underline{ر}\ |\underline{ن-ر+1}}$

$= {}^{ن+1}ق_{ر} =$ الطرف الأيسر.

، ${}^{10}ق_{3} + {}^{10}ق_{4} = {}^{11}ق_{4} = 330$

١٩

${}^{2ن}ق_{ن} = \frac{|\underline{2ن}}{|\underline{ن}\ |\underline{ن}}$

$= \frac{2ن(2ن-1)(2ن-2)(2ن-3) \times \dots \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{|\underline{ن} \times |\underline{ن}}$

$= \frac{[1 \times 3 \times 5 \times \dots \times (2ن-3)(2ن-1)] \times [2 \times 4 \times 6 \times \dots \times (2ن-4)(2ن-2)\ 2ن]}{|\underline{ن} \times |\underline{ن}}$

$= \frac{[1 \times 3 \times 5 \times \dots (2ن-3)(2ن-1)] \times [1 \times 2 \times 3 \times \dots \times (ن-2)(ن-1)\ ن]\ 2^{ن}}{|\underline{ن} \times |\underline{ن}}$

$= \frac{2^{ن}\ |\underline{ن}\ [1 \times 3 \times 5 \times \dots \times (2ن-1)]}{|\underline{ن} \times |\underline{ن}}$

$= 2^{ن} \times \frac{1 \times 3 \times 5 \times \dots \times (2ن-1)}{|\underline{ن}}$

٢٠

∵ ${}^{2ن+1}ل_{ن-1} : {}^{2ن}ق_{ن+1} = \frac{3}{2}\ |\underline{ن-1}$

∴ $\frac{|\underline{2ن+1}}{|\underline{ن+2}} \times \frac{|\underline{ن+1}\ |\underline{ن-1}}{|\underline{2ن}} = \frac{3}{2}\ |\underline{ن-1}$

∴ $\frac{(2ن+1)\ |\underline{2ن}}{(ن+2)\ |\underline{ن+1}} \times \frac{|\underline{ن+1}\ |\underline{ن-1}}{|\underline{2ن}} = \frac{3}{2}\ |\underline{ن-1}$

∴ $\frac{2ن+1}{ن+2} = \frac{3}{2}$

∴ $4ن + 2 = 3ن + 6$ ∴ $ن = 4$

٢١

∵ ${}^{س}ق_{ص} = 2 \times {}^{س}ق_{ص+1}$

∴ $\frac{|\underline{س}}{|\underline{ص}\ |\underline{س-ص}} = \frac{2\ |\underline{س}}{|\underline{ص+1}\ |\underline{س-ص-1}}$

∴ $\frac{1}{|\underline{ص}\ (س-ص)\ |\underline{س-ص-1}}$

$= \frac{2}{(ص+1)\ |\underline{ص}\ |\underline{س-ص-1}}$

∴ $2(س - ص) = ص + 1$

∴ $2س - 2ص = ص + 1$

∴ $2س - 3ص = 1$ (١)

، ∵ ${}^{س}ق_{ص} = {}^{س}ق_{ص-1}$

∴ $ص + ص - 1 = س$

∴ $س - 2ص = -1$ (٢)

من (١) ، (٢) ينتج أن : $س = 5$ ، $ص = 3$

٢٢

الطرف الأيمن $= \frac{ن \times 2ن(2ن-1) \times |\underline{3}}{|\underline{2} \times 3ن(3ن-1)(3ن-2)}$

$= \frac{2ن(2ن-1)}{(3ن-1)(3ن-2)}$

$= \frac{{}^{2ن}ل_{2}}{{}^{3ن-1}ل_{2}} =$ الطرف الأيسر.

٢٣

∵ ${}^{25}ق_{12} = \frac{|\underline{25}}{|\underline{13}\ |\underline{12}}$

، ∵ ${}^{25}ق_{12}$ عدد صحيح.

∴ $\frac{|\underline{25}}{|\underline{13}\ |\underline{12}}$ = عدد صحيح.

∴ $|\underline{25}$ يقبل القسمة على $|\underline{13}\ |\underline{12}$

٢٤

① ${}^{ن}ق_{3} = 10$ ∴ $\frac{{}^{ن}ل_{3}}{|\underline{3}} = 10$

∴ ${}^{ن}ل_{3} = 60 = 5 \times 4 \times 3 = {}^{5}ل_{3}$

∴ $ن = 5$ ∴ عدد الطلاب $= 5$

② ${}^{10}ق_{3} \times {}^{8}ق_{2} = 3360$

③ ${}^{6}ق_{2} + {}^{5}ق_{2} = 25$

④ ${}^{10}ق_{5} \times {}^{5}ق_{1} = 1260$ أ، ${}^{10}ق_{1} \times {}^{9}ق_{5} = 1260$

٢٥

عدد طرق انتخاب اللجنة الأولى $= {}^{12}ق_{3} = 220$

، عدد طرق انتخاب اللجنة الثانية $= {}^{9}ق_{3} = 84$

∴ عدد طرق انتخاب اللجنتين $= 220 \times 84$

$= 18480$ طريقة.

٢٦

∵ $س = \{5 ، 6 ، 7 ، 8 ، 9\}$ ∴ $ن(س) = 5$

∴ $ن(ص) = {}^{5}ل_{2} = 20$

، $ن(ع) = {}^{5}ق_{2} = 10$

٢٧

عدد الطرق $= {}^{6}ق_{1} + {}^{6}ق_{2} + {}^{6}ق_{3} + {}^{6}ق_{4}$

$+ {}^{6}ق_{5} + {}^{6}ق_{6} = 63$ طريقة.

٢٨

قرار الأغلبية باتفاق ٥ أشخاص أ، ٤ أشخاص

أ، ٣ أشخاص $= {}^{5}ق_{5} + {}^{5}ق_{4} + {}^{5}ق_{3} = 16$ طريقة.

١٩

① $^{١٣}ق_{٥} = ١٢٨٧$ ② $^{٧}ق_{٥} = ٢١$

③ $^{٦}ق_{٥} = ٦$ ④ $^{٧}ق_{٥} + ^{٦}ق_{٥} = ٢٧$

⑤ $^{٧}ق_{٣} \times ^{٦}ق_{٢} = ٥٢٥$

٢٠

ينتقل الطالب للسنة التالية إذا نجح فى ٦ مواد أ، ٧ مواد أ، ٨ مواد $= ^{٨}ق_{٦} + ^{٨}ق_{٧} + ^{٨}ق_{٨}$

$= ٣٧$ طريقة.

٢١

① $^{١٠}ق_{٣} = ١٢٠$ ② $^{٦}ق_{٢} \times ^{٤}ق_{١} = ٦٠$

③ كرتين بيضاويتين أ، ثلاثة كرات بيضاء

$= ^{٦}ق_{٢} \times ^{٤}ق_{١} + ^{٦}ق_{٣} = ٨٠$

④ كرتين بيضاويتين أ، كرة واحدة بيضاء أ، صفر كرة بيضاء

$= ^{٦}ق_{٢} \times ^{٤}ق_{١} + ^{٦}ق_{١} \times ^{٤}ق_{٢} + ^{٤}ق_{٣} = ١٠٠$

٢٢

عدد طرق اختيار ٣ سفراء $= ^{٩}ق_{٣} = ٨٤$ طريقة.

وإذا اشترط وجود شخص معين فإن

عدد الطرق $= ١ \times ^{٨}ق_{٢} = ٢٨$ طريقة.

وإذا استبعد شخص معين فإن

عدد الطرق $= ^{٨}ق_{٣} = ٥٦$ طريقة.

② $\because$ س $\geq$ ن ، ن $\geq$ س $\quad \therefore$ ن = س

$\therefore {}^{ن}ل_{س} + {}^{س}ل_{ن} = ١٤٤٠$

$\therefore ٢ \; {}^{ن}ل_{ن} = ١٤٤٠ \quad \therefore {}^{ن}ل_{ن} = ٧٢٠$

$\therefore \lfloor ن = ٧٢٠ = \lfloor ٦ \quad \therefore$ ن = ٦

$\therefore {}^{ن+٤}ق_{س-٥} = {}^{١٠}ق_{١} = ١٠$

③ $٠ \leq ر + ٢ \leq ٤ \quad \therefore -٢ \leq ر \leq ٢$

$\therefore ر \in \{٢ ، ١ ، ٠ ، -١ ، -٢\}$ (١)

$، ٠ \leq ٢ - ر \leq ٤ \quad \therefore -٢ \leq -ر \leq ٢$

$\therefore ٢ \leq ر \leq -٢$

$\therefore ر \in \{-٢ ، -١ ، ٠ ، ١ ، ٢\}$ (٢)

من (١) ، (٢) : $\therefore ر \in \{-٢ ، -١ ، ٠ ، ١ ، ٢\}$

④ $\sum_{ر=٠}^{ن} {}^{ن}ق_{ر} = {}^{ن}ق_{٠} + {}^{ن}ق_{١} + {}^{ن}ق_{٢} + \dots + {}^{ن}ق_{ن}$

$= ٢^{ن}$

⑤ عدد المضلعات $= ^{٦}ق_{٣} + ^{٦}ق_{٤} + ^{٦}ق_{٥} + ^{٦}ق_{٦}$

$= ٤٢$ مضلع

⑥ $\because$ م $= {}^{ن}ق_{٢} = \frac{١}{٢} ن(ن-١)$

$، \because {}^{م}ق_{٢} = \frac{١}{٢} م(م-١)$

$= \frac{١}{٢}\left(\frac{١}{٢} ن(ن-١)\right) \times \left(\frac{١}{٢} ن(ن-١) - ١\right)$

$= \frac{١}{٤} ن(ن-١) \times \frac{١}{٢}(ن^{٢} - ن - ٢)$

$= \frac{١}{٨} ن(ن-١)(ن-٢)(ن+١)$

$= ٣ \times \frac{(ن+١)(ن)(ن-١)(ن-٢)}{٢٤}$

$= ٣ \times \frac{{}^{ن+١}ل_{٤}}{\lfloor ٤} = ٣ \times {}^{ن+١}ق_{٤}$

⑦ لتكوين متوازى أضلاع نختار زوجًا من المستقيمات المتوازية التى عددها م مع زوج من المستقيمات المتوازية التى عددها ن

$\therefore$ عدد متوازيات الأضلاع $= {}^{م}ق_{٢} \cdot {}^{ن}ق_{٢}$

ثالثًا مسائل تقيس مهارات التفكير

① (جـ) ② (جـ) ③ (د) ④ (جـ)

⑤ (د) ⑥ (د) ⑦ (د)

إرشادات الحل :

① بالتجريب نجد أن :

ر = ٣ تعطى أكبر قيمة للمقدار $^{٦}ق_{ر}$



إجابات تمارين التفاضل والتكامل وحساب المثلثات

إجابات الوحدة الثالثة

إجابات تمارين 9

أولاً أسئلة الاختيار من متعدد

① (ج) ② (ب) ③ (د)
④ أولاً : (د) ثانيًا : (أ) ثالثًا : (د) ⑤ (ب)
⑥ (ب) ⑦ (ج) ⑧ (ب) ⑨ (د) ⑩ (ب)
⑪ (أ) ⑫ (ب) ⑬ (ج) ⑭ (ب) ⑮ (د)
⑯ (ج) ⑰ (د) ⑱ (ج) ⑲ (ج) ⑳ (ب)
(٢١) أولاً : (ب) ثانيًا : (ب) (٢٢) (ج) (٢٣) (ب)
(٢٤) (ب) (٢٥) (د) (٢٦) (أ) (٢٧) (ج) (٢٨) (د)
(٢٩) (ب) (٣٠) (أ) (٣١) (أ) (٣٢) (ب) (٣٣) (ب)
(٣٤) (ب) (٣٥) (أ) (٣٦) (ج) (٣٧) (ج) (٣٨) (ج)
(٣٩) (أ)

ثانيا الأسئلة المقالية

١

① $ت(هـ) = د(٣ + هـ) - د(٣)$
$= (٣ + هـ)^٢ - ٣(٣ + هـ) + ٤ - ٤$
$= ٩ + ٦هـ + هـ^٢ - ٩ - ٣هـ$
$= هـ^٢ + ٣هـ$
∴ $ت(٠,٥) = ١,٧٥$

② التغير $= د(٢,٤) - د(٢)$
$= [(٢,٤)^٢ - ٣(٢,٤) + ٤]$
$- [(٢)^٢ - ٣(٢) + ٤]$
$= ٠,٥٦$

٢

① ∵ $د(٢) = ٧$ ، $د(٢,٢) = ٨,٢٤$
∴ التغير في $د(س) = ٨,٢٤ - ٧ = ١,٢٤$

② ∵ $د(٢) = ٧$ ، $د(١,٨) = ٥,٨٤$
∴ التغير في $د(س) = ٥,٨٤ - ٧ = -١,١٦$

③ ∵ $د(١) = ٢$ ، $د(١ + هـ) = هـ^٢ + ٤هـ + ٢$
∴ التغير في $د(س) = هـ^٢ + ٤هـ + ٢ - ٢$
$= هـ^٢ + ٤هـ$

④ ∵ $د(٢) = ٧$ ، $د(٢ + هـ) = د(٢ + \frac{١}{٢})$
$= ١٠,٢٥$
∴ التغير في $د(س) = ١٠,٢٥ - ٧ = ٣,٢٥$

⑤ ∵ $د(٣) = ١٤$
، $د(٣ + \Delta س) = د(٣ + ٠,٢) = ١٥,٦٤$
∴ التغير في $د(س) = ١٥,٦٤ - ١٤ = ١,٦٤$

٣

① $م(هـ) = \frac{د(٢ + هـ) - د(٢)}{هـ}$
$= \frac{(٢ + هـ)^٢ + ٣(٢ + هـ) - ١ - ٩}{هـ}$
$= \frac{٤ + ٤هـ + هـ^٢ + ٦ + ٣هـ - ١ - ٩}{هـ}$
$= \frac{هـ^٢ + ٧هـ}{هـ} = هـ + ٧$
∴ $م(٠,٢) = ٠,٢ + ٧ = ٧,٢$

② متوسط التغير في د
$= \frac{د(٣) - د(٤,٥)}{٣ - ٤,٥}$
$= \frac{٩ + ٩ - ١ - [٢٠,٢٥ + ١٣,٥ - ١]}{-١,٥} = ١٠,٥$

٤

$م(هـ) = \frac{د(س_١ + هـ) - د(س_١)}{هـ}$
$= \frac{٢(س_١ + هـ)^٢ - ٣(س_١ + هـ) + ٤ - (٢س_١^٢ - ٣س_١ + ٤)}{هـ}$
$= \frac{٤س_١هـ + ٢هـ^٢ - ٣هـ}{هـ}$
$= ٤س_١ + ٢هـ - ٣$

① عند $س = ٣$
∴ $م(هـ) = ١٢ + ٢هـ - ٣ = ٢هـ + ٩$
∴ $م(٠,٢) = ٩,٤$

② عند $س = ٣,٥$ ، $هـ = ٤ - ٣,٥ = ٠,٥$
∴ $م(هـ) = ١٤ + ١ - ٣ = ١٢$

③ معدل التغير عند $(س = ٢)$
$= \lim_{هـ \to ٠} (٤س_١ + ٢هـ - ٣) = ٤ \times ٢ - ٣ = ٥$

٥

① $م(هـ) = \frac{د(س_١ + هـ) - د(س_١)}{هـ}$
$= \frac{\frac{س_١ + هـ + ٢}{س_١ + هـ - ٢} - \frac{س_١ + ٢}{س_١ - ٢}}{هـ}$
$= \frac{-٤}{(س_١ - ٢)(س_١ + هـ - ٢)}$

② عند $س = ٣$ ، $هـ = \frac{١}{٢}$
∴ $م(\frac{١}{٢}) = \frac{-٤}{١\frac{١}{٢}} = -٣$

③ معدل التغير عند $(س = ٤)$
$= \lim_{هـ \to ٠} \frac{-٤}{(س_١ - ٢)(س_١ + هـ - ٢)} = \frac{-٤}{(س_١ - ٢)^٢}$
$= \frac{-٤}{٤} = -١$

٦

$م(هـ) = \frac{د(س_١ + هـ) - د(س_١)}{هـ}$
$= \frac{\sqrt{س_١ + هـ + ٤} - \sqrt{س_١ + ٤}}{هـ}$
$= \frac{(\sqrt{س_١ + هـ + ٤} - \sqrt{س_١ + ٤})(\sqrt{س_١ + هـ + ٤} + \sqrt{س_١ + ٤})}{هـ(\sqrt{س_١ + هـ + ٤} + \sqrt{س_١ + ٤})}$
$= \frac{س_١ + هـ + ٤ - س_١ - ٤}{هـ(\sqrt{س_١ + هـ + ٤} + \sqrt{س_١ + ٤})}$
$= \frac{١}{\sqrt{س_١ + هـ + ٤} + \sqrt{س_١ + ٤}}$

، عند $س_١ = ٥$ ، $هـ = ١,٢٤$
∴ $م(١,٢٤) = \frac{١}{\sqrt{١٠,٢٤} + \sqrt{٩}} = \frac{٥}{٣١}$
، معدل التغير $= \lim_{هـ \to ٠} \frac{١}{\sqrt{س_١ + هـ + ٤} + \sqrt{س_١ + ٤}}$
$= \frac{١}{٢\sqrt{س_١ + ٤}}$
∴ معدل التغير عند $(س = ٥) = \frac{١}{٦}$

٧

$م(هـ) = \frac{د(س_١ + هـ) - د(س_١)}{هـ}$
$= \frac{\sqrt{س_١ + هـ - ٥} - \sqrt{س_١ - ٥}}{هـ}$
$= \frac{(\sqrt{س_١ + هـ - ٥} - \sqrt{س_١ - ٥})(\sqrt{س_١ + هـ - ٥} + \sqrt{س_١ - ٥})}{هـ(\sqrt{س_١ + هـ - ٥} + \sqrt{س_١ - ٥})}$
$= \frac{س_١ + هـ - ٥ - س_١ + ٥}{هـ(\sqrt{س_١ + هـ - ٥} + \sqrt{س_١ - ٥})}$
$= \frac{١}{\sqrt{س_١ + هـ - ٥} + \sqrt{س_١ - ٥}}$
∴ معدل التغير
$= \lim_{هـ \to ٠} \frac{١}{\sqrt{س_١ + هـ - ٥} + \sqrt{س_١ - ٥}}$
$= \frac{١}{٢\sqrt{س_١ - ٥}}$ حيث $س_١ > ٥$
∴ معدل التغير عند $(س = ٩) = \frac{١}{٢\sqrt{٩ - ٥}} = \frac{١}{٤}$
، لا يمكن حساب معدل التغير عند $س = ٥$
لأن النهاية (غير موجودة)

٨

$م(هـ) = \frac{د(س_١ + هـ) - د(س_١)}{هـ}$
$= \frac{ظا(س_١ + هـ) - ظا(س_١)}{هـ}$ ، عند $س = \pi$
∴ $م(هـ) = \frac{ظا(\pi + هـ) - ظا(\pi)}{هـ} = \frac{ظا هـ}{هـ}$
∴ معدل التغير $= \lim_{هـ \to ٠} \frac{ظا هـ}{هـ} = ١$

٩

معدل التغير عند (س = ٢)

$= \underset{هـ \leftarrow ٠}{\text{نهـا}} \frac{د(٢ + هـ) - د(٢)}{هـ}$

$= \underset{هـ \leftarrow ٠}{\text{نهـا}} \frac{(٢ + هـ)^٥ - ٢^٥}{هـ} = ٥ (٢)^٤ = ٨٠$

١٠

ت (هـ) = د (٣ + هـ) - د (٣)

$= أ(٣ + هـ)^٢ + ب(٣ + هـ) + ٤ - ٩أ - ٣ب - ٤$

$= أ هـ^٢ + (٦أ + ب) هـ$

، ∵ د (٣) = ٤ ∴ ٩أ + ٣ب + ٤ = ٤

∴ ٣أ + ب = صفر (١)

، ∵ ت $(\frac{١}{٢}) = ١\frac{٣}{٤}$

∴ $\frac{١}{٤}أ + \frac{١}{٢}(٦أ + ب) = \frac{٧}{٤}$

∴ أ + ١٢أ + ٢ب = ٧ ∴ ١٣أ + ٢ب = ٧ (٢)

من (١)، (٢): ∴ أ = ١ ، ب = -٣

١١

ت (هـ) = ١ + أ(٣ + هـ) + ب(٣ + هـ)^٢

- (١ + ٣أ + ٩ب)

$= أ هـ + ٦ب هـ + ب هـ^٢$

، عند هـ = -٢ - ٣ = -١ ، ∵ ت (-١) = ٧

∴ ٧ = -أ - ٦ب + ب ∴ أ + ٥ب = -٧ (١)

، ∵ معدل التغير عند (س = ٣)

$= \underset{هـ \leftarrow ٠}{\text{نهـا}} \frac{أ هـ + ٦ب هـ + ب هـ^٢}{هـ}$

$= \underset{هـ \leftarrow ٠}{\text{نهـا}} (أ + ٦ب + ب هـ) = أ + ٦ب$

∴ أ + ٦ب = -٩ (٢)

من (١)، (٢): ∴ ب = -٢ ، أ = ٣

١٢

متوسط التغير = $\frac{د(س_٢) - د(س_١)}{س_٢ - س_١}$

① متوسط التغير = $\frac{٤,٤ - ١}{٨ - ٤} = ٠,٨٥$

أى أن متوسط جملة المبيعات يتزايد بمقدار ٠,٨٥ مليون جنيه/شهر

② متوسط التغير = $\frac{٢ - ٤,٤}{١٠ - ٨} = -١,٢$

أى أن متوسط جملة المبيعات يتناقص بمقدار ١,٢ مليون جنيه/شهر

③ متوسط التغير = $\frac{١ - ١}{١٢ - ٤}$ = صفر

١٣

∵ متوسط التغير = $\frac{د(س_٢) - د(س_١)}{س_٢ - س_١}$

وهو يمثل ميل الخط المستقيم المار بالنقطتين

$(س_١ ، د(س_١))$ ، $(س_٢ ، د(س_٢))$

وحيث إن ميل الخط المستقيم ثابت لأى نقطتين عليه فإن متوسط التغير فى د يكون ثابتًا فى الفترات

]-٢ ، ٠[،]٢ ، ٤[،]٦ ، ∞[

١٤

بفرض طول ضلع المربع س سم

فإن المساحة ص = د (س) = $س^٢$

∴ متوسط التغير فى المساحة

$= \frac{د(س_١ + هـ) - د(س_١)}{هـ} = \frac{(س_١ + هـ)^٢ - س_١^٢}{هـ}$

$= \frac{س_١^٢ + ٢س_١ هـ + هـ^٢ - س_١^٢}{هـ} = ٢س_١ + هـ$

، عندما يتغير طول الضلع من ٢ سم إلى ٢,٤ سم

فإن س = ٢ ، هـ = ٠,٤

∴ متوسط التغير فى المساحة = ٢ × ٢ + ٠,٤ = ٦,٤

، معدل التغير فى المساحة (عند س = ٥)

$= \underset{هـ \leftarrow ٠}{\text{نهـا}} (٢س_١ + هـ) = ٢س_١ = ١٠$

١٥

بفرض طول ضلع المربع س سم

∴ مساحة المربع ص = د (س) = $س^٢$

∴ متوسط التغير فى المساحة

$= \frac{د(س_١ + هـ) - د(س_١)}{هـ} = \frac{(س_١ + هـ)^٢ - س_١^٢}{هـ}$

$= \frac{س_١^٢ + ٢س_١ هـ + هـ^٢ - س_١^٢}{هـ} = ٢س_١ + هـ$

، معدل التغير فى المساحة عندما (س = ٨)

$= \underset{هـ \leftarrow ٠}{\text{نهـا}} (٢س_١ + هـ) = ٢س_١ = ١٦$

١٦

① نفرض أن عرض اللوح = س سم

∴ الطول = (س + ٣) سم

∴ المساحة = س (س + ٣) = $س^٢ + ٣س$

∴ التغير فى المساحة

$= د(س_١ + هـ) - د(س_١)$

$= (س_١ + هـ)^٢ + ٣(س_١ + هـ)$

$- س_١^٢ - ٣س_١$

$= هـ^٢ + ٢س_١ هـ + ٣هـ$

$= هـ (هـ + ٢س_١ + ٣)$

وعندما يتغير العرض من ٤ سم إلى ٤,٢ سم

∴ س = ٤ ، هـ = ٠,٢

∴ التغير فى المساحة = ٠,٢ (٠,٢ + ٨ + ٣)

= ٢,٢٤

② ∵ المحيط = ٢ (٢س + ٣) = ٤س + ٦

∴ التغير فى المحيط = د$(س_١ + هـ)$ - د$(س_١)$

$= ٤(س_١ + هـ) + ٦ - ٤س_١ - ٦ = ٤هـ$

وعندما يتغير العرض من ٣,٥ سم إلى ٣,٧ سم

∴ س = ٣,٥ ، هـ = ٠,٢

∴ التغير فى المحيط = ٠,٨

١٧

① نفرض أن الطول = س سم

∴ العرض = $\frac{١}{٢}$ س سم ∴ المساحة = $\frac{١}{٢}س^٢$

∴ متوسط التغير فى المساحة

$= \frac{د(س_١ + هـ) - د(س_١)}{هـ}$

$= \frac{\frac{١}{٢}(س_١ + هـ)^٢ - \frac{١}{٢}س_١^٢}{هـ} = س_١ + \frac{١}{٢}هـ$

، عندما يتغير الطول من ١٥ سم إلى ١٦,٥ سم

∴ س = ١٥ ، هـ = ١,٥

∴ متوسط التغير فى المساحة = ١٥ + $\frac{١}{٢}$ × ١,٥

= ١٥,٧٥

② معدل التغير فى المساحة

$= \underset{هـ \leftarrow ٠}{\text{نهـا}} (س_١ + \frac{١}{٢}هـ) = س_١$

∴ معدل التغير فى المساحة عند (س = ١٥ سم)

= ١٥

، ∵ المحيط = ٢ (س + $\frac{١}{٢}$ س) = ٣س

∴ معدل التغير فى المحيط

$= \underset{هـ \leftarrow ٠}{\text{نهـا}} \frac{د(س_١ + هـ) - د(س_١)}{هـ}$

$= \underset{هـ \leftarrow ٠}{\text{نهـا}} \frac{٣(س_١ + هـ) - ٣س_١}{هـ}$

$= \underset{هـ \leftarrow ٠}{\text{نهـا}} ٣ = ٣$

∴ معدل التغير فى المحيط عند (س = ١٥ سم) = ٣

١٨

نفرض أن طول نصف قطر الصفيحة = نق سم

∴ مساحة الصفيحة = π $نق^٢$

∴ معدل التغير فى مساحة الصفيحة عندما نق = ١٤

$= \underset{هـ \leftarrow ٠}{\text{نهـا}} \frac{د(١٤ + هـ) - د(١٤)}{هـ}$

= نهـا_(هـ ← ٠) π((١٤ + هـ)^٢ − (١٤)^٢) / هـ

= نهـا_(هـ ← ٠) π(٢٨ هـ + هـ^٢) / هـ

= نهـا_(هـ ← ٠) π(٢٨ + هـ) = ٢٨ π

= ٢٨ × ٢٢/٧ = ٨٨

١٩

① نفرض أن طول نصف قطر الموجة = نق سم

∴ المساحة = π نق^٢

∴ متوسط التغير في المساحة

= [د(نق₁ + هـ) − د(نق₁)] / هـ

= [π(نق₁ + هـ)^٢ − π نق₁^٢] / هـ = π(٢ نق₁ + هـ)

، عندما يتغير طول نصف القطر من ٦ سم إلى ٦,٣ سم

∴ نق = ٦ ، هـ = ٠,٣

∴ متوسط التغير في المساحة = ١٢,٣ π

② معدل التغير في المساحة

= نهـا_(هـ ← ٠) π(٢ نق₁ + هـ) = ٢ π نق₁

، عند نق = ٥ سم

∴ معدل التغير في المساحة = ١٠ π

٢٠

① نفرض أن طول حرف المكعب = س سم

∴ مساحته الكلية = ٦ س^٢

∴ متوسط التغير في المساحة

= [د(س₁ + هـ) − د(س₁)] / هـ

= [٦(س₁ + هـ)^٢ − ٦ س₁^٢] / هـ = ١٢ س₁ + ٦ هـ

وعندما يتغير طول حرف المكعب من ٢ سم إلى ٢,١ سم

∴ س = ٢ ، هـ = ٠,١

∴ متوسط التغير في المساحة = ٢٤,٦

② معدل التغير في المساحة

= نهـا_(هـ ← ٠) (١٢ س₁ + ٦ هـ) = ١٢ س₁

∴ معدل التغير في المساحة عندما (س = ٣ سم)

= ٣٦

③ الحجم = س^٣

∴ معدل التغير في الحجم عندما يكون طول الحرف ٤ سم

= نهـا_(هـ ← ٠) [(٤ + هـ)^٣ − ٤^٣] / هـ = ٣(٤)^٢ = ٤٨

٢١

متوسط التغير في المساحة = [د(٠,٦) − د(٠,٥)] / (٠,٦ − ٠,٥)

= [٤ π (٠,٦)^٢ − ٤ π (٠,٥)^٢] / (٠,٦ − ٠,٥) = ٤,٤ π

٢٢

متوسط التغير = [(١٠٠ − ٤٢/(٢ + ١)) − (١٠٠ − ٤٢/(١ + ١))] / (٢ − ١) = ٧

٢٣

① متوسط التغير في المسافة

= [د(ن₁ + هـ) − د(ن₁)] / هـ

= [(ن₁ + هـ)^٢ + ٣(ن₁ + هـ) + ٢ − ن₁^٢ − ٣ ن₁ − ٢] / هـ

= هـ + ٢ ن₁ + ٣

، عندما تتغير ن من ٢ ثانية إلى ٤ ثانية

فإن : ن₁ = ٢ ، هـ = ٢

∴ متوسط التغير في المسافة = ٩

② معدل التغير في المسافة بالنسبة للزمن

= نهـا_(هـ ← ٠) (هـ + ٢ ن₁ + ٣) = ٢ ن₁ + ٣

وعند ن = ٥ ثانية

∴ معدل التغير = ١٣

٢٤

① متوسط تغير النمو

= [د(ن₁ + هـ) − د(ن₁)] / هـ

= [٦(ن₁ + هـ)^٢ + ٥٠٠٠٠ − ٦ ن₁^٢ − ٥٠٠٠٠] / هـ

= ٦ هـ + ١٢ ن₁

② خلال فترة ٦ أيام اعتبارًا من بداية اليوم الثالث تعني بين ن = ٢ ، ن = ٨

∴ هـ = ٦ ، ن₁ = ٢

∴ متوسط تغير النمو = ٦٠

③ خلال اليوم السابع تعني أن ن تتغير من ٦ إلى ٧

∴ هـ = ١ ، ن₁ = ٦ ∴ معدل تغير النمو = ٧٨

④ معدل تغير النمو = نهـا_(هـ ← ٠) (٦ هـ + ١٢ ن₁) = ١٢ ن₁

، عندما ن = ٤ ∴ معدل تغير النمو = ٤٨

٢٥

① نفرض أن طول ضلع المثلث = س سم

∴ ارتفاع المثلث = (√٣ / ٢) س سم

∴ المساحة = (√٣ / ٤) س^٢

∴ متوسط التغير في المساحة

= [د(س₁ + هـ) − د(س₁)] / هـ

= [(√٣ / ٤)(س₁ + هـ)^٢ − (√٣ / ٤) س₁^٢] / هـ

= (√٣ / ٤)(٢ س₁ + هـ)

، عند س = ٣,٥ ، هـ = ١

∴ متوسط التغير في المساحة = (√٣ / ٤)(٨)

= ٢√٣

② معدل التغير في المساحة

= نهـا_(هـ ← ٠) (√٣ / ٤)(٢ س₁ + هـ) = (√٣ / ٢) س₁

وعندما يكون الارتفاع = ٣√٣ سم

∴ طول الضلع س = ٣√٣ × ٢/√٣ = ٦ سم

∴ معدل التغير في المساحة عندما يكون الارتفاع

٣√٣ سم = (√٣ / ٢) × ٦ = ٣√٣

٢٦

① عندما تتغير س من ١ إلى ٢

فإن : د(س) = ٢ س^٢ − ٣

∴ م(هـ) = [د(س₁ + هـ) − د(س₁)] / هـ

= [٢(س₁ + هـ)^٢ − ٣ − ٢ س₁^٢ + ٣] / هـ

= [٤ س₁ هـ + ٢ هـ^٢] / هـ = ٤ س₁ + ٢ هـ

∴ عند س = ١ ، هـ = ١

فإن : م(١) = ٤ + ٢ = ٦

② عندما تتغير س من ٤ إلى ٤,٥

فإن : د(س) = ٢ س + ١

∴ م(هـ) = [د(س₁ + هـ) − د(س₁)] / هـ

= [٢(س₁ + هـ) + ١ − ٢ س₁ − ١] / هـ = ٢

∴ عند س = ٤ ، هـ = ٠,٥

فإن : م(٠,٥) = ٢

إجابات تمارين 10

أولًا أسئلة الاختيار من متعدد

① (د) ② (جـ) ③ (جـ) ④ (أ)

(٥) (جـ)　(٦) (أ)　(٧) (د)　(٨) (أ)

(٩) (جـ)　(١٠) (ب)　(١١) (جـ)　(١٢) (ب)

(١٣) (ب)　(١٤) (أ)　(١٥) (ب)　(١٦) (جـ)

(١٧) (د)　(١٨) (جـ)　(١٩) (ب)　(٢٠) (د)

(٢١) (ب)　(٢٢) (د)

ثانيا الأسئلة المقالية

١

① $\text{د}'(\text{س}) = \underset{\text{هـ}\to ٠}{\text{نهـا}} \frac{\text{د}(\text{س}+\text{هـ}) - \text{د}(\text{س})}{\text{هـ}}$

$= \underset{\text{هـ}\to ٠}{\text{نهـا}} \frac{٨ - ٨}{\text{هـ}} = \text{صفر}$

② $\text{د}'(\text{س}) = \underset{\text{هـ}\to ٠}{\text{نهـا}} \frac{٥(\text{س}+\text{هـ}) - ٧ - ٥\text{س} + ٧}{\text{هـ}}$

$= \underset{\text{هـ}\to ٠}{\text{نهـا}} \frac{٥\text{س} + ٥\text{هـ} - ٥\text{س}}{\text{هـ}} = ٥$

③ $\text{د}'(\text{س}) = \underset{\text{هـ}\to ٠}{\text{نهـا}} \frac{(\text{س}+\text{هـ})^٢ + ٥ - \text{س}^٢ - ٥}{\text{هـ}}$

$= \underset{\text{هـ}\to ٠}{\text{نهـا}} \frac{\text{س}^٢ + ٢\text{س}\,\text{هـ} + \text{هـ}^٢ - \text{س}^٢}{\text{هـ}}$

$= \underset{\text{هـ}\to ٠}{\text{نهـا}} (٢\text{س} + \text{هـ}) = ٢\text{س}$

④ $\text{د}'(\text{س})$

$= \underset{\text{هـ}\to ٠}{\text{نهـا}} \frac{٩(\text{س}+\text{هـ}) + (\text{س}+\text{هـ})^٢ - ٩\text{س} - \text{س}^٢}{\text{هـ}}$

$= \underset{\text{هـ}\to ٠}{\text{نهـا}} \frac{٩\text{س} + ٩\text{هـ} + \text{س}^٢ + ٢\text{س}\,\text{هـ} + \text{هـ}^٢ - ٩\text{س} - \text{س}^٢}{\text{هـ}}$

$= \underset{\text{هـ}\to ٠}{\text{نهـا}} (٩ + ٢\text{س} + \text{هـ}) = ٩ + ٢\text{س}$

⑤ $\text{د}'(\text{س}) = \underset{\text{هـ}\to ٠}{\text{نهـا}} \frac{(\text{س}+\text{هـ})^٢ - ٢ - \text{س}^٢ + ٢}{\text{هـ}}$

$= \underset{\text{هـ}\to ٠}{\text{نهـا}} \frac{(\text{س}+\text{هـ})^٢ - \text{س}^٢}{\text{هـ}} = ٢\text{س}$

⑥ $\text{د}'(\text{س}) = \underset{\text{هـ}\to ٠}{\text{نهـا}} \frac{١}{\text{هـ}} \left(\frac{١}{\text{س}+\text{هـ}} - \frac{١}{\text{س}}\right)$

$= \underset{\text{هـ}\to ٠}{\text{نهـا}} \frac{١}{\text{هـ}} \left(\frac{\text{س} - \text{س} - \text{هـ}}{\text{س}(\text{س}+\text{هـ})}\right)$

$= \underset{\text{هـ}\to ٠}{\text{نهـا}} \frac{-١}{\text{س}(\text{س}+\text{هـ})} = \frac{-١}{\text{س}^٢}$

⑦ $\text{د}'(\text{س}) = \underset{\text{هـ}\to ٠}{\text{نهـا}} \frac{١}{\text{هـ}} \left[\frac{٧}{\text{س}+\text{هـ}} - ٢ - \frac{٧}{\text{س}} + ٢\right]$

$= \underset{\text{هـ}\to ٠}{\text{نهـا}} \frac{١}{\text{هـ}} \left[\frac{٧}{\text{س}+\text{هـ}} - \frac{٧}{\text{س}}\right]$

$= \underset{\text{هـ}\to ٠}{\text{نهـا}} \frac{١}{\text{هـ}} \left[\frac{٧\text{س} - ٧\text{س} - ٧\text{هـ}}{\text{س}(\text{س}+\text{هـ})}\right]$

$= \underset{\text{هـ}\to ٠}{\text{نهـا}} \frac{-٧}{\text{س}(\text{س}+\text{هـ})} = \frac{-٧}{\text{س}^٢}$

⑧ $\text{د}'(\text{س}) = \underset{\text{هـ}\to ٠}{\text{نهـا}} \frac{٥ - ٤\sqrt{\text{س}+\text{هـ}} - ٥ + ٤\sqrt{\text{س}}}{\text{هـ}}$

$= \underset{\text{هـ}\to ٠}{\text{نهـا}} \frac{-٤(\sqrt{\text{س}+\text{هـ}} - \sqrt{\text{س}})}{\text{هـ}}$

$= -٤ \underset{\text{هـ}\to ٠}{\text{نهـا}} \frac{(\text{س}+\text{هـ})^{\frac{١}{٢}} - (\text{س})^{\frac{١}{٢}}}{\text{هـ}}$

$= -٤ \times \frac{١}{٢} \times \text{س}^{-\frac{١}{٢}} = \frac{-٢}{\sqrt{\text{س}}}$

⑨ $\text{د}'(\text{س})$

$= \underset{\text{هـ}\to ٠}{\text{نهـا}} \frac{\sqrt{٣(\text{س}+\text{هـ}) + ١} - \sqrt{٣\text{س} + ١}}{\text{هـ}}$

$= ٣ \underset{\text{هـ}\to ٠}{\text{نهـا}} \frac{\sqrt{٣\text{س} + ٣\text{هـ} + ١} - \sqrt{٣\text{س} + ١}}{٣\text{هـ}}$

$= ٣ \underset{\text{هـ}\to ٠}{\text{نهـا}} \frac{(٣\text{س} + ١ + ٣\text{هـ})^{\frac{١}{٢}} - (٣\text{س} + ١)^{\frac{١}{٢}}}{(٣\text{س} + ١ + ٣\text{هـ}) - (٣\text{س} + ١)}$

$= ٣ \times \frac{١}{٢} (٣\text{س} + ١)^{-\frac{١}{٢}} = \frac{٣}{٢\sqrt{٣\text{س} + ١}}$

⑩ $\text{د}'(\text{س}) = \underset{\text{هـ}\to ٠}{\text{نهـا}} \frac{١}{\text{هـ}} \left[\frac{\text{س}+\text{هـ}}{\text{س}+\text{هـ}+٥} - \frac{\text{س}}{\text{س}+٥}\right]$

$= \underset{\text{هـ}\to ٠}{\text{نهـا}} \frac{١}{\text{هـ}}$

$\left[\frac{\text{س}^٢ + ٥\text{س} + \text{هـ}\text{س} + ٥\text{هـ} - \text{س}^٢ - \text{هـ}\text{س} - ٥\text{س}}{(\text{س}+٥)(\text{س}+\text{هـ}+٥)}\right]$

$= \underset{\text{هـ}\to ٠}{\text{نهـا}} \frac{١}{\text{هـ}} \left[\frac{٥\text{هـ}}{(\text{س}+٥)(\text{س}+\text{هـ}+٥)}\right]$

$= \underset{\text{هـ}\to ٠}{\text{نهـا}} \frac{٥}{(\text{س}+٥)(\text{س}+\text{هـ}+٥)}$

$= \frac{٥}{(\text{س}+٥)^٢}$

٢

① $\text{د}'(٢) = \underset{\text{هـ}\to ٠}{\text{نهـا}} \frac{٣(٢+\text{هـ})^٢ - ٥ - ٧}{\text{هـ}}$

$= \underset{\text{هـ}\to ٠}{\text{نهـا}} \frac{١٢ + ١٢\text{هـ} + ٣\text{هـ}^٢ - ١٢}{\text{هـ}}$

$= \underset{\text{هـ}\to ٠}{\text{نهـا}} (١٢ + ٣\text{هـ}) = ١٢$

∴ ميل المماس = ١٢ ، قياس الزاوية = ٨٥° ١٤َ

② $\text{د}'(-١)$

$= \underset{\text{هـ}\to ٠}{\text{نهـا}} \frac{١ - ٥(-١+\text{هـ}) - ٣(-١+\text{هـ})^٢ - ٣}{\text{هـ}}$

$= \underset{\text{هـ}\to ٠}{\text{نهـا}} \frac{١ + ٥ - ٥\text{هـ} - ٣ + ٦\text{هـ} - ٣\text{هـ}^٢ - ٣}{\text{هـ}}$

$= \underset{\text{هـ}\to ٠}{\text{نهـا}} (١ - ٣\text{هـ}) = ١$

∴ ميل المماس = ١ ، قياس الزاوية = ٤٥°

③ $\text{د}'(١) = \underset{\text{هـ}\to ٠}{\text{نهـا}} \frac{(١+\text{هـ})^٣ - ٤ + ٣}{\text{هـ}}$

$= \underset{\text{هـ}\to ٠}{\text{نهـا}} \frac{(١+\text{هـ})^٣ - (١)^٣}{\text{هـ}} = ٣$

∴ ميل المماس = ٣ ، قياس الزاوية ≃ ٧١° ٣٤َ

④ $\text{د}'(٥) = \underset{\text{هـ}\to ٠}{\text{نهـا}} \frac{(٨+\text{هـ})^{\frac{١}{٣}} - (٨)^{\frac{١}{٣}}}{\text{هـ}}$

$= \frac{١}{٣}(٨)^{-\frac{٢}{٣}} = \frac{١}{١٢}$

∴ ميل المماس = $\frac{١}{١٢}$ ، قياس الزاوية ≃ ٤° ٤٦َ

٣

∵ د كثيرة حدود ∴ مجالها ح ∴ ١ ∈ مجال د

، $\text{د}'(١) = \underset{\text{هـ}\to ٠}{\text{نهـا}} \frac{(١+\text{هـ})^٢ - (١+\text{هـ}) + ١ - ١}{\text{هـ}}$

$= \underset{\text{هـ}\to ٠}{\text{نهـا}} \frac{١ + ٢\text{هـ} + \text{هـ}^٢ - ١ - \text{هـ}}{\text{هـ}}$

$= \underset{\text{هـ}\to ٠}{\text{نهـا}} (١ + \text{هـ}) = ١ \in \text{ح}$

∴ د قابلة للاشتقاق عند س = ١

٤

① * بحث الاتصال :

$\text{د}(٣) = ٧ - ٣ = ٤$

، $\text{د}(٣^+) = \underset{\text{س}\to ٣^+}{\text{نهـا}} (٧ - \text{س}) = ٤$

، $\text{د}(٣^-) = \underset{\text{س}\to ٣^-}{\text{نهـا}} (٢\text{س} - ١) = ٥$

∴ $\text{د}(٣^+) \neq \text{د}(٣^-)$ ∴ د غير متصلة عند س = ٣

∴ د غير قابلة للاشتقاق عند س = ٣

② * بحث الاتصال :

$\text{د}(٢) = ٤(٢) - ١ = ٧$

، $\text{د}(٢^+) = \underset{\text{س}\to ٢^+}{\text{نهـا}} \text{س}^٢ = ٤$

، $\text{د}(٢^-) = \underset{\text{س}\to ٢^-}{\text{نهـا}} (٤\text{س} - ١) = ٧$

∴ د غير متصلة عند س = ٢

∴ د غير قابلة للاشتقاق عند س = ٢

③ * بحث الاتصال :

$\text{د}(٢) = ٤(٢) - ٩ = -١$

، $\text{د}(٢^+) = \underset{\text{س}\to ٢^+}{\text{نهـا}} (٤\text{س} - ٩) = -١$

، $\text{د}(٢^-) = \underset{\text{س}\to ٢^-}{\text{نهـا}} (\text{س}^٢ - ٥) = -١$

∴ $\text{د}(٢) = \text{د}(٢^+) = \text{د}(٢^-)$

∴ د متصلة عند س = ٢

* بحث قابلية الاشتقاق :

$\text{د}'(٢^+) = \underset{\text{هـ}\to ٠^+}{\text{نهـا}} \frac{٤(٢+\text{هـ}) - ٩ + ١}{\text{هـ}}$

$= \underset{\text{هـ}\to ٠^+}{\text{نهـا}} \frac{٨ + ٤\text{هـ} - ٩ + ١}{\text{هـ}} = ٤$

، $\text{د}'(٢^-) = \underset{\text{هـ}\to ٠^-}{\text{نهـا}} \frac{(٢+\text{هـ})^٢ - ٥ + ١}{\text{هـ}}$

$= \underset{\text{هـ}\to ٠^-}{\text{نهـا}} \frac{٤ + ٤\text{هـ} + \text{هـ}^٢ - ٤}{\text{هـ}}$

$= \underset{\text{هـ}\to ٠^-}{\text{نهـا}} (٤ + \text{هـ}) = ٤$

∴ $\text{د}'(٢^+) = \text{د}'(٢^-)$

∴ د قابلة للاشتقاق عند س = ٢

④ * بحث الاتصال :

$\text{د}(-١) = ٥ + \frac{٣}{-١} = ٢$

، $\text{د}(-١^+) = \underset{\text{س}\to -١^+}{\text{نهـا}} (١ - \text{س}^٣) = ٢$

، $\text{د}(-١^-) = \underset{\text{س}\to -١^-}{\text{نهـا}} \left(٥ + \frac{٣}{-١}\right) = ٢$

∴ $\text{د}(-١^-) = \text{د}(-١^+) = \text{د}(-١)$

∴ د متصلة عند س = −١

• بحث قابلية الاشتقاق :

$دَ(−١^+) = \underset{هـ \to ٠^+}{\text{نهـا}} \frac{١ − (−١ + هـ)^٣ − ٢}{هـ}$

$= − \underset{هـ \to ٠^+}{\text{نهـا}} \frac{(١ − هـ)^٣ − ١^٣}{(١ − هـ) − ١} = −٣$

، $دَ(−١^-) = \underset{هـ \to ٠^-}{\text{نهـا}} \frac{٥ + \frac{٣}{−١ + هـ} − ٢}{هـ}$

$= \underset{هـ \to ٠^-}{\text{نهـا}} \frac{١}{هـ} \left(\frac{٣(−١ + هـ) + ٣}{−١ + هـ}\right)$

$= \underset{هـ \to ٠^-}{\text{نهـا}} \frac{١}{هـ} \left(\frac{٣هـ}{−١ + هـ}\right)$

$= \underset{هـ \to ٠^-}{\text{نهـا}} \frac{٣}{−١ + هـ} = −٣$

∴ $دَ(−١^+) = دَ(−١^-)$

∴ د قابلة للاشتقاق عند س = −١

٥

① $د(١) = ٢(١) − ٣ = −١$

، $دَ(١^-) = \underset{هـ \to ٠^-}{\text{نهـا}} \frac{٢(١ + هـ) − ٣ − (−١)}{هـ}$

$= \underset{هـ \to ٠^-}{\text{نهـا}} \frac{٢هـ}{هـ} = ٢$

، $دَ(١^+) = \underset{هـ \to ٠^+}{\text{نهـا}} \frac{(١ + هـ)^٢ − ٢ − (−١)}{هـ}$

$= \underset{هـ \to ٠^+}{\text{نهـا}} \frac{١ + ٢هـ + هـ^٢ − ٢ + ١}{هـ}$

$= \underset{هـ \to ٠^+}{\text{نهـا}} \frac{هـ(٢ + هـ)}{هـ} = ٢$

، ∵ $دَ(١^+) = دَ(١^-)$

∴ د قابلة للاشتقاق عند س = ١

② $د(١) = ٤ − (١)^٢ = ٣$

، $دَ(١^-) = \underset{هـ \to ٠^-}{\text{نهـا}} \frac{٤ − (١ + هـ)^٢ − ٣}{هـ}$

$= \underset{هـ \to ٠^-}{\text{نهـا}} \frac{١ − ١ − ٢هـ − هـ^٢}{هـ}$

$= \underset{هـ \to ٠^-}{\text{نهـا}} (−٢ − هـ) = −٢$

، $دَ(١^+) = \underset{هـ \to ٠^+}{\text{نهـا}} \frac{٢(١ + هـ) + ١ − ٣}{هـ}$

$= \underset{هـ \to ٠^+}{\text{نهـا}} \frac{٢ + ٢هـ + ١ − ٣}{هـ} = ٢$

، ∵ $دَ(١^+) \ne دَ(١^-)$

∴ د غير قابلة للاشتقاق عند س = ١

③ $د(١) = ٣(١)^٢ − ١٢(١) + ١١ = ٢$

، $دَ(١^+)$

$= \underset{هـ \to ٠^+}{\text{نهـا}} \frac{٣(هـ + ١)^٢ − ١٢(هـ + ١) + ١١ − ٢}{هـ}$

$= \underset{هـ \to ٠^+}{\text{نهـا}} \frac{٣هـ^٢ + ٦هـ + ٣ − ١٢هـ − ١٢ + ١١ − ٢}{هـ}$

$= \underset{هـ \to ٠^+}{\text{نهـا}} \frac{٣هـ^٢ − ٦هـ}{هـ}$

$= \underset{هـ \to ٠^+}{\text{نهـا}} (٣هـ − ٦) = −٦$

، $دَ(١^-) = \underset{هـ \to ٠^-}{\text{نهـا}} \frac{(هـ + ١)^٢ + ٤(هـ + ١) − ٣ − ٢}{هـ}$

$= \underset{هـ \to ٠^-}{\text{نهـا}} \frac{هـ^٢ + ٢هـ + ١ + ٤هـ + ٤ − ٣ − ٢}{هـ}$

$= \underset{هـ \to ٠^-}{\text{نهـا}} \frac{هـ^٢ + ٦هـ}{هـ} = \underset{هـ \to ٠^-}{\text{نهـا}} (هـ + ٦) = ٦$

، ∵ $دَ(١^+) \ne دَ(١^-)$

∴ د غير قابلة للاشتقاق عند س = ١

٦

$د(٢) = (٢)^٢ = ٤$

، $دَ(٢^+) = \underset{هـ \to ٠^+}{\text{نهـا}} \frac{(٢ + هـ) + ٢ − ٤}{هـ}$

$= \underset{هـ \to ٠^+}{\text{نهـا}} \frac{هـ}{هـ} = ١$

، $دَ(٢^-) = \underset{هـ \to ٠^-}{\text{نهـا}} \frac{(٢ + هـ)^٢ − (٢)^٢}{هـ} = ٢ × ٢ = ٤$

، ∵ $دَ(٢^+) \ne دَ(٢^-)$

∴ د غير قابلة للاشتقاق عند س = ٢

٧

① ∵ مجال د = ح − {−١}

∴ د معرفة عند س = ٢ ، $د(٢) = \frac{(٢) − ١}{(٢) + ١} = \frac{١}{٣}$

، $دَ(٢) = \underset{هـ \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{١}{هـ}\left[\frac{٢ + هـ − ١}{٢ + هـ + ١} − \frac{١}{٣}\right]$

$= \underset{هـ \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{١}{هـ}\left[\frac{١ + هـ}{٣ + هـ} − \frac{١}{٣}\right]$

$= \underset{هـ \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{١}{هـ}\left[\frac{٣ + ٣هـ − ٣ − هـ}{٣(٣ + هـ)}\right]$

$= \underset{هـ \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{١}{هـ}\left[\frac{٢هـ}{٣(٣ + هـ)}\right] = \frac{٢}{٩} \in ح$

∴ د قابلة للاشتقاق عند س = ٢

② ∵ مجال د = ح − {٠}

∴ د معرفة عند س = ١

، د(١) = ٢

، $دَ(١) = \underset{هـ \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{د(١ + هـ) − د(١)}{هـ}$

$= \underset{هـ \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{١}{هـ}\left(١ + هـ + \frac{١}{١ + هـ} − ٢\right)$

$= \underset{هـ \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{(١ + هـ)^٢ + ١ − ٢(١ + هـ)}{١ + هـ} × \frac{١}{هـ}$

$= \underset{هـ \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{١ + هـ^٢ + ٢هـ + ١ − ٢ − ٢هـ}{١ + هـ} × \frac{١}{هـ}$

$= \underset{هـ \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{هـ}{١ + هـ} = ٠ \in ح$

∴ د قابلة للاشتقاق عند س = ١

③ ∵ مجال د = [٤ ، ∞[

∴ د معرفة عند س = ٤

، د(٤) = ٠

، $دَ(٤) = \underset{هـ \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{د(٤ + هـ) − د(٤)}{هـ}$

$= \underset{هـ \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{\sqrt{٤ + هـ − ٤} − ٠}{هـ}$

$= \underset{هـ \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{\sqrt{هـ}}{هـ} = \underset{هـ \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{١}{\sqrt{هـ}}$ (غير معرفة)

∴ د غير قابلة للاشتقاق عند س = ٤

④ ∵ مجال د = ح ∴ د معرفة عند س = ٦

، $د(٦) = \sqrt[٣]{(٦ + ٢)^٢} = ٤$

، $دَ(٦) = \underset{هـ \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{\sqrt[٣]{(٦ + هـ + ٢)^٢} − ٤}{هـ}$

$= \underset{هـ \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{(٨ + هـ)^{\frac{٢}{٣}} − (٨)^{\frac{٢}{٣}}}{هـ} = \frac{٢}{٣}(٨)^{−\frac{١}{٣}}$

$= \frac{١}{٣} \in ح$

∴ د قابلة للاشتقاق عند س = ٦

⑤ $د(س) = \begin{cases} س − ٢ & ، س \ge ٢ \\ ٢ − س & ، س < ٢ \end{cases}$

د(٢) = ٢ − ٢ = صفر

، $دَ(٢^+) = \underset{هـ \to ٠^+}{\text{نهـا}} \frac{(٢ + هـ) − ٢ − صفر}{هـ} = ١$

، $دَ(٢^-) = \underset{هـ \to ٠^-}{\text{نهـا}} \frac{٢ − (٢ + هـ) − صفر}{هـ} = −١$

، ∵ $دَ(٢^+) \ne دَ(٢^-)$

∴ د غير قابلة للاشتقاق عند س = ٢

⑥ $د(س) = \sqrt{(س + ٣)^٢} = |س + ٣|$

$= \begin{cases} س + ٣ & ، س \ge −٣ \\ −س − ٣ & ، س < −٣ \end{cases}$

د(−٣) = صفر

$دَ(−٣^+) = \underset{هـ \to ٠^+}{\text{نهـا}} \frac{د(−٣ + هـ) − د(−٣)}{هـ}$

$= \underset{هـ \to ٠^+}{\text{نهـا}} \frac{−٣ + هـ + ٣ − ٠}{هـ} = ١$

، $دَ(−٣^-) = \underset{هـ \to ٠^-}{\text{نهـا}} \frac{د(−٣ + هـ) − د(−٣)}{هـ}$

$= \underset{هـ \to ٠^-}{\text{نهـا}} \frac{−(−٣ + هـ) − ٣ − ٠}{هـ} = −١$

، ∵ $دَ(−٣^+) \ne دَ(−٣^-)$

∴ د غير قابلة للاشتقاق عند س = −٣

⑦ $د(س) = \begin{cases} ٣ + س + ٢ & ، س \geq -٢ \\ ٣ - س - ٢ & ، س < -٢ \end{cases}$

$\therefore د(س) = \begin{cases} س + ٥ & ، س \geq -٢ \\ ١ - س & ، س < -٢ \end{cases}$

$د(-٢) = ٣$

، $\bar{د}(-٢^+) = \lim\limits_{هـ \to ٠^+} \frac{د(-٢ + هـ) - د(-٢)}{هـ}$

$= \lim\limits_{هـ \to ٠^+} \frac{٥ + (-٢ + هـ) - ٣}{هـ} = ١$

، $\bar{د}(-٢^-) = \lim\limits_{هـ \to ٠^-} \frac{د(-٢ + هـ) - د(-٢)}{هـ}$

$= \lim\limits_{هـ \to ٠^-} \frac{١ - (-٢ + هـ) - ٣}{هـ} = -١$

، $\because \bar{د}(-٢^+) \neq \bar{د}(-٢^-)$

$\therefore$ د غير قابلة للاشتقاق عند $س = -٢$

⑧ $د(س) = \begin{cases} س^٢ & ، س \geq ٠ \\ -س^٢ & ، س < ٠ \end{cases}$

$د(٠) = ٠$

، $\bar{د}(٠^+) = \lim\limits_{هـ \to ٠^+} \frac{د(٠ + هـ) - د(٠)}{هـ}$

$= \lim\limits_{هـ \to ٠^+} \frac{(٠ + هـ)^٢ - ٠}{هـ}$

$= \lim\limits_{هـ \to ٠^+} هـ = ٠$

، $\bar{د}(٠^-) = \lim\limits_{هـ \to ٠^-} \frac{د(٠ + هـ) - د(٠)}{هـ}$

$= \lim\limits_{هـ \to ٠^-} \frac{-(٠ + هـ)^٢ - ٠}{هـ}$

$= \lim\limits_{هـ \to ٠^-} (-هـ) = ٠$

، $\because \bar{د}(٠^+) = \bar{د}(٠^-)$

$\therefore$ د قابلة للاشتقاق عند $س = ٠$

٨

① $د(س) = \begin{cases} س^٢ + ٥ & ، س \geq ٠ \\ ٥ & ، س < ٠ \end{cases}$

$د(٠) = (٠)^٢ + ٥ = ٥$

، $\bar{د}(٠^+) = \lim\limits_{هـ \to ٠^+} \frac{(٠ + هـ)^٢ + ٥ - ٥}{هـ}$

$= \lim\limits_{هـ \to ٠^+} \frac{هـ^٢}{هـ}$

$= \lim\limits_{هـ \to ٠^+} هـ = $ صفر

، $\bar{د}(٠^-) = \lim\limits_{هـ \to ٠^-} \frac{٥ - ٥}{هـ} = $ صفر

، $\because \bar{د}(٠^+) = \bar{د}(٠^-)$

$\therefore$ د قابلة للاشتقاق عند $س = ٠$

② $د(٠) = ٢(٠) + ٣ = ٣$

، $\bar{د}(٠^-) = \lim\limits_{هـ \to ٠^-} \frac{د(٠ + هـ) - د(٠)}{هـ}$

$= \lim\limits_{هـ \to ٠^-} \frac{٢(٠ + هـ) + ٣ - ٣}{هـ} = ٢$

، $\bar{د}(٠^+) = \lim\limits_{هـ \to ٠^+} \frac{د(٠ + هـ) - د(٠)}{هـ}$

$= \lim\limits_{هـ \to ٠^+} \frac{٣ + ٢ جا(٠ + هـ) - ٣}{هـ}$

$= \lim\limits_{هـ \to ٠^+} \frac{٢ جا هـ}{هـ} = ٢$

، $\because \bar{د}(٠^+) = \bar{د}(٠^-)$

$\therefore$ د قابلة للاشتقاق عند $س = ٠$

③ $د\left(\frac{\pi}{٢}\right) = جتا\left(٢ \times \frac{\pi}{٢}\right) = -١$

، $\bar{د}\left(\frac{\pi}{٢}^-\right) = \lim\limits_{هـ \to ٠^-} \frac{جتا(\pi + ٢هـ) - (-١)}{هـ}$

$= \lim\limits_{هـ \to ٠^-} \frac{-جتا ٢هـ + ١}{هـ}$

$= ٢ \lim\limits_{٢هـ \to ٠^-} \frac{١ - جتا ٢هـ}{٢هـ}$

$= ٢ \times ٠ = ٠$

، $\bar{د}\left(\frac{\pi}{٢}^+\right) = \lim\limits_{هـ \to ٠^+} \frac{-جا\left(\frac{\pi}{٢} + هـ\right) - (-١)}{هـ}$

$= \lim\limits_{هـ \to ٠^+} \frac{-جتا هـ + ١}{هـ} = $ صفر

، $\because \bar{د}\left(\frac{\pi}{٢}^+\right) = \bar{د}\left(\frac{\pi}{٢}^-\right)$

$\therefore$ د قابلة للاشتقاق عند $س = \frac{\pi}{٢}$

٩

① $\because$ الدالة متصلة عند $س = ٢$

$\therefore د(٢^-) = د(٢^+) = د(٢)$

$\therefore ٥ = ٤أ + ١ \quad \therefore أ = ١$

$\therefore د(س) = \begin{cases} س^٢ + ١ & ، س \geq ٢ \\ ٤س - ٣ & ، س < ٢ \end{cases}$

، $\bar{د}(٢^+) = \lim\limits_{هـ \to ٠^+} \frac{(٢ + هـ)^٢ + ١ - ٥}{هـ}$

$= \lim\limits_{هـ \to ٠^+} \frac{(٢ + هـ)^٢ - ٢^٢}{هـ} = ٢ \times ٢ = ٤$

، $\bar{د}(٢^-) = \lim\limits_{هـ \to ٠^-} \frac{٤(٢ + هـ) - ٣ - ٥}{هـ}$

$= \lim\limits_{هـ \to ٠^-} \frac{٤هـ}{هـ} = ٤$

$\therefore \bar{د}(٢^+) = \bar{د}(٢^-)$

$\therefore$ د قابلة للاشتقاق عند $س = ٢$

② $\because$ الدالة متصلة عند $س = ٢$

$\therefore د(٢^-) = د(٢^+) = د(٢)$

$\therefore ٨أ = ٨ \quad \therefore أ = ١$

$\therefore د(س) = \begin{cases} ٣س + ٢ & ، س < ٢ \\ س^٣ & ، س \geq ٢ \end{cases}$

، $\because \bar{د}(٢^-) = \lim\limits_{هـ \to ٠^-} \frac{د(٢ + هـ) - د(٢)}{هـ}$

$= \lim\limits_{هـ \to ٠^-} \frac{٣(٢ + هـ) + ٢ - ٨}{هـ} = ٣$

، $\bar{د}(٢^+) = \lim\limits_{هـ \to ٠^+} \frac{د(٢ + هـ) - د(٢)}{هـ}$

$= \lim\limits_{هـ \to ٠^+} \frac{(٢ + هـ)^٣ - ٢^٣}{هـ} = ١٢$

$\therefore \bar{د}(٢^-) \neq \bar{د}(٢^+)$

$\therefore$ د غير قابلة للاشتقاق عند $س = ٢$

١٠

① $\because$ الدالة قابلة للاشتقاق عند $س = ٢$

$\therefore$ الدالة متصلة عند $س = ٢$

$\therefore د(٢^-) = د(٢^+) \quad \therefore ٤ - أ(٢)^٢ = ٢ + ب$

$\therefore ب = ٢ - ٤أ \quad (١)$

، $\bar{د}(٢^+) = \bar{د}(٢^-)$

، $\because \bar{د}(٢^+) = \lim\limits_{هـ \to ٠^+} \frac{٢ + هـ + ب - ٢ - ب}{هـ} = ١$

، $\bar{د}(٢^-) = \lim\limits_{هـ \to ٠^-} \frac{٤ - أ(٢ + هـ)^٢ - ٤ + ٤أ}{هـ}$

$= \lim\limits_{هـ \to ٠^-} \frac{٤ - ٤أ - ٤أهـ - أهـ^٢ - ٤ + ٤أ}{هـ}$

$= \lim\limits_{هـ \to ٠^-} (-٤أ - أهـ) = -٤أ$

$\therefore -٤أ = ١ \quad \therefore أ = -\frac{١}{٤}$

، من (١) $\therefore ب = ٣$

② $\because$ الدالة د قابلة للاشتقاق عند $س = ٢$

$\therefore$ الدالة متصلة عند $س = ٢$

$\therefore د(٢^+) = د(٢^-) \quad \therefore ٢أ + ب = ٠$

$\therefore ب = -٢أ \quad (١)$

، $\because \bar{د}(٢^+) = \bar{د}(٢^-)$

، $\because \bar{د}(٢^+) = \lim\limits_{هـ \to ٠^+} \frac{أ(٢ + هـ) + ب - ٢أ - ب}{هـ}$

$= \lim\limits_{هـ \to ٠^+} \frac{٢أ + أهـ + ب - ٢أ - ب}{هـ} = أ$

، $\bar{د}(٢^-) = \lim\limits_{هـ \to ٠^-} \frac{(٢ + هـ)^٢ - ٤ - ٠}{هـ}$

$= \lim\limits_{هـ \to ٠^-} \frac{(٢ + هـ)^٢ - ٢^٢}{هـ} = ٢ \times ٢ = ٤$

$\therefore أ = ٤$ ، من (١) $\therefore ب = -٨$

١١

① $\bar{د}(س) = \lim\limits_{هـ \to ٠} \frac{أ(س + هـ)^٢ + ب - أس^٢ - ب}{هـ}$

$= \lim\limits_{هـ \to ٠} \frac{أس^٢ + ٢أس هـ + أهـ^٢ - أس^٢}{هـ}$

$= \lim\limits_{هـ \to ٠} (٢أس + أهـ) = ٢أس$

② ∵ ميل المماس عند (٢ ، −٣) = ١٢

∴ ٤ أ = ١٢ ∴ أ = ٣

∴ د(س) = ٣ س^{٢} + ب

، ∵ (٢ ، −٣) تقع على المنحنى

∴ −٣ = ٣ (٢)^{٢} + ب ∴ ب = −١٥

١٢

① المشتقة اليمنى موجبة ، المشتقة اليسرى سالبة

∴ د̀(١$^{+}$) ≠ د̀(١$^{-}$)

∴ د غير قابلة للاشتقاق عند س = ١

② المشتقة اليمنى موجبة ، المشتقة اليسرى تساوى صفر

∴ د̀(١$^{+}$) ≠ د̀(١$^{-}$)

∴ د غير قابلة للاشتقاق عند س = ١

③ المشتقة اليمنى سالبة ، المشتقة اليسرى موجبة

∴ د̀(١$^{+}$) ≠ د̀(١$^{-}$)

∴ د غير قابلة للاشتقاق عند س = ١

١٣

∵ الدالة متصلة عند س = ٢

∴ د(٢$^{-}$) = د(٢) ∴ ٤ + ٢ أ − ٢ = ٤

∴ أ = ١

، د(٢$^{+}$) = د(٢) ∴ أ + ٢ ب = ٤

∴ ١ + ٢ ب = ٤ ∴ ب = ١,٥

∴ د̀(٢$^{-}$) = $\underset{هـ \to ٠^{-}}{\text{نهـا}} \frac{(٢+هـ)^{٢} + (٢+هـ) - ٢ - ٤}{هـ}$

= $\underset{هـ \to ٠^{-}}{\text{نهـا}} \frac{٤ + ٤هـ + هـ^{٢} + ٢ + هـ - ٢ - ٤}{هـ}$

= $\underset{هـ \to ٠^{-}}{\text{نهـا}} \frac{هـ(هـ + ٥)}{هـ} = ٥$

، د̀(٢$^{+}$) = $\underset{هـ \to ٠^{+}}{\text{نهـا}} \frac{١ + ١,٥(٢ + هـ) - ٤}{هـ}$

= $\underset{هـ \to ٠^{+}}{\text{نهـا}} \frac{١,٥ هـ}{هـ} = ١,٥$

∵ د̀(٢$^{-}$) ≠ د̀(٢$^{+}$)

∴ الدالة د غير قابلة للاشتقاق عند س = ٢

١٤

∵ الدالة متصلة عند س = ١

∴ د(١$^{-}$) = ١١ ، د(١$^{+}$) = ١١

∴ م + ٣ حـ = ١١ (١)

، حـ + ٤ م = ١١ (٢)

من (١) ، (٢) : ∴ م = ٢ ، حـ = ٣

، د̀(١$^{-}$) = $\underset{هـ \to ٠^{-}}{\text{نهـا}} \frac{٢(١ + هـ) + ٩ - ١١}{هـ} = ٢$

، د̀(١$^{+}$) = $\underset{هـ \to ٠^{+}}{\text{نهـا}} \frac{٣(١ + هـ)^{٢} + ٨ - ١١}{هـ}$

= $\underset{هـ \to ٠^{+}}{\text{نهـا}} \frac{٣(١ + ٢هـ + هـ^{٢}) - ٣}{هـ}$

= $\underset{هـ \to ٠^{+}}{\text{نهـا}} \frac{٣هـ(هـ + ٢)}{هـ} = ٦$

∴ د̀(١$^{-}$) ≠ د̀(١$^{+}$)

∴ الدالة غير قابلة للاشتقاق عند س = ١

ثالثاً مسائل تقيس مهارات التفكير

١

① (د) ② (د) ③ (ب) ④ (جـ) ⑤ (ب)

إرشادات لحل رقم ١ :

①

∵ ر(س) = |د(س)|

∴ فى الدالة ر(س)

تكون للدالة ركن مدبب عند أ

∴ الدالة تكون غير قابلة للاشتقاق عند أ

∴ ر̀(أ) غير معرفة

② ∵ $\underset{هـ \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{د(هـ + ٣) - د(٣) - د(هـ - ٢) + د(-٢)}{هـ}$

= $\underset{هـ \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{د(هـ + ٣) - د(٣)}{هـ}$ − $\underset{هـ \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{د(هـ - ٢) - د(-٢)}{هـ}$

= د̀(٣) − د̀(−٢)

③ ∵ $\underset{هـ \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{د(١ + هـ) - ٢}{٣هـ}$

= $\frac{١}{٣} \underset{هـ \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{د(١ + هـ) - د(١)}{هـ}$

= $\frac{١}{٣}$ د̀(١) = $\frac{٤}{٣}$

∴ $\underset{هـ \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{٣هـ}{د(١ + هـ) - ٢} = \frac{٣}{٤}$

④ ∵ $\underset{س \to ٢}{\text{نهـا}} \frac{س د(٢) - ٢ د(س)}{س - ٢}$

= $\underset{س \to ٢}{\text{نهـا}} \frac{س د(٢) - ٢ د(٢) - ٢ د(س) + ٢ د(٢)}{س - ٢}$

= $\underset{س \to ٢}{\text{نهـا}} \frac{د(٢) [س - ٢]}{س - ٢}$ − ٢ $\underset{س \to ٢}{\text{نهـا}} \frac{د(س) - د(٢)}{س - ٢}$

= د(٢) − ٢ د̀(٢) = ٤ − ٢ (١) = ٢

⑤ ∵ أ = (٢ ، د(٢)) = (٢ ، ٣)

، ب = (٣ ، د(٣)) = (٣ ، ٨)

∴ ميل القاطع $\overleftrightarrow{أب}$ = $\frac{٨ - ٣}{٣ - ٢}$ = ٥

، ميل المماس للمنحنى عند أ يساوى د̀(٢)

، ∵ د̀(س) = ٢ س ∴ د̀(٢) = ٤

∴ $\frac{\text{ميل القاطع } \overleftrightarrow{أب}}{\text{ميل المماس للمنحنى عند أ}} = \frac{٥}{٤}$

٢

∵ الدالة د متصلة عند س = ٢

∴ د(٢$^{+}$) = د(٢) ∴ ٤ أ + ٢ ب − ١ = ٧

∴ ٤ أ + ٢ ب = ٨ ∴ ٢ أ + ب = ٤ (١)

، $\frac{د(٣) - د(١)}{٣ - ١}$ = ٤,٥

∴ $\frac{٩ أ + ٣ ب - ١ - ٥}{٢}$ = ٤,٥

∴ ٩ أ + ٣ ب = ١٥ ∴ ٣ أ + ب = ٥ (٢)

من (١) ، (٢) : أ = ١ ، ب = ٢

، د̀(٢$^{-}$) = $\underset{هـ \to ٠^{-}}{\text{نهـا}} \frac{٢(٢ + هـ) + ٣ - ٧}{هـ} = ٢$

، د̀(٢$^{+}$) = $\underset{هـ \to ٠^{+}}{\text{نهـا}} \frac{(٢ + هـ)^{٢} + ٢(٢ + هـ) - ١ - ٧}{هـ}$

= $\underset{هـ \to ٠^{+}}{\text{نهـا}} \frac{٤ + ٤هـ + هـ^{٢} + ٤ + ٢هـ - ٨}{هـ}$

= $\underset{هـ \to ٠^{+}}{\text{نهـا}} \frac{هـ(هـ + ٦)}{هـ} = ٦$

∴ د̀(٢$^{-}$) ≠ د̀(٢$^{+}$)

∴ الدالة د غير قابلة للاشتقاق عند س = ٢

إجابات تمارين 11

أولاً أسئلة الاختيار من متعدد

① (جـ) ② (د) ③ (ب) ④ (جـ) ⑤ (د)

⑥ (ب) ⑦ (جـ) ⑧ (أ) ⑨ (د) ⑩ (جـ)

⑪ (أ) ⑫ (د) ⑬ (د) ⑭ (ب) ⑮ (د)

⑯ (ب) ⑰ (جـ) ⑱ (جـ) ⑲ (جـ) ⑳ (د)

(٢١) (ب) (٢٢) (جـ) (٢٣) (ب) (٢٤) (ب) (٢٥) (جـ)

(٢٦) (أ) (٢٧) (أ) (٢٨) (ب) (٢٩) (أ) (٣٠) (أ)

(٣١) (ب) (٣٢) (د) (٣٣) (ب) (٣٤) (د) (٣٥) (د)

(٣٦) (ب) (٣٧) (أ) (٣٨) (ب) (٣٩) (د) (٤٠) (ب)

(٤١) (جـ) (٤٢) (أ) (٤٣) (ب) (٤٤) (جـ) (٤٥) (جـ)

(٤٦) (جـ) (٤٧) (جـ) (٤٨) (ب)

ثانيا الأسئلة المقالية

١

(١) $\frac{ءص}{ءس} = صفر$ (٢) $\frac{ءص}{ءس} = ٥$

(٣) $\frac{ءص}{ءس} = ٤ س^{٣}$ (٤) $\frac{ءص}{ءس} = ٤ \pi س^{٢}$

(٥) $ص = - ٤ س^{-٥}$ ∴ $\frac{ءص}{ءس} = ٢٠ س^{-٦}$

(٦) $د'(س) = ٦ س - ٤$

(٧) $\frac{ءص}{ءس} = - ٢ س^{٣} + س^{٤}$

(٨) $\frac{ءص}{ءس} = ١٢ س^{٥} - ٩ س^{-١٠}$

(٩) $ص = س^{٧} + س^{-٧}$

∴ $\frac{ءص}{ءس} = ٧ س^{٦} - ٧ س^{-٨}$

(١٠) $ص = س^{٤} - ٣ س^{٢} + ٥ - ٢ س^{-٢} - ٣ س^{-٤}$

∴ $\frac{ءص}{ءس} = ٤ س^{٣} - ٦ س + ٤ س^{-٣} + ١٢ س^{-٥}$

(١١) ∵ $ص = ٣ س^{٣} - ٢ س^{٢} + ١٢ س$

∴ $ص' = ٩ س^{٢} - ٤ س + ١٢$

(١٢) ∵ $ص = \frac{١}{٢} س^{٢} - \frac{١}{٥} + س^{-١} - ٢ س^{-٣}$

∴ $ص' = س - س^{-٢} + ٦ س^{-٤}$

(١٣) ∵ $ص = ٢ س^{٢} - ٨ + ٢ س^{-١} - ٦ س^{-٢}$

∴ $ص' = ٤ س - ٢ س^{-٢} + ١٢ س^{-٣}$

(١٤) ∵ $ص = \frac{(س^{٢} - ٤)(س^{٢} + ٤)}{س^{٢}} = \frac{س^{٤} - ١٦}{س^{٢}}$

$= س^{٢} - ١٦ س^{-٢}$

∴ $ص' = ٢ س + ٣٢ س^{-٣}$

(١٥) ∵ $ص = (س^{٢} - ١)(س^{٢} + ١)(س^{٤} + ١)$

$(س^{٨} + ١)(س^{١٦} + ١)$

$= (س^{٤} - ١)(س^{٤} + ١)$

$(س^{٨} + ١)(س^{١٦} + ١)$

$= (س^{٨} - ١)(س^{٨} + ١)(س^{١٦} + ١)$

$= (س^{١٦} - ١)(س^{١٦} + ١) = س^{٣٢} - ١$

∴ $ص' = ٣٢ س^{٣١}$

٢

(١) $ص = س^{\frac{٥}{٣}}$ ∴ $ص' = \frac{٥}{٣} س^{\frac{٢}{٣}}$

(٢) $ص = ٢ س^{٦} + ٣ س^{\frac{١}{٢}}$

∴ $ص' = ١٢ س^{٥} + \frac{٣}{٢} س^{-\frac{١}{٢}}$

(٣) $ص = س^{\frac{١}{٢}} + س^{-\frac{١}{٢}}$

∴ $ص' = \frac{١}{٢} س^{-\frac{١}{٢}} - \frac{١}{٢} س^{-\frac{٣}{٢}}$

(٤) $ص = ٣ س^{٣} - س^{\frac{٣}{٢}}$

∴ $ص' = ٩ س^{٢} - \frac{٣}{٢} س^{\frac{١}{٢}}$

(٥) $ص = ١ - ٢ س^{\frac{١}{٢}}$

∴ $ص' = - س^{-\frac{١}{٢}}$

(٦) $ص = ٤ س - ٣ + ٢ س^{-\frac{١}{٢}}$

∴ $ص' = ٤ - س^{-\frac{٣}{٢}}$

(٧) $ص = ٥ س^{-١} + س^{\frac{٣}{٢}} + \sqrt{٣} س - ٤$

∴ $ص' = - ٥ س^{-٢} + \frac{٣}{٢} س^{\frac{١}{٢}} + \sqrt{٣}$

(٨) $ص = س^{٢} - س - ٣ س^{\frac{١}{٢}}$

∴ $ص' = ٢ س - ١ - \frac{٣}{٢} س^{-\frac{١}{٢}}$

٣

(١) $\frac{ء}{ءس}\left(\frac{١}{س^{٣}}\right) = \frac{ء}{ءس}(س^{-٣}) = -٣ س^{-٤} = \frac{-٣}{س^{٤}}$

(٢) $\frac{ء}{ءس}\left(س^{\frac{١}{٢}}\right) = \frac{١}{٢} س^{-\frac{١}{٢}}$

(٣) $\frac{ء}{ءس}\left(\frac{١}{\sqrt[٣]{س}}\right) = \frac{ء}{ءس}\left(س^{-\frac{١}{٣}}\right) = -\frac{١}{٣} س^{-\frac{٤}{٣}}$

(٤) $\frac{ء}{ءس}\left(س \sqrt{س}\right) = \frac{ء}{ءس}\left(س \times س^{\frac{١}{٢}}\right)$

$= \frac{ء}{ءس}\left(س^{\frac{٣}{٢}}\right)$

$= \frac{٣}{٢} س^{\frac{١}{٢}} = \frac{٣}{٢} \sqrt{س}$

(٥) $\frac{ء}{ءس}\left(\sqrt[٣]{س^{٢}}\right) = \frac{ء}{ءس}\left(س^{\frac{٢}{٣}}\right) = \frac{٢}{٣} س^{-\frac{١}{٣}}$

$= \frac{٢}{٣ \sqrt[٣]{س}}$

(٦) $\frac{ء}{ءس}\left(\frac{١}{\sqrt{س^{-٥}}}\right) = \frac{ء}{ءس}\left(س^{\frac{٥}{٢}}\right)$

$= \frac{٥}{٢} س^{\frac{٣}{٢}} = \frac{٥}{٢} \sqrt{س^{٣}}$

٤

(١) $ص' = (س^{٢} + ٣)(٣ س^{٢} - ٣)$

$+ ٢ س (س^{٣} - ٣ س + ١) = ٥ س^{٤} + ٢ س - ٩$

(٢) $ص' = (٤ س^{٢} - ١)(٢١ س^{٢} + ١)$

$+ ٨ س (٧ س^{٣} + س) = ١٤٠ س^{٤} - ٩ س^{٢} - ١$

، عند س = ١

∴ $[ص']_{س=١} = ١٤٠ - ٩ - ١ = ١٣٠$

(٣) $ص' = ٣ س^{٢} (س^{٢} + ١) + ٢ س (س^{٣} + ٣)$

$= ٥ س^{٤} + ٣ س^{٢} + ٦ س$

، عند س = −١

∴ $[ص']_{س=-١}$

$= ٥ (-١)^{٤} + ٣ (-١)^{٢} + ٦ (-١) = ٢$

(٤) $د'(س) = (٤ س^{٢} - ٣ س + ٧)(٢ س + ٢)$

$+ (س^{٢} + ٢ س + ٣)(٨ س - ٣)$

∴ $د'(٠) = ٥$

(٥) ∵ $د(س) = (٢ س^{٣} - ٤ س)(س^{٢} - ٢)$

∴ $د'(س) = (٢ س)(٢ س^{٣} - ٤ س)$

$+ (س^{٢} - ٢)(٦ س^{٢} - ٤)$

∴ $د'(٠) = ٨$

(٦) $ص' = ٢ (٣ س^{٢} - ٢)(٤ س^{٣} + ٣)$

$+ ٦ س (٢ س + ١)(٤ س^{٣} + ٣)$

$+ ١٢ س^{٢} (٢ س + ١)(٣ س^{٢} - ٢)$

٥

(١) $ص = ٤ س^{-٢}$ ∴ $ص' = - ٨ س^{-٣}$

(٢) $ص' = \frac{- ٥ \times ٢}{(٢ س + ٣)^{٢}} = \frac{- ١٠}{(٢ س + ٣)^{٢}}$

(٣) $د'(س) = \frac{(٢ س + ١) - ٢ س}{(٢ س + ١)^{٢}} = \frac{١}{(٢ س + ١)^{٢}}$

(٤) $ص' = \frac{٥ (٥ س + ١) - ٥ (٥ س - ٢)}{(٥ س + ١)^{٢}}$

$= \frac{١٥}{(٥ س + ١)^{٢}}$

(٥) $د'(س) = \frac{س^{٢} - ١ - ٢ س^{٢}}{(س^{٢} - ١)^{٢}} = \frac{- ١ - س^{٢}}{(س^{٢} - ١)^{٢}}$

(٦) $د'(س) = \frac{٢ س (س^{٣} + ١) - ٣ س^{٢} (س^{٢} - ١)}{(س^{٣} + ١)^{٢}}$

$= \frac{- س^{٤} + ٣ س^{٢} + ٢ س}{(س^{٣} + ١)^{٢}}$

(٧) $ص' = \frac{(س - ٢)(٢ س - ٦) - (س^{٢} - ٦ س + ٧)}{(س - ٢)^{٢}}$

$= \frac{س^{٢} - ٤ س + ٥}{(س - ٢)^{٢}}$

(٨) $ص' = \frac{(٢ س + ٢)(س^{٢} - ٥ س + ١) - (٢ س - ٥)(س^{٢} + ٢ س + ٥)}{(س^{٢} - ٥ س + ١)^{٢}}$

$= \frac{- ٧ س^{٢} - ٨ س + ٢٧}{(س^{٢} - ٥ س + ١)^{٢}}$

(٩) $د'(س) = صفر - \left(\frac{-١}{(س - ١)^{٢}}\right) = \frac{١}{(س - ١)^{٢}}$

∴ $د'(٣) = \frac{١}{(٣ - ١)^{٢}} = \frac{١}{٤}$

(١٠) $د'(س) = \frac{س + ٢ - س}{(س + ٢)^{٢}} - \frac{(س - ٢) - (س - ١)}{(س - ٢)^{٢}}$

$= \frac{٢}{(س + ٢)^{٢}} + \frac{١}{(س - ٢)^{٢}}$

∴ $د'(٠) = \frac{٣}{٤}$

٦

(١) ∵ الدالة د قابلة للاشتقاق عند س = ١

∴ الدالة متصلة عند س = ١

∴ د(١⁺) = د(١⁻) ∴ أ + ب = $(١)^٣$ + ٤

∴ أ + ب = ٥ (١)

، دَ(١⁺) = دَ(١⁻) ∴ أ = ٢$(١)^٢$ ∴ أ = ٢

، من (١) : ∴ ب = ٣

② ∵ الدالة د قابلة للاشتقاق عند س = ٢

∴ الدالة متصلة عند س = ٢

∴ د(٢⁺) = د(٢⁻)

∴ أ(٢) + ب = $(٢)^٢$ − أ

∴ ٣أ + ب = ٤ (١)

، دَ(٢⁻) = دَ(٢⁺) ∴ ٢ (٢) = أ ∴ أ = ٤

، من (١) : ∴ ب = −٨

③ ∵ الدالة د قابلة للاشتقاق عند س = ٢

∴ الدالة متصلة عند س = ٢

∴ د(٢⁻) = د(٢⁺) ∴ ٤أ + ٢ب + ٧ = ٥

∴ ٤أ + ٢ب = −٢ (١)

، دَ(٢⁻) = دَ(٢⁺)

∴ ٤أ + ب = −٥ $(٢ - ١)^{-٢}$

∴ ٤أ + ب = −٥ (٢)

من (١) ، (٢) : ∴ أ = −٢ ، ب = ٣

٧

∵ ص = ١ − $\frac{١}{\text{س}^٣}$ = ١ − $\text{س}^{-٣}$

∴ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = ٣ $\text{س}^{-٤}$ = $\frac{٣}{\text{س}^٤}$ ∴ $\text{س}^٤ \left(\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}\right)$ = ٣

٨

ص = ٢ $\text{س}^{-\frac{١}{٢}}$ + $\text{س}^{\frac{١}{٢}}$

∴ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = − $\text{س}^{-\frac{٣}{٢}}$ + $\frac{١}{٢}$ $\text{س}^{-\frac{١}{٢}}$

= $\frac{١}{٢\sqrt{\text{س}}} - \frac{١}{\text{س}\sqrt{\text{س}}} = \frac{\text{س} - ٢}{٢\,\text{س}\sqrt{\text{س}}}$

∴ ٢ $\text{س}^٢$ ص $\left(\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}\right)$

= ٢ $\text{س}^٢ \left(\frac{\text{س} + ٢}{\sqrt{\text{س}}}\right)\left(\frac{\text{س} - ٢}{٢\,\text{س}\sqrt{\text{س}}}\right)$ = $\text{س}^٢$ − ٤

٩

$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{-٣}{(\text{س} - ١)^٢}$

، ∵ س − ١ = $\frac{٣}{\text{ص}}$

∴ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{-٣}{\left(\frac{٣}{\text{ص}}\right)^٢} = \frac{-١}{٣}\,\text{ص}^٢$

١٠

∵ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{-\text{ل}^٢}{(\text{س} + \text{ل})^٢}$

∴ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} + \left(\frac{\text{ص}}{\text{ل}}\right)^٢ = \frac{-\text{ل}^٢}{(\text{س} + \text{ل})^٢} + \frac{\text{ل}^٢}{(\text{س} + \text{ل})^٢}$

= صفر

١١

د(س) = أ $\text{س}^٣$ + ب س

، ∵ د(١) = ٢ ∴ أ + ب = ٢ (١)

، دَ(س) = ٣أ $\text{س}^٢$ + ب

، ∵ دَ(١) = صفر

∴ ٣أ + ب = صفر (٢)

بطرح (١) من (٢) : ∴ ٢أ = −٢

∴ أ = −١ ، ب = ٣

١٢

دَ(س) = ٢ $\text{س}^٢$ − ٥ ∴ ٢ $\text{س}^٢$ − ٥ = ٧

∴ $\text{س}^٢$ = ٤ ∴ س = ±٢

١٣

∴ دَ(س) = $\frac{(\text{س} - \text{أ}) - (\text{س} + \text{أ})}{(\text{س} - \text{أ})^٢} = \frac{-٢\text{أ}}{(\text{س} - \text{أ})^٢}$

، ∵ دَ(٢) = −٢ ∴ $\frac{-٢\text{أ}}{(٢ - \text{أ})^٢}$ = −٢

∴ $(٢ - \text{أ})^٢$ − أ = ٠ ∴ $\text{أ}^٢$ − ٥أ + ٤ = ٠

∴ (أ − ٤) (أ − ١) = ٠ ∴ أ = ٤ ، أ = ١

١٤

∵ د(٠) = ١ ∴ $\frac{\text{ب}}{٢}$ = ١ ∴ ب = ٢

دَ(س) = $\frac{(٢\text{س} + \text{أ})(\text{س}^٢ - \text{س} + ٢) - (٢\text{س} - ١)(\text{س}^٢ + \text{أس} + ٢)}{(\text{س}^٢ - \text{س} + ٢)^٢}$

، ∵ دَ(٠) = ١ ∴ $\frac{٢\text{أ} + ٢}{٤}$ = ١

∴ ٢أ + ٢ = ٤ ∴ أ = ١

١٥

$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = ٣أ $\text{س}^٢$ + ٢ب س

، ∵ $\left[\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}\right]_{\text{س}=١}$ = ٨ ∴ ٣أ + ٢ب = ٨ (١)

، ∵ م(٣) = $\frac{\text{د}(٢) - \text{د}(-١)}{٣}$

= $\frac{(٨\text{أ} + ٤\text{ب}) - (-\text{أ} + \text{ب})}{٣}$

∴ ٧ = $\frac{٩\text{أ} + ٣\text{ب}}{٣}$ ∴ ٣أ + ب = ٧ (٢)

من (١) ، (٢) : ∴ أ = ٢ ، ب = ١

ثالثًا مسائل تقيس مهارات التفكير

① (جـ) ② (أ) ③ (ب) ④ (ب) ⑤ (جـ)

إرشادات الحل :

① ∵ $\frac{\text{ء}}{\text{ءس}}$ [د(س) × ر(س)]

= د(س) × رَ(س) + ر(س) × دَ(س)

= س + $\frac{١}{\text{س}}$

، عند س = ٢

∴ $\frac{\text{ء}}{\text{ءس}}$ [د(س) × ر(س)] = ٢ + $\frac{١}{٢}$ = $\frac{٥}{٢}$

② ∵ د(س) = (٢س + ١) × هـ(س)

∴ عند س = ٢ نجد أن د(٢) = ٥ هـ(٢)

∴ هـ(٢) = $\frac{١٥}{٥}$ = ٣

، دَ(س) = (٢س + ١) × هـَ(س) + هـ(س) × ٢

∴ دَ(٢) = ٥ × هـَ(٢) + ٢ هـ(٢)

= ٥ × ٤ + ٢ × ٣ = ٢٦

③ $\frac{\text{ء}}{\text{ءس}}\left[\frac{\text{د(س)}}{\text{هـ(س)}}\right]$

= $\frac{\text{هـ(س)} \times \text{دَ(س)} - \text{د(س)} \times \text{هـَ(س)}}{[\text{هـ(س)}]^٢}$

، عند س = ١

∴ $\frac{\text{ء}}{\text{ءس}}\left[\frac{\text{د(س)}}{\text{هـ(س)}}\right]$ = $\frac{\text{هـ}(١) \times \text{دَ}(١) - \text{د}(١) \times \text{هـَ}(١)}{(\text{هـ}(١))^٢}$

= $\frac{١ \times ٤ - ٣ \times ٢}{(١)^٢}$ = −٢

④ ∵ د(س) = $\frac{\text{هـ(س)}}{٢\text{س}^٢ + ٣}$

∴ دَ(س) = $\frac{(٢\text{س}^٢ + ٣) \times \text{هـَ(س)} - \text{هـ(س)} \times ٤\text{س}}{(٢\text{س}^٢ + ٣)^٢}$

∴ دَ(١) = $\frac{٥ \times \text{هـَ}(١) - \text{هـ}(١) \times ٤}{(٥)^٢}$

= $\frac{٥ \times ٦ + ٥ \times ٤}{٢٥}$ = ٢

⑤ دَ(س) = (س − ٢) (س − ٣) + (س − ١) (س − ٣) + (س − ١) (س − ٢)

∵ $\sum_{\text{ك}=١}^{٣}$ دَ(ك)

= دَ(١) + دَ(٢) + دَ(٣)

= (−١) (−٢) + (١) (−١) + (٢) (١) = ٣

إجابات تمارين 12

أولا أسئلة الاختيار من متعدد

① (ج)	② (أ)	③ (ب)	④ (ب)	⑤ (د)
⑥ (أ)	⑦ (ب)	⑧ (ب)	⑨ (أ)	⑩ (ب)
⑪ (ج)	⑫ (ج)	⑬ (أ)	⑭ (ب)	⑮ (ج)
⑯ (ب)	⑰ (د)	⑱ (د)	⑲ (أ)	⑳ (ج)
㉑ (د)	㉒ (ج)	㉓ (ب)	㉔ (أ)	㉕ (ج)
㉖ (د)	㉗ (ب)	㉘ (ج)	㉙ (د)	

ثانيا الأسئلة المقالية

١

① $\frac{\text{ءص}}{\text{ءع}} = ٢\,\text{ع}$ ، $\frac{\text{ءع}}{\text{ءس}} = ٦\,\text{س}$

$\therefore \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{\text{ءص}}{\text{ءع}} \times \frac{\text{ءع}}{\text{ءس}} = ٢\,\text{ع} \times ٦\,\text{س}$

$= ١٢\,\text{س}\,(٣\,\text{س}^٢ - ٢)$

$= ٣٦\,\text{س}^٣ - ٢٤\,\text{س}$

$\therefore \left[\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}\right]_{\text{س} = ٢} = ٣٦\,(٢)^٣ - ٢٤\,(٢) = ٢٤٠$

② $\frac{\text{ءص}}{\text{ءع}} = ٧\,\text{ع}^٦$ ، $\frac{\text{ءع}}{\text{ءس}} = ٣\,\text{س}^٢ + ٤\,\text{س}$

$\therefore \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{\text{ءص}}{\text{ءع}} \times \frac{\text{ءع}}{\text{ءس}}$

$= ٧\,\text{ع}^٦ \times (٣\,\text{س}^٢ + ٤\,\text{س})$

$= ٧\,(٣\,\text{س}^٢ + ٤\,\text{س})\,(\text{س}^٣ + ٢\,\text{س}^٢ - ٤)^٦$

$\therefore \left(\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}\right)_{\text{س} = ١} = ٤٩$

③ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءع}} = ٥\,\text{ع}^٤$ ، $\frac{\text{ءع}}{\text{ءس}} = ٣\,(\text{س} - ١)^٢$

$\therefore \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{\text{ءص}}{\text{ءع}} \times \frac{\text{ءع}}{\text{ءس}} = ٥\,\text{ع}^٤ \times ٣\,(\text{س} - ١)^٢$

$= ٥\,(\text{س} - ١)^{١٢} \times ٣\,(\text{س} - ١)^٢$

$= ١٥\,(\text{س} - ١)^{١٤}$

$\therefore \left[\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}\right]_{\text{س} = ٢} = ١٥\,(٢ - ١)^{١٤} = ١٥$

④ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = ٣\,\text{ع}^٢ + ١$ ، $\frac{\text{ءع}}{\text{ءس}} = ٢\,\text{س} - ١$

$\therefore \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{\text{ءص}}{\text{ءع}} \times \frac{\text{ءع}}{\text{ءس}}$

$= (٣\,\text{ع}^٢ + ١)\,(٢\,\text{س} - ١)$

$= (٢\,\text{س} - ١)\,[٣\,(\text{س}^٢ - \text{س})^٢ + ١]$

$\therefore \left(\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}\right)_{\text{س} = ٠} = -١$

⑤ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءع}} = \frac{١}{٢\sqrt{\text{ع}}}$ ، $\frac{\text{ءع}}{\text{ءس}} = \frac{(\text{س} + ١) - (\text{س} - ٢)}{(\text{س} + ١)^٢}$

$= \frac{٣}{(\text{س} + ١)^٢}$

$\therefore \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{\text{ءص}}{\text{ءع}} \times \frac{\text{ءع}}{\text{ءس}} = \frac{١}{٢\sqrt{\text{ع}}} \times \frac{٣}{(\text{س} + ١)^٢}$

$= \frac{١}{٢\sqrt{\frac{\text{س} - ٢}{\text{س} + ١}}} \times \frac{٣}{(\text{س} + ١)^٢}$

$\therefore \left(\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}\right)_{\text{س} = ٣} = \frac{٣}{١٦}$

⑥ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءع}} = \frac{(\text{ع} + ١) - (\text{ع} - ١)}{(\text{ع} + ١)^٢} = \frac{٢}{(\text{ع} + ١)^٢}$

، $\frac{\text{ءع}}{\text{ءس}} = \frac{(\text{س} - ١) - (\text{س} + ١)}{(\text{س} - ١)^٢} = \frac{-٢}{(\text{س} - ١)^٢}$

$\therefore \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{\text{ءص}}{\text{ءع}} \times \frac{\text{ءع}}{\text{ءس}} = \frac{٢}{(\text{ع} + ١)^٢} \times \frac{-٢}{(\text{س} - ١)^٢}$

$= \frac{٢}{\left(\frac{\text{س} + ١}{\text{س} - ١} + ١\right)^٢} \times \frac{-٢}{(\text{س} - ١)^٢}$

$\therefore \left[\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}\right]_{\text{س} = ٢} = -\frac{١}{٤}$

⑦ $\text{ع} = (\text{س} - ١)^{\frac{٢}{٣}}$

$\therefore \text{ص} = (\text{س} - ١)^{\frac{٤}{٣}} - (\text{س} - ١)^{\frac{٢}{٣}} + ١$

$\therefore \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{٤}{٣}\,(\text{س} - ١)^{\frac{١}{٣}} - \frac{٢}{٣}\,(\text{س} - ١)^{-\frac{١}{٣}}$

$\therefore \left[\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}\right]_{\text{س} = ٢} = \frac{٢}{٣}$

٢

① $\text{ع} = ٥\,\text{س}^{-١}$ $\quad \therefore \text{ص} = ٣ \times ٢٥\,\text{س}^{-٢} - ١$

$\therefore \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = -١٥٠\,\text{س}^{-٣} = \frac{-١٥٠}{\text{س}^٣}$

② $\text{ص} = (\text{س}^٢ - ٣\,\text{س} + ٢)^{\frac{١}{٢}}$

$\therefore \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{١}{٢}\,(\text{س}^٢ - ٣\,\text{س} + ٢)^{-\frac{١}{٢}}\,(٢\,\text{س} - ٣)$

$= \frac{٢\,\text{س} - ٣}{٢\sqrt{\text{س}^٢ - ٣\,\text{س} + ٢}}$

③ $\text{ع} = \frac{١}{\text{س}}$ $\quad \therefore \text{ص} = \frac{١}{\text{س}} + \text{س}$

$\therefore \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{-١}{\text{س}^٢} + ١$

④ $\text{ص} = \frac{٢\,\text{س} + ١}{٢\,\text{س} + ٢} = \frac{٢\,\text{س} + ١}{٢\,(\text{س} + ١)}$

$\therefore \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{٤\,(\text{س} + ١) - ٢\,(٢\,\text{س} + ١)}{٤\,(\text{س} + ١)^٢}$

$= \frac{١}{٢\,(\text{س} + ١)^٢}$

٣

① $\text{ص}' = ١٢\,(\text{س} + ٤)^{١١}$

② $\text{ص}' = -١٥\,(١ - ٣\,\text{س})^٤$

③ $\text{ص}' = ١٢\,\text{س}\,(\text{س}^٢ - ٣)^٥$

④ $\text{ص}' = ٤\,(٣\,\text{س}^٢ - ٤\,\text{س} + ١)^٣\,(٦\,\text{س} - ٤)$

⑤ $\text{ص}' = ١٠\,(٦\,\text{س}^٣ + ٣\,\text{س} + ١)^٩\,(١٨\,\text{س}^٢ + ٣)$

⑥ $\text{ص}' = ٧\left(\text{س}^٢ + \frac{١}{\text{س}^٢}\right)^٦\left(٢\,\text{س} - \frac{٢}{\text{س}^٣}\right)$

⑦ $\because \text{ص} = ٧\,(٣\,\text{س} - ١)^{-٦}$

$\therefore \text{ص}' = ٧ \times -٦\,(٣\,\text{س} - ١)^{-٧} \times ٣$

$= -١٢٦\,(٣\,\text{س} - ١)^{-٧} = \frac{-١٢٦}{(٣\,\text{س} - ١)^٧}$

⑧ $\because \text{ص} = ٧\,(\text{س}^٢ - ٩)^{-٥}$

$\therefore \text{ص}' = -٣٥ \times ٢\,\text{س}\,(\text{س}^٢ - ٩)^{-٦}$

$= \frac{-٧٠\,\text{س}}{(\text{س}^٢ - ٩)^٦}$

٤

① $\text{ص}' = ٧\,\text{س}^٥\,(\text{س} + ٣)^٦ + ٥\,\text{س}^٤\,(\text{س} + ٣)^٧$

$\therefore [\text{ص}']_{\text{س} = -٢} = -١٤٤$

② $\text{ص}' = ٨\,(\text{س} - ٣)\,(\text{س} - ٥)^٧ + (\text{س} - ٥)^٨$

$\therefore [\text{ص}']_{\text{س} = ٤} = -٧$

③ $\because \text{ص} = [(١ - \text{س})\,(١ + \text{س})]^٦ = (١ - \text{س}^٢)^٦$

$\therefore \text{ص}' = ٦\,(١ - \text{س}^٢)^٥ \times (-٢\,\text{س})$

$= -١٢\,\text{س}\,(١ - \text{س}^٢)^٥$

$\therefore [\text{ص}']_{\text{س} = \sqrt{٢}} = ١٢\sqrt{٢}$

④ $\text{ص}' = -٤\,(\text{س}^٢ + ١)^٥\,(\text{س}^٢ - \text{س} + ١)^{-٥}$

$(٢\,\text{س} - ١) + ٥\,(\text{س}^٢ + ١)^٤\,(٢\,\text{س})$

$(\text{س}^٢ - \text{س} + ١)^{-٤}$

$\therefore [\text{ص}']_{\text{س} = ١} = ٣٢$

⑤ $\text{ص}' = ٩\left(\frac{٣\,\text{س} - ٢}{٥\,\text{س} - ٤}\right)^٨$

$\times \frac{٣\,(٥\,\text{س} - ٤) - ٥\,(٣\,\text{س} - ٢)}{(٥\,\text{س} - ٤)^٢}$

$= \frac{-١٨}{(٥\,\text{س} - ٤)^٢} \times \left(\frac{٣\,\text{س} - ٢}{٥\,\text{س} - ٤}\right)^٨$

$\therefore [\text{ص}']_{\text{س} = ١} = -١٨$

⑥ $\text{ص}' = ٥\left(\frac{\text{س}^٢ + ١}{\text{س} - ٣}\right)^٤$

$\left(\frac{٢\,\text{س}\,(\text{س} - ٣) - (\text{س}^٢ + ١)}{(\text{س} - ٣)^٢}\right)$

$= ٥\left(\frac{\text{س}^٢ + ١}{\text{س} - ٣}\right)^٤\left(\frac{\text{س}^٢ - ٦\,\text{س} - ١}{(\text{س} - ٣)^٢}\right)$

$\therefore [\text{ص}']_{\text{س} = ١} = \frac{-١٥}{٢}$

⑦ $\because \text{ص} = \text{س}^٧\,(٣\,\text{س} - ٢)^{-٤}$

$\therefore \text{ص}' = -١٢\,\text{س}^٧\,(٣\,\text{س} - ٢)^{-٥}$

$+ ٧\,\text{س}^٦\,(٣\,\text{س} - ٢)^{-٤}$

$\therefore [\text{ص}']_{\text{س} = ١} = -٥$

⑧ $\because ص = (س - ١)^{٤} (س^{٢} + ١)^{-٥}$

$\therefore صَ = ٤ (س - ١)^{٣} (س^{٢} + ١)^{-٥}$

$- ٥ \times ٢ س (س^{٢} + ١)^{-٦} (س - ١)^{٤}$

$= ٢ (س - ١)^{٣} (س^{٢} + ١)^{-٦}$

$[٢ (س^{٢} + ١) - ٥ س (س - ١)]$

$= ٢ (س - ١)^{٣} (س^{٢} + ١)^{-٦}$

$(-٣ س^{٢} + ٥ س + ٢)$

$\therefore [صَ]_{س = ٠} = -٤$

٥

① $صَ = \frac{س}{\sqrt{س^{٢} + ١}}$

② $\because ص = (٢ س + ١)^{\frac{٥}{٢}}$

$\therefore صَ = \frac{٥}{٢} (٢ س + ١)^{\frac{٢}{٢}} \quad (٢)$

$= \frac{١}{٢} \sqrt[٢]{(٢ س + ١)^{٢}}$

③ $صَ = \frac{-٢ س}{\sqrt{٩ - ٢ س^{٢}}}$

$\therefore [صَ]_{س} = \frac{١}{\sqrt{٢}} = \frac{١}{٢}$

④ $\because ص = (٢ س^{٣} + ٤ س + ٣)^{\frac{٢}{٣}}$

$\therefore صَ = \frac{٢}{٣} (٢ س^{٣} + ٤ س + ٣)^{-\frac{١}{٣}} (٦ س^{٢} + ٤)$

$= \frac{١٢ س^{٢} + ٨}{٣ \sqrt[٣]{٢ س^{٣} + ٤ س + ٣}}$

$\therefore [صَ]_{س = ٢} = \frac{٥٦}{٩}$

⑤ $صَ = س \times \frac{١}{٢ \sqrt{س - ١}} + \sqrt{س - ١}$

$\therefore [صَ]_{س = ٥} = ٢ \frac{١}{٤}$

⑥ $صَ = (س^{٢} - ١) \times \frac{١}{\sqrt{٢ س + ٣}}$

$+ ٢ س \sqrt{٢ س + ٣}$

$\therefore [صَ]_{س = -١} = -٢$

⑦ $\because ص = ٩ س (٥ س^{٢} - ٤)^{-\frac{١}{٢}}$

$\therefore صَ = \frac{-٩}{٢} س (٥ س^{٢} - ٤)^{-\frac{٣}{٢}} \times ١٠ س$

$+ ٩ (٥ س^{٢} - ٤)^{-\frac{١}{٢}}$

$\therefore [صَ]_{س = ١} = -٣٦$

⑧ $\because ص = ٨ س (س - ٢)^{-\frac{١}{٣}}$

$\therefore صَ = \frac{-٨}{٣} س (س - ٢)^{-\frac{٤}{٣}} + ٨ (س - ٢)^{-\frac{١}{٣}}$

$\therefore [صَ]_{س = ٣} = صفر$

٦

① $\frac{ء}{ءس} (ص^{٥}) = ٥ ص^{٤} \frac{ءص}{ءس}$

② $\frac{ء}{ءص} (ص^{٥}) = ٥ ص^{٤}$

③ $\frac{ء}{ءن} (ص^{٥}) = ٥ ص^{٤} \frac{ءص}{ءن}$

④ $\frac{ء}{ءس} (ص^{ن}) = ن ص^{ن - ١} \frac{ءص}{ءس}$

٧

① $\frac{ء}{ءس} \left(س \sqrt{٢ س^{٢} + ١}\right)$

$= س \times \frac{٤ س}{٢ \sqrt{٢ س^{٢} + ١}} + \sqrt{٢ س^{٢} + ١}$

، عند س = ٠ فإن المشتقة تساوى ١

② $\frac{ء}{ءس} \left(\sqrt{س} + \frac{١}{\sqrt{س}}\right)^{٤}$

$= ٤ \left(\sqrt{س} + \frac{١}{\sqrt{س}}\right)^{٣} \left(\frac{١}{٢ \sqrt{س}} - \frac{١}{٢ س \sqrt{س}}\right)$

، عند س = ١ فإن المشتقة تساوى صفر

③ $\frac{ء}{ءس} (س^{٢} + ٢ ص^{٢}) = ٢ س + ٤ ص \frac{ءص}{ءس}$

٨

① $\because ص = (س^{٣} - ٢ س^{٢})^{\frac{١}{٥}}$

$\therefore \frac{ءص}{ءس} = \frac{١}{٥} (س^{٣} - ٢ س^{٢})^{-\frac{٤}{٥}} (٣ س^{٢} - ٤ س)$

$= \frac{٣ س^{٢} - ٤ س}{٥ \sqrt[٥]{(س^{٣} - ٢ س^{٢})^{٤}}}$

② $\because ص = (٣ س^{٢} - ٤)^{\frac{١}{٣}}$

$\therefore \frac{ءص}{ءس} = \frac{١}{٣} (٣ س^{٢} - ٤)^{-\frac{٢}{٣}} (٦ س)$

$\therefore \frac{ءص}{ءس} = \frac{٢ س}{\sqrt[٣]{(٣ س^{٢} - ٤)^{٢}}}$

③ $٨ ص \frac{ءص}{ءس} = ٥ س^{٤} - ٦ س^{٢} + ١$

$\therefore \frac{ءص}{ءس} = \frac{٥ س^{٤} - ٦ س^{٢} + ١}{٨ ص}$

$= \pm \frac{٥ س^{٤} - ٦ س^{٢} + ١}{٤ \sqrt{س^{٥} - ٢ س^{٣} + س}}$

④ $\because ص^{٣} = (س - ٢)^{-٤} \quad \therefore ص = (س - ٢)^{-\frac{٤}{٣}}$

$\therefore \frac{ءص}{ءس} = -\frac{٤}{٣} (س - ٢)^{-\frac{٧}{٣}} = \frac{-٤}{٣ \sqrt[٣]{(س - ٢)^{٧}}}$

⑤ $\frac{٢}{٢ \sqrt{ص}} \times \frac{ءص}{ءس} = ٢ س$

$\therefore \frac{ءص}{ءس} = ٢ س \sqrt{ص} = س (س^{٢} - ٣)$

⑥ $\because ص = (س^{٢} - ٢ س)^{\frac{١}{٣}}$

$\therefore \frac{ءص}{ءس} = \frac{١}{٣} (س^{٢} - ٢ س)^{-\frac{٢}{٣}} \times (٢ س - ٢)$

$= \frac{٢ (س - ١)}{٣ \sqrt[٣]{(س^{٢} - ٢ س)^{٢}}}$

٩

$\frac{ءص}{ءس} = ٢ س ، \frac{ءس}{ءع} = ٣ ع^{٢}$

$\therefore \frac{ءص}{ءع} = \frac{ءص}{ءس} \times \frac{ءس}{ءع} = ٢ س \times ٣ ع^{٢}$

$= ٢ (ع^{٣} - ٢) \times ٣ ع^{٢}$

$= ٦ ع^{٥} - ١٢ ع^{٢}$

$\therefore \frac{ءص}{ءع} + ٤ \frac{ءس}{ءع} = (٦ ع^{٥} - ١٢ ع^{٢}) + ٤ (٣ ع^{٢})$

$= ٦ ع^{٥}$

١٠

$\frac{ءص}{ءع} = ٢ ع + ١ ، \frac{ءع}{ءس} = ٤ س$

$\therefore \frac{ءص}{ءس} = \frac{ءص}{ءع} \times \frac{ءع}{ءس} = ٤ س (٢ ع + ١)$

$= ٤ س (٤ س^{٢} + ١)$

$\therefore \frac{ءص}{ءس} - \frac{ءع}{ءس} = ٤ س (٤ س^{٢} + ١) - ٤ س$

$= ١٦ س^{٣}$

١١

$\frac{ءص}{ءس} = \frac{س}{\sqrt{١ + س^{٢}}} ، \frac{ءع}{ءس} = ٦ س$

$\therefore$ الطرف الأيمن $= ص \times \frac{س}{\sqrt{١ + س^{٢}}} + ٦ س$

$= \sqrt{١ + س^{٢}} \times \frac{س}{\sqrt{١ + س^{٢}}} + ٦ س$

$= ٧ س =$ الطرف الأيسر.

١٢

$\frac{ءص}{ءس} = ٣ (س - ٥)^{٢}$

$\therefore$ الطرف الأيمن $= \left(\frac{ءص}{ءس}\right)^{٣} - ص (س - ٥) \left(\frac{ءص}{ءس}\right)$

$= ٢٧ (س - ٥)^{٦} - ٣ (س - ٥)^{٦}$

$= ٢٤ (س - ٥)^{٦}$

$= ٢٤ ص^{٢} =$ الطرف الأيسر.

١٣

$\because ص^{٣} = س^{٣} - ٨ \qquad \therefore ٣ ص^{٢} \frac{ءص}{ءس} = ٣ س^{٢}$

$\therefore \frac{ءص}{ءس} = \frac{س^{٢}}{ص^{٢}} = \left(\frac{س}{ص}\right)^{٢}$

١٤

بإجراء التفاضل للطرفين

$\therefore ٣ (س + ص)^{٢} \left(١ + \frac{ءص}{ءس}\right) = ٠$

$، \because (س + ص)^{٢} \neq صفر$

$\therefore ١ + \frac{ءص}{ءس} = ٠ \qquad \therefore \frac{ءص}{ءس} = -١$

حل آخر: ∵ $س + ص = ٥^{٢}$

∴ $١ + \frac{دص}{دس} = ٠$ ∴ $\frac{دص}{دس} = -١$

15

$د\bar{}(س) = ٧ (س - ٥)^{٦}$ ∴ $٧ = ٧ (س - ٥)^{٦}$ ∴ $(س - ٥)^{٦} = ١$

∴ $س - ٥ = ١$ ∴ $س = ٦$

أو $س - ٥ = -١$ ∴ $س = ٤$

16

∵ ص = ١ عند س = ٢

∴ $(٢ أ + ب)^{٢} = ١$ (١)

∵ $\frac{دص}{دس} = ٢ أ (أ س + ب)$

∴ $٤ = ٢ أ (٢ أ + ب)$ ∴ $٢ أ + ب = \frac{٢}{أ}$ (٢)

من (١) ، (٢) : ∴ $أ^{٢} = ٤$

∴ أ = ±٢ ، وبالتعويض في (٢) : ∴ ب = ∓٣

17

بفرض حجم الزيت في البرميل ح سم^{٣} ، ارتفاع الزيت بالبرميل ع سم ، الزمن المنقضي ن ثانية

∴ $ح = π (٩٠)^{٢} ع$ ∴ $\frac{دح}{دن} = π (٩٠)^{٢} \frac{دع}{دن}$

∵ $\frac{دح}{دن} = ١٠$ سم^{٣}/ث

معدل ارتفاع الزيت $\left(\frac{دع}{دن}\right) = \frac{١٠}{(٩٠)^{٢} × π}$

$= \frac{١}{٨١٠ π}$ سم/ث

ثالثاً مسائل تقيس مهارات التفكير

1

① (أ) ② (ب) ③ (ب) ④ (ب)

⑤ (أ) ⑥ (د) ⑦ (ب)

إرشادات لحل رقم 1 :

① ∵ $ر(س) = (س^{٢} د(س))^{٢}$

∴ $ر\bar{}(س) = ٢ (س^{٢} د(س)) × [س^{٢} د\bar{}(س) + د(س) × ٢ س]$

∴ $ر\bar{}(٢) = ٨ د(٢) × [٤ د\bar{}(٢) + ٤ د(٢)]$

$= ٨ × ٣ × [٤ × ٣ + ٤ × ٣] = ٥٧٦$

② ∵ د(س) دالة زوجية وليست ثابتة

فإن د(س) = د(−س)

وباشتقاق الطرفين بالنسبة إلى س

∴ $د\bar{}(س) = د\bar{}(-س) × -١$

أي أن : $د\bar{}(س) = -د\bar{}(-س)$

∴ $د\bar{}(س)$ فردية

③ ∵ ص = ٢ س − ٥ وبتبديل المتغيران

∴ س = ٢ ص − ٥ ∴ $ص = \frac{س + ٥}{٢}$

∴ $د^{-١}(س) = \frac{١}{٢} س + \frac{٥}{٢}$

∴ $\frac{د}{دس} [د^{-١}(س)] = \frac{١}{٢}$

④ (د ∘ هـ)(س) = د (هـ(س))

$= د (س + ٢) = (س + ٢)^{٢} + ٢$

∴ $\frac{د}{دس} [(د ∘ هـ)(س)] = ٢ (س + ٢)$

وعند س = ١

∴ $\frac{د}{دس} [(د ∘ هـ)(س)] = ٦$

⑤ ∵ ل(س) = د (ر(س))

∴ $ل\bar{}(س) = د\bar{}(ر(س)) × ر\bar{}(س)$

∴ $ل\bar{}(٥) = د\bar{}(ر(٥)) × ر\bar{}(٥)$

$= د\bar{}(-٢) × ر\bar{}(٥) = ٤ × ٦ = ٢٤$

⑥ ∵ $ص = \sqrt{س + \sqrt{س + \sqrt{س + \sqrt{س + ...}}}}$

بتربيع الطرفين

∴ $ص^{٢} = س + \sqrt{س + \sqrt{س + \sqrt{س + ...}}}$

∴ $ص^{٢} = س + ص$ باشتقاق الطرفين بالنسبة إلى س

∴ $٢ ص \frac{دص}{دس} = ١ + \frac{دص}{دس}$

∴ $٢ ص \frac{دص}{دس} - \frac{دص}{دس} = ١$

∴ $\frac{دص}{دس} (٢ ص - ١) = ١$

∴ $\frac{دص}{دس} = \frac{١}{٢ ص - ١}$

⑦ نفرض أن $ص = س^{٦}$ ، $ع = س^{٣}$

∴ $\frac{دص}{دس} = ٦ س^{٥}$ ، $\frac{دع}{دس} = ٣ س^{٢}$

∵ $\frac{دص}{دس} = \frac{دص}{دع} × \frac{دع}{دس}$

∴ $٦ س^{٥} = \frac{دص}{دع} × ٣ س^{٢}$

∴ $\frac{دص}{دع} = ٢ س^{٣}$

2

∵ $ع ص = \frac{٢ س}{\sqrt{١ + س^{٢}}} × \frac{\sqrt{١ + س^{٢}}}{٥ س}$

∴ $ع ص = \frac{٢}{٥}$ (بالتفاضل بالنسبة لـ س)

∴ $ع \frac{دص}{دس} + ص × \frac{دع}{دس} = ٠$

∴ $ع \frac{دص}{دس} + \frac{٢}{٥ ع} × \frac{دع}{دس} = ٠$

∴ $٥ ع^{٢} \frac{دص}{دس} + ٢ \frac{دع}{دس} = ٠$

3

$\frac{دص}{دس} = ن \left(\frac{س^{٢} - ٢}{س^{٢} + ٢}\right)^{ن-١} × \frac{٢ س (س^{٢} + ٢) - ٢ س (س^{٢} - ٢)}{(س^{٢} + ٢)^{٢}}$

$= \frac{٨ ن س}{(س^{٢} + ٢)^{٢}} × \left(\frac{س^{٢} - ٢}{س^{٢} + ٢}\right)^{ن-١}$

$= \frac{٨ ن س}{(س^{٢} - ٢)(س^{٢} + ٢)} × \left(\frac{س^{٢} - ٢}{س^{٢} + ٢}\right)^{ن}$

$= \frac{٨ ن س}{س^{٤} - ٤}$

4

∵ $\sqrt{س} + \sqrt{ص} = \frac{٢}{٥}$

∴ $\frac{١}{٢ \sqrt{س}} + \frac{١}{٢ \sqrt{ص}} × \frac{دص}{دس} = ٠$

∴ $\frac{دص}{دس} = -\frac{\sqrt{ص}}{\sqrt{س}}$ ∴ $\left(\frac{دص}{دس}\right)^{٢} = \frac{ص}{س}$

إجابات تمارين 13

أولاً أسئلة الاختيار من متعدد

① (ج)	② (ب)	③ (ب)	④ (ج)	⑤ (ج)
⑥ (ج)	⑦ (ب)	⑧ (أ)	⑨ (د)	⑩ (ب)
⑪ (ج)	⑫ (د)	⑬ (ج)	⑭ (ب)	⑮ (د)
⑯ (ج)	⑰ (ب)	⑱ (أ)	⑲ (ج)	⑳ (د)
(21) (ج)	(22) (د)	(23) (ج)	(24) (أ)	(25) (ب)
(26) (ج)	(27) (ج)	(28) (ب)	(29) (أ)	(30) (ج)
(31) (ب)	(32) (ب)	(33) (ج)	(34) (د)	(35) (ب)
(36) (ج)	(37) (د)	(38) (د)	(39) (ب)	(40) (أ)
(41) (ج)	(42) (د)	(43) (ج)	(44) (أ)	(45) (د)
(46) (أ)	(47) (أ)			

ثانياً الأسئلة المقالية

1

① $\frac{دص}{دس} = -٥ π$ جا $(٣ - π س)$

② $\frac{دص}{دس} = -٥$ جا $(٥ س + ٣)$

③ $\frac{دص}{دس} = ٦$ قا^{٢} $(٢ س + ٣)$

④ $\frac{دص}{دس} = -١٠ س$ قا^{٢} $(-٥ س^{٢} + ١٩)$

⑤ $\frac{دص}{دس} = ١٢ س$ جا $(٤ - ٣ س^{٢})$

⑥ $\frac{دص}{دس} = ١ - ٢$ جا ٢ س + ٥ قا^{٢} ٥ س

⑦ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = -7\,\text{جتا س}$

⑧ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = -2\,\text{جا}\,(2\text{س} - 1) - 5\,\text{جتا}\,(4 - 5\text{س})$

⑨ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{1}{2\sqrt{\text{س}}}\,\text{قا}^2\left(\sqrt{\text{س}}\right)$

⑩ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{-2}{\text{س}^3}\,\text{جتا}\left(\frac{1}{\text{س}^2}\right)$

٢

① $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = 2\text{س}\,\text{جتا}\,(3\text{س} - 2) + \text{جا}\,(3\text{س} - 2)$

② $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = 2\text{س}^2\,\text{جتا}\,2\text{س} + 2\text{س}\,\text{جا}\,2\text{س}$

③ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = 2\text{س}\,\text{قا}^2\,(2\text{س}) + \text{ظا}\,(2\text{س}) - \text{جا س}$

④ $\text{ص}' = \text{س جتا س} + \text{جا س} + \frac{1}{2\sqrt{\text{س}}}$

⑤ $\text{ص}' = -6\,\text{جا}\,3\text{س}\,\text{جا}\,2\text{س} + 4\,\text{جتا}\,2\text{س}\,\text{جتا}\,3\text{س}$

⑥ $\because \text{ص} = \text{جا}\,(4\text{س} + 2)$

$\therefore \text{ص}' = 4\,\text{جتا}\,(4\text{س} + 2)$

⑦ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = 4\text{س}^3\,\text{جتا}\,(2\text{س}^2 + 5)$

$+ 2\text{س}\,\text{جا}\,(2\text{س}^2 + 5)$

⑧ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{\text{س}\,\text{قا}^2\,\text{س} - \text{ظا س}}{\text{س}^2}$

⑨ $\because \text{ص} = \frac{2\,\text{جا س جتا س}}{\text{جتا س}} = 2\,\text{جا س}$

$\therefore \text{ص}' = 2\,\text{جتا س}$

⑩ $\because \text{ص} = \frac{1 + 2\,\text{جتا}^2\,\text{س} - 1}{1 - 1 + 2\,\text{جا}^2\,\text{س}} = \frac{\text{جتا}^2\,\text{س}}{\text{جا}^2\,\text{س}}$

$\therefore \text{ص}' = \frac{\text{جا}^2\,\text{س} \times 2\,\text{جتا س} \times -\text{جا س} - \text{جتا}^2\,\text{س} \times 2 \times \text{جا س} \times \text{جتا س}}{\text{جا}^4\,\text{س}}$

$= \frac{-2\,\text{جا}^3\,\text{س جتا س} - 2\,\text{جتا}^3\,\text{س جا س}}{\text{جا}^4\,\text{س}}$

$= \frac{-2\,\text{جا س جتا س}\,(\text{جا}^2\,\text{س} + \text{جتا}^2\,\text{س})}{\text{جا}^4\,\text{س}}$

$= \frac{-2\,\text{جتا س}}{\text{جا}^3\,\text{س}}$

حل آخر : $\because \text{ص} = \frac{\text{جتا}^2\,\text{س}}{\text{جا}^2\,\text{س}} = \frac{1}{\text{ظا}^2\,\text{س}}$

$\therefore \text{ص}' = \frac{-2\,\text{ظا س}\,\text{قا}^2\,\text{س}}{\text{ظا}^4\,\text{س}} = \frac{-2\,\text{قا}^2\,\text{س}}{\text{ظا}^3\,\text{س}}$

$= \frac{-2\,\text{جتا س}}{\text{جا}^3\,\text{س}}$

⑪ $\because \text{ص} = \text{ظتا س} = \frac{\text{جتا س}}{\text{جا س}}$

$\therefore \text{ص}' = \frac{-\text{جا}^2\,\text{س} - \text{جتا}^2\,\text{س}}{\text{جا}^2\,\text{س}} = \frac{-(\text{جا}^2\,\text{س} + \text{جتا}^2\,\text{س})}{\text{جا}^2\,\text{س}}$

$= \frac{-1}{\text{جا}^2\,\text{س}} = -\text{قتا}^2\,\text{س}$

⑫ $\because \text{ص} = \text{قتا س} = \frac{1}{\text{جا س}}$

$\therefore \text{ص}' = \frac{-\text{جتا س}}{\text{جا}^2\,\text{س}} = -\text{ظتا س قتا س}$

٣

① $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = 4 \times (\text{ظا}^3\,\tfrac{1}{2}\text{س}) \times (\text{قا}^2\,\tfrac{1}{2}\text{س}) \times \frac{1}{2}$

$= 2\,(\text{ظا}^3\,\tfrac{1}{2}\text{س})\,(\text{قا}^2\,\tfrac{1}{2}\text{س})$

② $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = 2 \times [\text{جتا}\,(4\text{س}^2 - 7)]$

$\times [-\text{جا}\,(4\text{س}^2 - 7)] \times 8\text{س}$

$= -16\text{س} \times \text{جتا}\,(4\text{س}^2 - 7)$

$\times\,\text{جا}\,(4\text{س}^2 - 7)$

③ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = 20\,\text{جتا}^4\,\text{س} \times -\text{جا س}$

$= -20\,\text{جا س}\,\text{جتا}^4\,\text{س}$

④ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = 3\,\text{جتا}^2\left(\frac{\text{س}}{\text{س} + 1}\right) \times -\text{جا}\left(\frac{\text{س}}{\text{س} + 1}\right)$

$\times \left(\frac{\text{س} + 1 - \text{س}}{(\text{س} + 1)^2}\right)$

$= \frac{-3}{(\text{س} + 1)^2} \times \text{جتا}^2\left(\frac{\text{س}}{\text{س} + 1}\right)\text{جا}\left(\frac{\text{س}}{\text{س} + 1}\right)$

⑤ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = 3\,\text{ظا}^2\,(4\text{س} - 7 - 2\text{س}^3)$

$\times\,\text{قا}^2\,(4\text{س} - 7 - 2\text{س}^3) \times (4 - 6\text{س}^2)$

$= 6\,(2 - 3\text{س}^2) \times \text{ظا}^2\,(4\text{س} - 7 - 2\text{س}^3)$

$\times\,\text{قا}^2\,(4\text{س} - 7 - 2\text{س}^3)$

⑥ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \text{س} \times \frac{\text{جتا س}}{2\sqrt{\text{جا س}}} + \sqrt{\text{جا س}}$

$= \frac{\text{س جتا س} + 2\,\text{جا س}}{2\sqrt{\text{جا س}}}$

⑦ $\because \text{ص} = 2\,\text{جتا س}\,\text{جتا}\,\frac{\text{س}}{2}\,\text{جا}\,\frac{\text{س}}{2}$

$= \text{جتا س جا س} = \frac{1}{2}\,\text{جا}\,2\text{س}$

$\therefore \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \text{جتا}\,2\text{س}$

⑧ $\because \text{ص} = \frac{\text{جا}\,2\text{س}}{1 - \text{جتا}\,2\text{س}} = \frac{2\,\text{جا س جتا س}}{2\,\text{جا}^2\,\text{س}} = \frac{\text{جتا س}}{\text{جا س}}$

$\therefore \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{-\text{جا}^2\,\text{س} - \text{جتا}^2\,\text{س}}{\text{جا}^2\,\text{س}} = \frac{-1}{\text{جا}^2\,\text{س}}$

$= -\text{قتا}^2\,\text{س}$

⑨ $\because \text{س} = \text{ص جتا س} \qquad \therefore \text{ص} = \frac{\text{س}}{\text{جتا س}}$

$\therefore \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{\text{جتا س} + \text{س جا س}}{\text{جتا}^2\,\text{س}}$

⑩ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \text{س}^5\left(-\text{جا}\,\frac{\pi}{\text{س}}\right)\left(\frac{-\pi}{\text{س}^2}\right) + 5\text{س}^4\,\text{جتا}\,\frac{\pi}{\text{س}}$

$= \pi\,\text{س}^3\,\text{جا}\,\frac{\pi}{\text{س}} + 5\text{س}^4\,\text{جتا}\,\frac{\pi}{\text{س}}$

⑪ $\because \text{س}^2 = \text{ص قا}\,(3\text{س} - 2)$

$\therefore \text{ص} = \frac{\text{س}^2}{\text{قا}\,(3\text{س} - 2)} = \text{س}^2\,\text{جتا}\,(3\text{س} - 2)$

$\therefore \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = 2\text{س}\,\text{جتا}\,(3\text{س} - 2)$

$- 3\text{س}^2 \times \text{جا}\,(3\text{س} - 2)$

⑫ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = -\text{جا}\,(\text{جتا س}) \times -\text{جا س}$

$= \text{جا س جا}\,(\text{جتا س})$

⑬ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \text{جتا}\,(\text{ظا}\,3\text{س}) \times (\text{قا}^2\,3\text{س}) \times 3$

⑭ $\because \text{ص} = \text{قا}^2\,\text{س} - 1 = \text{ظا}^2\,\text{س}$

$\therefore \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = 2\,(\text{ظا س})\,(\text{قا}^2\,\text{س})$

⑮ $\because \text{ص} = (\text{ظا س})^{\frac{5}{2}}$

$\therefore \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{5}{2}\,(\text{ظا س})^{\frac{3}{2}}\,\text{قا}^2\,\text{س}$

$= \frac{5}{2}\sqrt{\text{ظا}^3\,\text{س}}\,\text{قا}^2\,\text{س}$

⑯ $\text{ص} = \text{ظا}\left(\text{س} + \frac{\pi}{4}\right)$

$\therefore \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \text{قا}^2\left(\text{س} + \frac{\pi}{4}\right)$

٤

① $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = -\text{جا}\,2\text{س}\,\text{جا س} + 2\,\text{جتا}\,2\text{س}\,\text{جتا س}$

$\therefore \left[\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}\right]_{\text{س}=\pi} = -2$

② $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = -\frac{\pi}{8}\,(\text{س} - 5)\,\text{جا}\,\frac{\pi\text{س}}{8} + \text{جتا}\,\frac{\pi\text{س}}{8}$

$\therefore \left[\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}\right]_{\text{س}=4} = \frac{\pi}{8}$

③ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = 4\,\text{جا س} \times \text{قا}^2\,4\text{س} + \text{ظا}\,4\text{س}\,\text{جتا س}$

$\therefore \left[\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}\right]_{\text{س}=\frac{\pi}{4}} = 2\sqrt{2}$

④ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{-\text{جا س}}{2\sqrt{1 + \text{جتا س}}}$

$\therefore \left[\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}\right]_{\text{س}=\frac{\pi}{2}} = -\frac{1}{2}$

⑤ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{3\text{س}^2\,\text{جتا س} + \text{س}^3\,\text{جا س}}{\text{جتا}^2\,\text{س}}$

$\therefore \left[\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}\right]_{\text{س}=\pi} = -3\pi^2$

⑥ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{-6\,(\text{س} + 1)\,\text{جا}\,3\text{س} - 2\,\text{جتا}\,3\text{س}}{(\text{س} + 1)^2}$

$\therefore \left[\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}\right]_{\text{س}=0} = -2$

⑦ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \text{جا س}\,(1 + \text{جا س}) + \text{جتا س}\,(1 - \text{جتا س})$

$\therefore \left[\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}\right]_{\text{س}=\pi} = -2$

⑧ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = 4\,(\text{جا}\,2\text{س} - \text{جتا}\,4\text{س})^3$

$(2\,\text{جتا}\,2\text{س} + 4\,\text{جا}\,4\text{س})$

$\therefore \left[\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}\right]_{\text{س}=\text{صفر}} = -8$

٥

$\because \text{ص} = 2\text{س}\,\text{جا س جتا س} = \text{س جا}\,2\text{س}$

$\therefore \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \text{جا}\,2\text{س} + 2\text{س}\,\text{جتا}\,2\text{س}$

٦

$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \text{س جتاس} + \text{جاس}$

∴ الطرف الأيمن $= \text{س} \left(\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} - \text{س جتاس}\right)$

$= \text{س} (\text{س جتاس} + \text{جاس} - \text{س جتاس}) = \text{س جاس}$

$=$ ص $=$ الطرف الأيسر.

٧

$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = -\text{جتا}^{٢}\text{س جاس} + \text{جاس}$

$= \text{جاس} (١ - \text{جتا}^{٢}\text{س})$

$= \text{جاس جا}^{٢}\text{س} = \text{جا}^{٣}\text{س}$

٨

$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{(١ + \text{جتاس})\,\text{جتاس} + (\text{جا}^{٢}\text{س})}{(١ + \text{جتاس})^{٢}}$

$= \frac{\text{جتاس} + \text{جتا}^{٢}\text{س} + \text{جا}^{٢}\text{س}}{(١ + \text{جتاس})^{٢}} = \frac{١ + \text{جتاس}}{(١ + \text{جتاس})^{٢}}$

$= \frac{١}{١ + \text{جتاس}}$

∴ $(١ + \text{جتاس}) \left(\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}\right) = ١$

٩

$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{\text{جتاس} (\text{جاس} + \text{جتاس}) - \text{جاس} (\text{جتاس} - \text{جاس})}{(\text{جاس} + \text{جتاس})^{٢}}$

$= \frac{\text{جتا}^{٢}\text{س} + \text{جا}^{٢}\text{س}}{\text{جا}^{٢}\text{س} + \text{جتا}^{٢}\text{س} + ٢\,\text{جاس جتاس}} = \frac{١}{١ + \text{جا}\,٢\text{س}}$

١٠

$\text{ص} = \frac{\text{ظا}\,٤٥^{\circ} + \text{ظاس}}{١ - \text{ظا}\,٤٥^{\circ}\,\text{ظاس}} = \text{ظا} (٤٥^{\circ} + \text{س})$

∴ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \text{قا}^{٢} (٤٥^{\circ} + \text{س})$

١١

$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{\text{جتاس} (١ + \text{جاس}) - \text{جتاس جاس}}{(١ + \text{جاس})^{٢}}$

$= \frac{\text{جتاس}}{(١ + \text{جاس})^{٢}}$

∴ الطرف الأيمن $= \frac{١}{\text{ص}^{٢}} \times \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$

$= \left(\frac{١ + \text{جاس}}{\text{جاس}}\right)^{٢} \times \frac{\text{جتاس}}{(١ + \text{جاس})^{٢}}$

$= \frac{\text{جتاس}}{\text{جا}^{٢}\text{س}} = \frac{\text{جتاس}}{\text{جاس}} \times \frac{١}{\text{جاس}}$

$=$ ظتاس قتاس $=$ الطرف الأيسر.

حل آخر :

∵ $\text{ص} = \frac{\text{جاس}}{١ + \text{جاس}}$

∴ $\text{ص}^{-١} = \frac{١ + \text{جاس}}{\text{جاس}} = \frac{١}{\text{جاس}} + ١$

∴ $-\text{ص}^{-٢} \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{-\text{جتاس}}{\text{جا}^{٢}\text{س}}$

∴ $\frac{١}{\text{ص}^{٢}} \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{\text{جتاس}}{\text{جاس}} \times \frac{١}{\text{جاس}} = \text{ظتاس قتاس}$

١٢

∵ $\text{ص} = \frac{١ + \text{جا}^{٢}\text{س}}{١ - \text{جا}^{٢}\text{س}} = \frac{١ + \text{جا}^{٢}\text{س}}{\text{جتا}^{٢}\text{س}}$

$= \frac{١}{\text{جتا}^{٢}\text{س}} + \text{ظا}^{٢}\text{س} = (\text{جتاس})^{-٢} + \text{ظا}^{٢}\text{س}$

∴ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = -٢ (\text{جتاس})^{-٣} \times -\text{جاس} + ٢\,\text{ظاس قا}^{٢}\text{س}$

$= ٢\,\text{قا}^{٢}\text{س ظاس} + ٢\,\text{ظاس قا}^{٢}\text{س}$

$= ٤\,\text{ظاس قا}^{٢}\text{س}$

١٣

بالاشتقاق بالنسبة لـ س ∴ $٢ + \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = ٢\,\text{جتا}\,٢\text{س}$

∴ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} + ٢ (١ - \text{جتا}\,٢\text{س}) = ٠$

∴ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} + ٢ (١ - ١ + ٢\,\text{جا}^{٢}\text{س}) = ٠$

∴ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} + ٤\,\text{جا}^{٢}\text{س} = ٠$

١٤

$\text{ص}' = \text{جتاس} - \text{جاس}$

∴ $(\text{ص}')^{٢} + \text{ص}^{٢} = \text{جتا}^{٢}\text{س} + \text{جا}^{٢}\text{س} - ٢\,\text{جاس جتاس}$

$+ \text{جا}^{٢}\text{س} + \text{جتا}^{٢}\text{س} + ٢\,\text{جاس جتاس}$

$= ١ + ١ = ٢$

١٥

نفرض أن (س) هو قياس الزاوية بالتقدير الستينى ، (هـ) هو قياس نفس الزاوية بالتقدير الدائرى

، ∵ ص $=$ جاس

∴ $\text{ص} = \text{جا هـ} ،\ \text{هـ} = \text{س} \times \frac{\pi}{١٨٠}$

∴ $\frac{\text{ءهـ}}{\text{ءس}} = \frac{\pi}{١٨٠}$

، ∵ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{\text{ءص}}{\text{ءهـ}} \times \frac{\text{ءهـ}}{\text{ءس}}$

∴ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \text{جتا هـ} \times \frac{\pi}{١٨٠} = \frac{\pi}{١٨٠}\,\text{جتاس}$

١٦

① $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = ٢\,\text{جاس جتاس} + ٢\,\text{جا}\,٢\text{س} - ٤$

$= \text{جا}\,٢\text{س} + ٢\,\text{جا}\,٢\text{س} - ٤$

$= ٣\,\text{جا}\,٢\text{س} - ٤$

② $٣\,\text{جا}\,٢\text{س} - ٤ = -١$ ∴ $\text{جا}\,٢\text{س} = ١$

∴ $٢\text{س} = \frac{\pi}{٢}$ ∴ $\text{س} = \frac{\pi}{٤}$

١٧

$\text{ص} = \frac{١}{\text{جتا}\,٤\text{س}}$ ∴ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{٤\,\text{جا}\,٤\text{س}}{\text{جتا}^{٢}\,٤\text{س}}$

∴ $\left[\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}\right]_{\text{س} = \frac{\pi}{٤}} =$ صفر

١٨

① $\frac{\text{ء}}{\text{ءس}} (\text{جا}^{٢}\text{س}) = \frac{\text{ء}}{\text{ءس}} (١ - \text{جتا}^{٢}\text{س})$

$=$ صفر $- \frac{\text{ء}}{\text{ءس}} (\text{جتا}^{٢}\text{س})$

$= -\frac{\text{ء}}{\text{ءس}} (\text{جتا}^{٢}\text{س})$

② الطرف الأيمن $= \frac{\text{ء}}{\text{ءس}} (\text{جا}^{٢}\text{س} + \text{جتا}^{٢}\text{س})$

$= \frac{\text{ء}}{\text{ءس}} (١) =$ صفر

، الطرف الأيسر $= \frac{\text{ء}}{\text{ءس}} (\text{قا}^{٢}\text{س} - \text{ظا}^{٢}\text{س})$

$= \frac{\text{ء}}{\text{ءس}} (١) =$ صفر

∴ الطرفان متساويان.

③ $\frac{\text{ء}}{\text{ءس}} \left(\frac{١}{٢}\,\text{ظاس جا}\,٢\text{س}\right)$

$= \frac{\text{ء}}{\text{ءس}} \left(\frac{١}{٢} \times \frac{\text{جاس}}{\text{جتاس}} \times ٢\,\text{جاس جتاس}\right)$

$= \frac{\text{ء}}{\text{ءس}} (\text{جا}^{٢}\text{س}) = ٢\,\text{جاس جتاس} = \text{جا}\,٢\text{س}$

١٩

① $\frac{\text{ءص}}{\text{ءع}} = ١ - \text{جتا ع} ،\ \frac{\text{ءع}}{\text{ءس}} = ٥$

∴ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{\text{ءص}}{\text{ءع}} \times \frac{\text{ءع}}{\text{ءس}} = ٥ (١ - \text{جتا ع})$

$= ٥ [١ - \text{جتا} (٥\text{س} + \pi)]$

∴ $\left[\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}\right]_{\text{س} = ٠} = ١٠$

② $\frac{\text{ءص}}{\text{ءع}} = ١٥ (٣\text{ع} + ١)^{٤} ،\ \frac{\text{ءع}}{\text{ءس}} = \frac{-٢}{٣}\,\text{جا}\,٢\text{س}$

∴ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{\text{ءص}}{\text{ءع}} \times \frac{\text{ءع}}{\text{ءس}} = -١٠\,\text{جا}\,٢\text{س} (\text{جتا}\,٢\text{س} + ١)^{٤}$

∴ $\left[\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}\right]_{\text{س} = \frac{\pi}{٤}} = -١٠$

③ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءع}} = \frac{-١}{\sqrt{٤ - ٢\text{ع}}} ،\ \frac{\text{ءع}}{\text{ءس}} = ٢\,\text{قا}^{٢}\,٢\text{س}$

∴ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{\text{ءص}}{\text{ءع}} \times \frac{\text{ءع}}{\text{ءس}} = \frac{-٢\,\text{قا}^{٢}\,٢\text{س}}{\sqrt{٤ - ٢\,\text{ظا}\,٢\text{س}}}$

∴ $\left[\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}\right]_{\text{س} = \frac{\pi}{٨}} = -٢\sqrt{٢}$

ثالثاً مسائل تقيس مهارات التفكير

١

① (د)	② (ب)	③ (ب)
④ (جـ)	⑤ (د)	⑥ (جـ)

إرشادات لحل رقم ١ :

① ∵ $\text{جاس جتاص} - \text{جاص جتاس} = \frac{١}{٢}$

∴ $\text{جا} (\text{س} - \text{ص}) = \frac{١}{٢}$ ∴ س $-$ ص $=$ ثابت

∴ $١ - \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} =$ صفر ∴ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = ١$

② ∵ $\text{ص} = \frac{٢\,\text{ظاس}}{١ - \text{ظا}^{٢}\text{س}} = \text{ظا}\,٢\text{س}$

∴ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = ٢\,\text{قا}^{٢}\,٢\text{س}$

③ $\frac{د}{د س}$ [س^{٢} + $\frac{د}{د س}$ (س + جاس)]

= $\frac{د}{د س}$ [س^{٢} + ١ + جتاس] = ٢ س − جاس

④ نهـا (س ← أ) $\frac{جاس − جا أ}{س − أ}$ = دَ (أ) حيث د (س) = جاس

∴ دَ (س) = جتاس ∴ دَ (أ) = جتا أ

∴ نهـا (س ← أ) $\frac{جاس − جا أ}{س − أ}$ = جتا أ

⑤ نهـا (هـ ← ٠) $\frac{جا (\frac{\pi}{٤} + هـ) − جا (\frac{\pi}{٤})}{هـ}$ = دَ $(\frac{\pi}{٤})$

حيث د (س) = جاس

، ∵ دَ (س) = جتاس

∴ دَ $(\frac{\pi}{٤})$ = جتا $\frac{\pi}{٤}$ ∴ قيمة النهاية = جتا $\frac{\pi}{٤}$

⑥ ∵ ص = جا $\sqrt{س}$

∴ $\frac{دص}{دس}$ = − (جا $\sqrt{س}$) × $\frac{١}{٢ \sqrt{س}}$ = $\frac{− جا \sqrt{س}}{٢ \sqrt{س}}$

∴ نهـا (س ← ٠) $(\frac{دص}{دس})$ = نهـا (س ← ٠) $\frac{− جا \sqrt{س}}{٢ \sqrt{س}}$ = $\frac{−١}{٢}$

٢

∵ ص = (ع^{٢} − ١)^{٢} = (جا^{٢} ٤ س − ١)^{٢}

= (− جتا^{٢} ٤ س)^{٢} = جتا^{٤} ٤ س

∴ $\frac{دص}{دس}$ = ٤ جتا^{٣} ٤ س × (−٤ جا ٤ س)

= −١٦ جتا^{٣} ٤ س جا ٤ س

= −١٦ جتا^{٤} ٤ س ظا ٤ س

= −١٦ ص ظا ٤ س

∴ $\frac{دص}{دس}$ + ١٦ ص ظا ٤ س = صفر

٣

① $\frac{دص}{د\theta}$ = $\frac{− م د (م جتا \theta − جا \theta)}{(م جا \theta + جتا \theta)^{٢}}$

② عندما $\frac{دص}{د\theta}$ = ٠ ∴ م جتا θ − جا θ = ٠

∴ م جتا θ = جا θ ∴ م = $\frac{جا \theta}{جتا \theta}$ = ظا θ

إجابات تمارين 14

أولاً أسئلة الاختيار من متعدد

① (د)	② (ب)	③ (جـ)	④ (د)	⑤ (ب)
⑥ (ب)	⑦ (جـ)	⑧ (جـ)	⑨ (أ)	⑩ (أ)
⑪ (د)	⑫ (د)	⑬ (ب)	⑭ (ب)	⑮ (د)
⑯ (جـ)	⑰ (ب)	⑱ (ب)	⑲ (د)	⑳ (أ)
㉑ (جـ)	㉒ (ب)	㉓ (د)	㉔ (جـ)	㉕ (د)
㉖ (ب)	㉗ (جـ)	㉘ (ب)	㉙ (ب)	㉚ (د)
㉛ (د)	㉜ (ب)	㉝ (د)	㉞ (ب)	㉟ (جـ)
㊱ (ب)	㊲ (أ)	㊳ (جـ)	㊴ (ب)	㊵ (ب)
㊶ (د)	㊷ (د)	㊸ (د)	㊹ (جـ)	㊺ (أ)
㊻ (ب)	㊼ (جـ)	㊽ (ب)	㊾ (جـ)	㊿ (جـ)
(٥١) (ب)				

ثانياً الأسئلة المقالية

١

① صَ = $\frac{−٣ (س − ٢) − (١ − ٣ س)}{(س − ٢)^{٢}}$ = $\frac{٣}{(س − ٢)^{٢}}$

∴ [صَ]$_{س = ١}$ = ٣ ∴ ميل المماس = ٣

② صَ = − جتاس ∴ [صَ]$_{س = \frac{\pi}{٤}}$ = $-\frac{١}{\sqrt{٢}}$

∴ ميل المماس = $-\frac{١}{\sqrt{٢}}$

③ صَ = س × $\frac{جتاس}{٢ \sqrt{جاس}}$ + $\sqrt{جاس}$

∴ [صَ]$_{س = \frac{\pi}{٢}}$ = ١ ∴ ميل المماس = ١

٢

① صَ = ٦ س^{٢} − ٦ س − ١٢

∴ [صَ]$_{س = −٢}$ = ٢٤

∴ ميل العمودى = $-\frac{١}{٢٤}$

② صَ = $-\frac{٢}{٣}$ قا^{٢} (π − $\frac{٢}{٣}$ س)

∴ [صَ]$_{س = \pi}$ = $-\frac{٨}{٣}$

∴ ميل العمودى = $\frac{٣}{٨}$

③ ص = س^{٢} (س^{٢} − $\frac{٤}{س^{٢}}$) = س^{٤} − ٤

∴ صَ = ٤ س^{٣} ∴ [صَ]$_{س = ٢}$ = ٣٢

∴ ميل العمودى = $-\frac{١}{٣٢}$

٣

لإيجاد نقط التقاطع مع محور السينات : نضع ص = ٠

∴ (س + ٢) (س^{٢} + ١) = ٠

∴ س = −٢ أ، س = −١

∴ نقط التقاطع هى : (−٢ ، ٠) ، (−١ ، ٠)

، ∵ صَ = ٣ س^{٢} (س + ٢) + (س^{٣} + ١)

∴ [صَ]$_{س = −٢}$ = −٧ ، [صَ]$_{س = −١}$ = ٣

∴ ميل المماس = −٧ عند النقطة (−٢ ، ٠)

، ميل المماس = ٣ عند النقطة (−١ ، ٠)

٤

لإيجاد نقط التقاطع مع محور الصادات : نضع س = ٠

∴ د (٠) = −١

∴ نقطة التقاطع هى (٠ ، −١)

، ∵ دَ (س) = ٣ س^{٢} − ٤ س + ٣

∴ [دَ (س)]$_{س = ٠}$ = ٣

∴ ميل المماس = ٣ عند النقطة (٠ ، −١)

٥

① صَ = ٢ س − $\frac{١}{س^{٢}}$

∴ [صَ]$_{س = ١}$ = ١ ∴ ظا هـ = ١

∴ هـ = ٤٥°

② عند س = −٢

∴ ص = − س^{٣} − ٢ ∴ صَ = −٣ س^{٢}

∴ [صَ]$_{س = −٢}$ = −١٢ ∴ ظا هـ = −١٢

∴ هـ = ٩٤ َ ٤٥ َ ٤٩ °٩٤

٦

صَ = ٣ س^{٢} − ١٢ س − ١٥

، ∵ المماس يوازى محور السينات. ∴ صَ = ٠

∴ ٣ س^{٢} − ١٢ س − ١٥ = ٠

∴ س^{٢} − ٤ س − ٥ = ٠

∴ (س − ٥) (س + ١) = صفر

∴ س = ٥ وعندها ص = −٨٠

أ، س = −١ وعندها ص = ٢٨

∴ النقط هى (٥ ، −٨٠) ، (−١ ، ٢٨)

٧

صَ = ٢ س (س − ٢) + (س^{٢} + ٢)

= ٣ س^{٢} − ٦ س + ٢

∴ ٣ س^{٢} − ٦ س + ٢ = ١١

∴ ٣ س^{٢} − ٦ س − ٩ = ٠

∴ س^{٢} − ٢ س − ٣ = ٠

∴ (س − ٣) (س + ١) = ٠

∴ س = ٣ وعندها ص = صفر

أ، س = −١ وعندها ص = −١٢

∴ النقط هى (٣ ، ٠) ، (−١ ، −١٢)

٨

صَ = ٢ س − ٢

① ∵ المستقيم يوازى محور السينات

∴ صَ = ٠ ∴ ٢ س − ٢ = ٠

∴ س = ١

وعندها ص = ٢ ∴ النقطة هى (١ ، ٢)

② ∵ ميل المستقيم المعطى = ١/٤

∴ ميل العمودي = −٤

∴ صَ = −٤ ∴ ٢ س − ٢ = −٤

∴ س = −١ وعندها ص = ٦

∴ النقطة هي (−١ ، ٦)

٩

صَ = ٣ س² − ٦ س − ٥

، ميل المستقيم المار بالنقطتين (٣ ، ١) ، (٥ ، ٩)

= (٩ − ١)/(٥ − ٣) = ٤

∴ ٣ س² − ٦ س − ٥ = ٤

∴ ٣ س² − ٦ س − ٩ = ٠

∴ س² − ٢ س − ٣ = ٠

∴ (س − ٣) (س + ١) = ٠

∴ س = ٣ ومنها ص = −٣ أ، س = −١ ومنها ص = ١٢

∴ النقط هي : (٣ ، −٣) ، (−١ ، ١٢)

١٠

صَ = [(س + ٢) − (س − ٢)]/(س + ٢)² = ٤/(س + ٢)²

، ∵ ظا π/٤ = ١ ∴ ٤/(س + ٢)² = ١

∴ (س + ٢)² = ٤ ∴ س + ٢ = ±٢

∴ س = ٠ وعندها ص = −١

أ، س = −٤ وعندها ص = ٣

∴ النقط هي (٠ ، −١) ، (−٤ ، ٣)

١١

صَ = ٩ س² − ١١

① ميل المستقيم المعطى = −٢

∴ ٩ س² − ١١ = −٢ ∴ س² = ١

∴ س = ١ وعندها ص = −٣

أ، س = −١ وعندها ص = ١٣

∴ النقط هي (١ ، −٣) ، (−١ ، ١٣)

② ميل المستقيم المعطى = −١/٢٥

∴ ميل العمودي = ٢٥

∴ ٩ س² − ١١ = ٢٥ ∴ س² = ٤

∴ س = ٢ وعندها ص = ٧

أ، س = −٢ وعندها ص = ٣

∴ النقط هي (٢ ، ٧) ، (−٢ ، ٣)

③ ∵ ظاهـ = −١١

∴ ٩ س² − ١١ = −١١

∴ س = ٠ وعندها ص = ٥

∴ النقطة هي (٠ ، ٥)

١٢

① صَ = ٩ س² − ١٤ س + ١

∴ ميل المماس عند (س = ١) هو −٤

∴ معادلة المماس هي : (ص + ٥) = −٤ (س − ١)

أي أن : ص + ٤ س + ١ = ٠

② صَ = ١/(٢ √س) + −٢/(√س)³

∴ ميل المماس عند (س = ٤) هو صفر

∴ معادلة المماس هي : ص = ٤

③ صَ = ٢ جتا س − جا س

∴ ميل المماس عند (س = ٠) هو ٢

∴ معادلة المماس هي : ص − ١ = ٢ (س − ٠)

أي أن : ص − ٢ س − ١ = ٠

④ عند س = π فإن ص = ٠

∴ النقطة هي (π ، ٠)

، ∵ ص = س جا ٢ س

∴ صَ = ٢ س جتا ٢ س + جا ٢ س

∴ ميل المماس عند (س = π) هو ٢ π

∴ معادلة المماس هي : ص − ٠ = ٢ π (س − π)

أي أن : ص − ٢ π س + ٢ π² = ٠

⑤ د(π/٤) = π − ١

∴ النقطة هي (π/٤ ، π − ١)

صَ = ٤ − قا² س

∴ ميل المماس عند (س = π/٤) هو ٢

∴ معادلة المماس هي :

ص − π + ١ = ٢ (س − π/٤)

أي أن : ٢ ص − ٤ س + ٢ = π

١٣

① عند س = −١

∴ ص = (−١)⁵ − ٤ (−١)³ + ٢ = ٥

∴ النقطة هي (−١ ، ٥)

، ∵ صَ = ٥ س⁴ − ١٢ س²

∴ ميل المماس عند (س = −١) هو −٧

∴ ميل العمودي = ١/٧

∴ معادلة العمودي هي :

ص − ٥ = ١/٧ (س + ١)

أي أن : ٧ ص − س − ٣٦ = ٠

② عند س = ٠ ∴ ص = −١/٢

∴ النقطة هي (٠ ، −١/٢)

، ∵ صَ = [٢ س (٢ − س²) + ٢ س (س² − ١)]/(٢ − س²)²

= ٢ س/(٢ − س²)²

∴ ميل المماس عند (س = ٠) هو صفر

∴ ميل العمودي غير معرف

∴ معادلة العمودي هي س = ٠ (محور الصادات)

١٤

① عند س = π/٦ ∴ ص = ٠

∴ النقطة هي (π/٦ ، ٠)

، صَ = ٦ جا س قا² ٦ س + جتا س ظا ٦ س

∴ ميل المماس عند (س = π/٦) هو ٣

∴ ميل العمودي = −١/٣

∴ معادلة المماس هي : ص − ٠ = ٣ (س − π/٦)

أي أن : ٢ ص − ٦ س + π = ٠

، معادلة العمودي هي :

ص − ٠ = −١/٣ (س − π/٦)

أي أن : ١٨ ص + ٦ س − π = ٠

② صَ = ٢ س جتا ٢ س + جا ٢ س

∴ ميل المماس عند (س = π/٤) هو ١

∴ ميل العمودي = −١

∴ معادلة المماس هي : ص − π/٤ = س − π/٤

أي أن : ص = س

، معادلة العمودي هي :

ص − π/٤ = −١ (س − π/٤)

أي أن : ٢ ص + ٢ س − π = ٠

③ عند س = π/٢

∴ ص = √(جا π/٢ + جتا π/٢) = ١

∴ النقطة هي (π/٢ ، ١)

، ∵ صَ = (جتا س − جا س)/(٢ √(جا س + جتا س))

∴ ميل المماس عند (س = π/٢) هو −١/٢

∴ ميل العمودى هو ٢

∴ معادلة المماس هى :

$ص - ١ = -\frac{١}{٢}(س - \frac{\pi}{٢})$

أى أن : $٢ ص + س - ٢ = \frac{\pi}{٢}$

، معادلة العمودى هى : $ص - ١ = ٢ (س - \frac{\pi}{٢})$

أى أن : $ص - ٢ س + \pi - ١ = ٠$

١٥

عند س = ١ ∴ ص = ٢

∴ النقطة هى : (١ ، ٢)

، ∵ $صَ = \frac{س + ١ - (س + ٣)}{(س + ١)^٢} = \frac{-٢}{(س + ١)^٢}$

∴ ميل المماس عند (س = ١) هو $-\frac{١}{٢}$

، ميل العمودى = ٢

∴ معادلة المماس هى : $ص - ٢ = -\frac{١}{٢}(س - ١)$

أى أن : ٢ ص + س − ٥ = ٠

، معادلة العمودى هى : ص − ٢ = ٢ (س − ١)

أى أن : ص − ٢ س = ٠

وبالتعويض بالنقطة أ (−٣ ، ٤) فى معادلة المماس

∴ ٢ (٤) + (−٣) − ٥ = صفر (تحقق المعادلة)

∴ أ ∈ المماس للمنحنى عند (١ ، ٢)

١٦

$ص = ٦ س^٢ + ١٢ س + ٥$

، ∵ ظا ١٣٥° = −١

∴ $٦ س^٢ + ١٢ س + ٥ = -١$

∴ $س^٢ + ٢ س + ١ = ٠$

∴ $(س + ١)^٢ = ٠$ ∴ س = −١

، عند س = −١ فإن : ص = −١

∴ ميل المماس للمنحنى عند النقطة (−١ ، −١) هو −١

∴ معادلة المماس هى : ص + ١ = −١ (س + ١)

أى أن : ص + س + ٢ = ٠

١٧

∵ $ص^٢ = س - ١$ ∴ $٢ ص \frac{ءص}{ءس} = ١$

∴ $\frac{ءص}{ءس} = \frac{١}{٢ ص}$ ∴ $\frac{١}{٢ ص} = -\frac{١}{٢}$

∴ ص = −١ ومنها س = ٢

∴ النقطة التى تقع على المنحنى والتى ميل المماس عندها $-\frac{١}{٢}$ هى : (٢ ، −١)

∴ معادلة المماس : $\frac{ص + ١}{س - ٢} = -\frac{١}{٢}$

أى أن : ٢ ص + س = ٠

١٨

لإيجاد نقط التقاطع مع محور السينات نضع ص = ٠

∴ (س − ٢) (س + ١) = ٠

∴ س = ٢ ، س = −١

∴ نقطتا التقاطع مع محور السينات هما (٢ ، ٠) ، (−١ ، ٠)

، ∵ صَ = (س − ٢) + (س + ١) = ٢ س − ١

∴ ميل المماس عند (س = ٢) هو ٣

∴ معادلة المماس عندها هى : ص − ٠ = ٣ (س − ٢)

أى أن : ص − ٣ س + ٦ = ٠

، ميل المماس عند (س = −١) هو −٣

∴ معادلة المماس عندها هى : ص − ٠ = −٣ (س + ١)

أى أن : ص + ٣ س + ٣ = ٠

١٩

$صَ = ٣ أ س^٢ + ٢ ب س$

، ∵ ميل المماس عند س = −١ يساوى ٨

∴ ٨ = ٣ أ − ٢ ب (١)

، ∵ (−١ ، −٣) تقع على المنحنى

∴ −٣ = −أ + ب (٢)

من (١) ، (٢) : ∴ أ = ٢ ، ب = −١

٢٠

$صَ = أ (س^٢ - ٢ س) + (أ س + ب) (٢ س - ٢)$

، ∵ المنحنى يمس محور السينات عند (٢ ، ٠)

∴ ميل المماس عند س = ٢ هو صفر

∴ $أ (٢^٢ - ٢ (٢)) + (٢ أ + ب) (٢ (٢) - ٢) = ٠$

∴ ٢ أ + ب = ٠ (١)

، المنحنى يمس المستقيم ص = ٢ س عند (٠ ، ٠)

∴ ميل المماس عند س = ٠ هو ٢

∴ ٢ = −٢ ب

∴ ب = −١ ، من (١) : ∴ $أ = \frac{١}{٢}$

٢١

صَ = ٢ جتا ٢ س

، ∵ المماس يوازى المستقيم ص = ٨ + س

∴ ميل المماس = ١ ∴ ٢ جتا ٢ س = ١

∴ $جتا ٢ س = \frac{١}{٢}$ ∴ $٢ س = \frac{\pi}{٣}$

أى أن : $س = \frac{\pi}{٦}$ ومنها $ص = \frac{\sqrt{٣}}{٢}$

أو ٢ س = $\frac{٥\pi}{٣}$

أى أن : $س = \frac{٥\pi}{٦}$ ومنها $ص = -\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

∴ النقط هى : $(\frac{\pi}{٦} ، \frac{\sqrt{٣}}{٢})$ ، $(\frac{٥\pi}{٦} ، -\frac{\sqrt{٣}}{٢})$

٢٢

$صَ = ٣ س^٢ + ٣$ وهو كمية موجبة دائمًا.

∴ المماس للمنحنى عند أى نقطة عليه يميل بزاوية حادة على محور السينات

، ∵ ميل المماس عند (س = ١) هو ٦

∴ ميل العمودى = $-\frac{١}{٦}$

∴ معادلة العمودى هى $ص - ٢ = -\frac{١}{٦}(س - ١)$

أى أن : ٦ ص + س − ١٣ = ٠

٢٣

• بالنسبة للمنحنى الأول : صَ = ٢ س + ١

∴ ميل المماس عند (س = ١) هو $م_١ = ٣$

• بالنسبة للمنحنى الثانى : $صَ = \frac{-١}{٣ \sqrt[٣]{س^٢}}$

∴ ميل المماس عند (س = ١) هو $م_٢ = -\frac{١}{٣}$

، ∵ $م_١ م_٢ = ٣ \times -\frac{١}{٣} = -١$

∴ المماسان متعامدان.

٢٤

∵ $٤ ص = ١٢ س - ٤ - س^٢$

∴ $ص = ٣ س - ١ - \frac{١}{٤} س^٢$

∴ $صَ = ٣ - \frac{١}{٢} س$

وعندما س = ٢ ∴ صَ = ٢

∴ ميل المماس = ٢

وعندما س = ٤ ∴ صَ = ١

∴ ميل المماس = ١

∴ ميل المماس عند س = ٢ ضعف ميل المماس عند س = ٤

وعندما صَ = −١

∴ $-١ = ٣ - \frac{١}{٢} س$ ∴ س = ٨

، عند س = ٨ ∴ ٤ ص = ٩٦ − ٤ − ٦٤ = ٢٨

∴ ص = ٧ ∴ النقطة هى : (٨ ، ٧)

٢٥

صَ = ٦ س − ٥ ∴ $[صَ]_{س = ١} = ١$

∴ الميل = ١ = ظا هـ ∴ $هـ = \frac{\pi}{٤}$

∴ المماس يصنع زاوية موجبة قياسها $\frac{\pi}{٤}$ مع الاتجاه الموجب لمحور السينات.

∴ معادلة المماس هى : $\frac{ص - ٠}{س - ١} = ١$

∴ ص = س − ١

٢٦

صَ = جتا س − جا س

∴ ميل المماس عند (س = π/٤) هو صفر

∴ المماس يوازى محور السينات ومعادلته (ص = √٢)

٢٧

ميل المماس = ءص/ءس = ٣ س٢ − ٣

، ∵ ميل المستقيم المعطى = −١/٩

∴ ميل المماس المطلوب معادلته = ٩

∴ ٣ س٢ − ٣ = ٩   ∴ س٢ = ٤

∴ س = ± ٢

∴ نقطتا التماس هما : (٢ ، ٧) ، (−٢ ، ٣)

∴ معادلتا المماسين هما :

(ص − ٧)/(س − ٢) = ٩ ⟸ ص − ٩ س + ١١ = ٠

، (ص − ٣)/(س + ٢) = ٩ ⟸ ص − ٩ س − ٢١ = ٠

٢٨

عند ص = ٣   ∴ ٣ = س٢ − ٢ س + ٣

∴ س (س − ٢) = ٠   ∴ س = ٠ أ، س = ٢

∴ توجد نقطتان (٠ ، ٣) ، (٢ ، ٣) وبالتالى يوجد إجابتان

، ∵ صَ = ٢ س − ٢

∴ ميل المماس عند (س = ٠) هو −٢

∴ معادلة المماس هى : ص − ٣ = −٢ (س − ٠)

أى أن : ص + ٢ س − ٣ = ٠

، ميل المماس عند (س = ٢) هو ٢

∴ معادلة المماس هى : ص − ٣ = ٢ (س − ٢)

أى أن : ص − ٢ س + ١ = ٠

٢٩

صَ = ٥ − ٤ س   ∴ الميل = [صَ] س = ١ = ١

∴ معادلة المماس هى : (ص + ١)/(س − ١) = ١

أى : ص = س − ٢

، عند س = ٠ فإن : ص = −٢

∴ أ = (٠ ، −٢)

عند ص = ٠ فإن : س = ٢

∴ ب = (٢ ، ٠)

∴ مساحة Δ و أ ب = ١/٢ × ٢ × ٢ = ٢ وحدة مربعة.

٣٠

صَ = −٢ س / (٢ √(٢٥ − س٢)) = −س / √(٢٥ − س٢)

∴ [صَ] س = ٣ = −٣/٤

∴ معادلة المماس عند أ (٣ ، ٤) هى : (ص − ٤)/(س − ٣) = −٣/٤

∴ ٤ ص + ٣ س = ٢٥

، عند ص = ٠ فإن : س = ٢٥/٣

∴ ب = (٢٥/٣ ، ٠)

∴ مساحة Δ ب أ و = ١/٢ × ٢٥/٣ × ٤

= ٥٠/٣ وحدة مربعة.

٣١

∵ ص = ١/س   ∴ صَ = −١/س٢

ويفرض أن نقطة التماس هى : (أ ، ١/أ)

∴ صَ = −١/أ٢

∴ معادلة المماس هى : (ص − ١/أ) = −١/أ٢ (س − أ)

∴ س + أ٢ ص − ٢ أ = ٠

∴ المماس يقطع محور السينات عند (٢ أ ، ٠)

، يقطع محور الصادات عند (٠ ، ٢/أ)

∴ مساحة المثلث المطلوب

= ١/٢ × ٢ أ × ٢/أ = ٢ وحدة مربعة.

ثالثا مسائل تقيس مهارات التفكير

١

① (د)   ② (ب)   ③ (د)   ④ (د)

إرشادات لحل رقم ١ :

① د (س) = ٢ س٣

∴ ميل المماس للدالة د

يساوى دَ (س) = ٦ س٢

∴ معدل تغير ميل المماس للدالة د يساوى

اشتقاق ميل المماس = ١٢ س

، عند س = ٣

∴ معدل تغير ميل المماس للدالة د = ١٢ × ٣ = ٣٦

② ∵ أ (−٤ ، ٠) ، ب (٤ ، ٠)

∴ حـ (٤ ، د (٤))

∴ ميل أحـ = دَ (٤) = (د (٤) − صفر)/(٤ + ٤)

∴ ٨ دَ (٤) = د (٤)

، ∵ د (٤) + دَ (٤) = ٩

∴ ٨ دَ (٤) + دَ (٤) = ٩

∴ ٩ دَ (٤) = ٩   ∴ دَ (٤) = ١ ، د (٤) = ٨

∴ طول ب حـ = ٨ وحدات طولية

، أ ب = ٤ + ٤ = ٨ وحدات طولية

∴ مساحة Δ أ ب حـ = ١/٢ × أ ب × ب حـ

= ١/٢ × ٨ × ٨

= ٣٢ وحدة مربعة

③ ∵ ميل المماس عند (س = ٣) يساوى دَ (٣)

، ∵ ميل المماس س = ظا ٤٥° = ١

∴ دَ (٣) = ١

، ∵ هـ (س) = س . د (س)

∴ هـَ (س) = س . دَ (س) + د (س)

∴ هـَ (٣) = ٣ × دَ (٣) + د (٣) = ٣ × ١ + ٥ = ٨

④ ∵ د (٢) = ٣ ، دَ (٢) = رَ (٢) = ك

، ∵ ع (س) = س د (س) − ٢ ر (س)

∴ عَ (س) = س دَ (س) + د (س) − ٢ رَ (س)

∴ عَ (٢) = ٢ دَ (٢) + د (٢) − ٢ رَ (٢)

= ٢ ك + ٣ − ٢ ك = ٣

٢

صَ = ٢ س − ٦

∴ ميل المماس عند (س = ٤) هو ٢

∴ معادلة المماس هى : ص − ٥ = ٢ (س − ٤)

أي أن: ص − ٢ س + ٣ = ٠

وهو يقطع محور السينات في النقطة $\left(\frac{٣}{٢} ، ٠\right)$

، ميل العمودي عند (س = ٤) هو $-\frac{١}{٢}$

∴ معادلة العمودي هي: ص − ٥ = $-\frac{١}{٢}$ (س − ٤)

أي أن: ٢ ص + س − ١٤ = ٠

وهو يقطع محور السينات في النقطة (١٤ ، ٠)

∴ مساحة المثلث المطلوب = $\frac{١}{٢} \times \left(١٤ - \frac{٣}{٢}\right) \times ٥$

= ٣١,٢٥ وحدة مربعة.

٣

∵ ص = ١٢ − $س^{\frac{١}{٢}}$

∴ ص' = $-\frac{١}{٢} س^{-\frac{١}{٢}} = -\frac{١}{٢\sqrt{س}}$

، ولإيجاد نقطة تقاطع المنحنى ص + $\sqrt{س}$ = ١٢ مع المستقيم ص = س نحل المعادلتين معًا

∴ س + $\sqrt{س}$ = ١٢   ∴ س + $\sqrt{س}$ − ١٢ = ٠

∴ $(\sqrt{س} - ٣)(\sqrt{س} + ٤) = ٠$

∴ $\sqrt{س} = ٣$

∴ س = ٩ ومنها ص = ٩ وتكون النقطة (٩ ، ٩)

أو $\sqrt{س} = -٤$ (مرفوض)

∴ ميل المماس عند النقطة (٩ ، ٩) = $\frac{-١}{٢\sqrt{٩}} = \frac{-١}{٦}$

∴ معادلة المماس هي: $\frac{ص - ٩}{س - ٩} = \frac{-١}{٦}$

∴ س + ٦ ص − ٦٣ = ٠

٤

∵ (−١ ، ١) تقع على المنحنى

∴ ١ = $\frac{١}{أ - ب}$

∴ أ − ب = ١   (١)

، ∵ ص' = $\frac{-أ - ب س + ب س}{(أ + ب س)^٢}$

= $\frac{-أ}{(أ + ب س)^٢}$

∴ $[ص']_{س = -١} = \frac{-أ}{(أ - ب)^٢}$

، ∵ جتا هـ = $\frac{-١}{\sqrt{١٠}}$

∴ هـ منفرجة   ∴ ظا هـ = −٣

∴ ميل المماس عند (س = −١) هو −٣

∴ $\frac{-أ}{(أ - ب)^٢} = -٣$ (٢)

، من (١) ، (٢): ∴ أ = ٣ ، ب = ٢

٥

بالنسبة للمنحنى (ص = ٣ $س^٢$ − ٥ س − ٢)

$\frac{دص}{دس}$ = ٦ س − ٥

∴ $\left(\frac{دص}{دس}\right)_{(١ ، -٤)} = ١$

بالنسبة للمنحنى (ص = $س^٢$ − ٣ س − ٢)

$\frac{دص}{دس}$ = ٢ س − ٣

$\left(\frac{دص}{دس}\right)_{(١ ، -٤)} = -١$

∴ (١ ، −٤) تحقق كلًا من المعادلتين

، ∵ حاصل ضرب ميلي المستقيمين = ١ × −١ = −١

∴ المنحنيان يتقاطعان على التعامد.

٦

بوضع جا س = جتا س

∴ ٢ س = $\frac{\pi}{٢}$ ∴ س = $\frac{\pi}{٤}$

∴ نقطة التقاطع هي: $\left(\frac{\pi}{٤} ، \frac{١}{\sqrt{٢}}\right)$

وبفرض $م_١$ ، $م_٢$ هما ميلي المماسين للمنحنيين

∴ $م_١ = \frac{د}{دس}$ (جا س) = جتا س

∴ $[م_١]_{س = \frac{\pi}{٤}} = \frac{١}{\sqrt{٢}}$

∴ $م_٢ = \frac{د}{دس}$ (جتا س) = − جا س

∴ $[م_٢]_{س = \frac{\pi}{٤}} = -\frac{١}{\sqrt{٢}}$

، ∵ ظا هـ = $\left|\frac{م_١ - م_٢}{١ + م_١ م_٢}\right|$

= $\left|\frac{\frac{١}{\sqrt{٢}} + \frac{١}{\sqrt{٢}}}{١ - \frac{١}{\sqrt{٢}} \times \frac{١}{\sqrt{٢}}}\right| = ٢\sqrt{٢}$

∴ هـ = ٧٠° ٣١' ٤٤"

٧

$\frac{دص}{دس}$ = (− جا (س + ص)) $\left(١ + \frac{دص}{دس}\right)$

، ∵ $\frac{دص}{دس}$ = الميل = $-\frac{١}{٢}$

∴ $-\frac{١}{٢}$ = − جا (س + ص) × $\frac{١}{٢}$

∴ جا (س + ص) = ١   (١)

∴ س + ص = $\frac{\pi}{٢}$ + ٢ ن π حيث ن ∈ ص

∴ ص = جتا $\left(\frac{\pi}{٢} + ٢ ن \pi\right)$ = جتا $\frac{\pi}{٢}$ = صفر   (٢)

من (١) ، (٢): ∴ جا س = ١

∴ س = $\frac{\pi}{٢}$ لأن س ∈ [٠ ، π]

∴ نقطة المماس هي $\left(\frac{\pi}{٢} ، ٠\right)$

∴ معادلة المماس هي: ص − ٠ = $-\frac{١}{٢}\left(س - \frac{\pi}{٢}\right)$

∴ ٢ س + ٤ ص − π = ٠

٨

∵ ص = $\frac{١}{٣} س^٣ - \frac{٣}{٢} س^٢$ + س + ١

∴ $\frac{دص}{دس} = س^٢$ − ٣ س + ١

، ∵ المماس والعمودي يصنعان مع محور السينات مثلثًا متساوي الساقين.

∴ المماس والعمودي يصنعان زوايا ٤٥° ، ١٣٥° مع محور السينات.

∴ $س^٢$ − ٣ س + ١ = ١ ومنها س = ٠ أو س = ٣

∴ النقط: (٠ ، ١) $\left(٣ ، -\frac{١}{٢}\right)$

أو $س^٢$ − ٣ س + ١ = −١ ومنها س = ٢ أو س = ١

النقط: $\left(٢ ، -\frac{١}{٣}\right)$ ، $\left(١ ، \frac{٥}{٦}\right)$

٩

∵ ص = $س^٢$ وبفرض أن نقطة التماس هي (أ ، ب)

∴ ب = $أ^٢$ (١)

، $\frac{دص}{دس}$ = ٢ س ، عند س = أ فإن: $\frac{دص}{دس}$ = ٢ أ

∴ معادلة المماس هي:

ص − ب = ٢ أ (س − أ)

∴ ص − $أ^٢$ = ٢ أ (س − أ)

، ∵ النقطة (٣ ، ٥) تقع على المماس

∴ ٥ − $أ^٢$ = ٢ أ (٣ − أ)

∴ ٥ − $أ^٢$ = ٦ أ − ٢ $أ^٢$

∴ $أ^٢$ − ٦ أ + ٥ = ٠   ∴ (أ − ١) (أ − ٥) = ٠

∴ أ = ١ ، أ = ٥ ومنها ب = ١ ، ب = ٢٥

∴ معادلة المماس هي: ص − ١ = ٢ (س − ١)

أي أن: ص − ٢ س + ١ = ٠

أو ص − ٢٥ = ١٠ (س − ٥)

أي أن: ص − ١٠ س + ٢٥ = ٠

إجابات تمارين 15

أولا أسئلة الاختيار من متعدد

(١) (جـ)	(٢) (ب)	(٣) (جـ)	(٤) (أ)	(٥) (جـ)
(٦) (جـ)	(٧) (أ)	(٨) (جـ)	(٩) (د)	(١٠) (أ)
(١١) (ب)	(١٢) (ب)	(١٣) (ب)	(١٤) (جـ)	(١٥) (أ)
(١٦) (د)	(١٧) (ب)	(١٨) (أ)	(١٩) (ب)	(٢٠) (ب)
(٢١) (جـ)	(٢٢) (ب)	(٢٣) (جـ)	(٢٤) (د)	(٢٥) (ب)

٢٦ (أ)	٢٧ (جـ)	٢٨ (د)	٢٩ (جـ)	٣٠ (ب)
٣١ (جـ)	٣٢ (أ)	٣٣ (د)	٣٤ (ب)	٣٥ (أ)
٣٦ (ب)	٣٧ (جـ)	٣٨ (أ)	٣٩ (ب)	٤٠ (ب)
٤١ (جـ)	٤٢ (د)	٤٣ (أ)	٤٤ (جـ)	٤٥ (جـ)
٤٦ (أ)	٤٧ (ب)	٤٨ (أ)	٤٩ (أ)	٥٠ (ب)
٥١ (جـ)	٥٢ (أ)	٥٣ (جـ)	٥٤ (ب)	٥٥ (أ)
٥٦ (ب)	٥٧ (ب)	٥٨ (ب)	٥٩ (ب)	٦٠ (أ)
٦١ (جـ)	٦٢ (د)	٦٣ (ب)	٦٤ (جـ)	٦٥ (د)
٦٦ (ب)	٦٧ (أ)	٦٨ (د)	٦٩ (ب)	٧٠ (ب)
٧١ (د)	٧٢ (جـ)	٧٣ (د)	٧٤ (جـ)	٧٥ (جـ)
٧٦ (ب)	٧٧ (أ)	٧٨ (ب)	٧٩ (د)	٨٠ (ب)
٨١ (جـ)	٨٢ (ب)	٨٣ (أ)	٨٤ (جـ)	٨٥ (جـ)
٨٦ (أ)	٨٧ (جـ)	٨٨ (ب)	٨٩ (ب)	٩٠ (د)
٩١ (جـ)	٩٢ (جـ)	٩٣ (ب)	٩٤ (د)	

ثانيا الأسئلة المقالية

١

(١) $\frac{١}{٥} س + ث$ (٢) $ث$

(٣) $\frac{٤}{٥} ف^{-٢} + ث$ (٤) $\frac{٥}{٣} س^{\frac{٣}{٥}} + ث$

(٥) $-٢٤ س^{-\frac{١}{٢}} + ث$ (٦) $\frac{٣٦}{٧} ص^{\frac{٧}{٤}} + ث$

٢

(١) $س^{٤} - ٢ س^{٣} + ٤ س^{٢} - ٥ س + ث$

(٢) $\frac{١}{٥} س^{٥} + س^{-١} + ٥ س + ث$

(٣) $-\frac{٣}{٢} س^{-٢} - ٢ س^{-١} + ٥ س + ث$

(٤) $٢ س^{\frac{٣}{٢}} + س^{-٢} + ث$

(٥) $\frac{١}{٣} أ س^{٣} + \frac{ب}{٢} س^{٢} + حـ س + ث$

(٦) $س^{\frac{٥}{٣}} + س^{\frac{٧}{٤}} + ث$

٣

(١) $\int س^{٢} \left(٣ س - \frac{٥}{س}\right) ءس$

$= \int (٣ س^{٣} - ٥ س) ءس$

$= \frac{٣}{٤} س^{٤} - \frac{٥}{٢} س^{٢} + ث$

(٢) $\int (س - ٢)(٤ س^{٢} + ١) ءس$

$= \int (٤ س^{٣} + س - ٨ س^{٢} - ٢) ءس$

$= س^{٤} + \frac{١}{٢} س^{٢} - \frac{٨}{٣} س^{٣} - ٢ س + ث$

(٣) $\int س^{٣} (٢ - س)^{٢} ءس$

$= \int س^{٣} (٤ - ٤ س + س^{٢}) ءس$

$= \int (٤ س^{٣} - ٤ س^{٤} + س^{٥}) ءس$

$= س^{٤} - \frac{٤}{٥} س^{٥} + \frac{١}{٦} س^{٦} + ث$

(٤) $\int (١ - س^{٢})^{٢} (١ + س^{٢})^{٢} ءس$

$= \int (١ - س^{٤})^{٢} ءس$

$= \int (١ - ٢ س^{٤} + س^{٨}) ءس$

$= س - \frac{٢}{٥} س^{٥} + \frac{١}{٩} س^{٩} + ث$

(٥) $\int (\sqrt{س} - ١)^{٢} ءس$

$= \int (س - ٢ \sqrt{س} + ١) ءس$

$= \frac{١}{٢} س^{٢} - \frac{٤}{٣} س^{\frac{٣}{٢}} + س + ث$

(٦) $\int (\sqrt{س} + س) ءس$

$= \frac{٢}{٣} س^{\frac{٣}{٢}} + \frac{١}{٢} س^{٢} + ث$

(٧) $\int \sqrt{س} \left(س \sqrt{س} + ٢ \sqrt{س} - \frac{١}{\sqrt{س}}\right) ءس$

$= \int (س^{٢} + ٢ س - ١) ءس$

$= \frac{١}{٣} س^{٣} + س^{٢} - س + ث$

٤

(١) $\int \frac{س^{٧} - ٤ س^{٥} + س^{٣}}{س^{٣}} ءس$

$= \int (س^{٤} - ٤ س^{٢} + ١) ءس$

$= \frac{١}{٥} س^{٥} - \frac{٤}{٣} س^{٣} + س + ث$

(٢) $\int \frac{س^{٢} - ٥ س + ٦}{س - ٢} ءس$

$= \int \frac{(س - ٢)(س - ٣)}{س - ٢} ءس$

$= \int (س - ٣) ءس$

$= \frac{١}{٢} س^{٢} - ٣ س + ث$

(٣) $\int \frac{س - ٤}{\sqrt{س} + ٢} ءس$

$= \int \frac{(\sqrt{س} - ٢)(\sqrt{س} + ٢)}{\sqrt{س} + ٢} ءس$

$= \int (\sqrt{س} - ٢) ءس$

$= \frac{٢}{٣} س^{\frac{٣}{٢}} - ٢ س + ث$

(٤) $\int \frac{س^{٣} - ٢٧}{س - ٣} ءس$

$= \int \frac{(س - ٣)(س^{٢} + ٣ س + ٩)}{س - ٣} ءس$

$= \int (س^{٢} + ٣ س + ٩) ءس$

$= \frac{١}{٣} س^{٣} + \frac{٣}{٢} س^{٢} + ٩ س + ث$

(٥) $\int \frac{٤ س^{٣} - ١٢ س^{٢}}{س - ٣} ءس$

$= \int \frac{٤ س^{٢} (س - ٣)}{س - ٣} ءس$

$= \int ٤ س^{٢} ءس$

$= \frac{٤}{٣} س^{٣} + ث$

(٦) $\int \frac{(س^{٢} + ٢)^{٢}}{س^{٢}} ءس$

$= \int \frac{س^{٤} + ٤ س^{٢} + ٤}{س^{٢}} ءس$

$= \int (س^{٢} + ٤ + ٤ س^{-٢}) ءس$

$= \frac{١}{٣} س^{٣} + ٤ س - ٤ س^{-١} + ث$

(٧) $\int \frac{س^{٣} + س - ٢}{س - ١} ءس$

$= \int \frac{س^{٣} - ١ + س - ١}{س - ١} ءس$

$= \int \left[\frac{س^{٣} - ١}{س - ١} + \frac{س - ١}{س - ١}\right] ءس$

$= \int \left[\frac{(س - ١)(س^{٢} + س + ١)}{س - ١} + ١\right] ءس$

$= \int (س^{٢} + س + ٢) ءس$

$= \frac{١}{٣} س^{٣} + \frac{١}{٢} س^{٢} + ٢ س + ث$

(٨) $\int \frac{س^{٢} - ٤}{\sqrt{س} (س - ٢)} ءس$

$= \int \frac{(س - ٢)(س + ٢)}{\sqrt{س} (س - ٢)} ءس$

$= \int \frac{س + ٢}{\sqrt{س}} ءس$

$= \int (\sqrt{س} + ٢ س^{-\frac{١}{٢}}) ءس$

$= \frac{٢}{٣} س^{\frac{٣}{٢}} + ٤ س^{\frac{١}{٢}} + ث$

٥

(١) $\int ٦ (س - ٢)^{٥} ءس = (س - ٢)^{٦} + ث$

(٢) $\int ٣ (٣ س + ١)^{٣} ءس$

$= \frac{(٣ س + ١)^{٤}}{٤} + ث$

(٣) $\int (٢ ع - ٣)^{\frac{٧}{٣}} ءع$

$= \frac{١}{٢} \times \frac{(٢ ع - ٣)^{\frac{١٠}{٣}}}{٢ \times \frac{١٠}{٣}} + ث$

$= \frac{٣}{٢٠} (٢ ع - ٣)^{\frac{١٠}{٣}} + ث$

(٤) $\int \sqrt{٢ س + ٧} ءس$

$= \frac{(٢ س + ٧)^{\frac{٣}{٢}}}{٢ \times \frac{٣}{٢}} + ث$

$= \frac{١}{٣} (٢ س + ٧)^{\frac{٣}{٢}} + ث$

⑤ $\int (٢س+٥)^{-٩} \, ءس$

$= \frac{(٢س+٥)^{-٨}}{٢ \times -٨} + ث$

$= -\frac{١}{١٦}(٢س+٥)^{-٨} + ث$

⑥ $\int [(٣-٢س)^{٥} + ٣] \, ءس$

$= \frac{(٣-٢س)^{٦}}{٦ \times -٢} + ٣س + ث$

$= -\frac{١}{١٢}(٣-٢س)^{٦} + ٣س + ث$

⑦ $\int \frac{ءس}{\sqrt[٥]{٢س+٩}}$

$= \int (٢س+٩)^{-\frac{١}{٥}} \, ءس$

$= \frac{(٢س+٩)^{\frac{٤}{٥}}}{٢ \times \frac{٤}{٥}} + ث$

$= \frac{٥}{٨} \times (٢س+٩)^{\frac{٤}{٥}} + ث$

⑧ $\int \sqrt[٣]{(٤-٣س)^{٢}} \, ءس$

$= \int (٤-٣س)^{\frac{٢}{٣}} \, ءس$

$= \frac{(٤-٣س)^{\frac{٥}{٣}}}{-٣ \times \frac{٥}{٣}} + ث$

$= -\frac{١}{٥} \times (٤-٣س)^{\frac{٥}{٣}} + ث$

٦

① $\int س^{٦} \left(١ - \frac{٢}{س}\right)^{٦} \, ءس$

$= \int (س-٢)^{٦} \, ءس$

$= \frac{١}{٧}(س-٢)^{٧} + ث$

② $\int س \sqrt[٣]{\frac{٢}{س^{٣}} - \frac{١}{س^{٢}}} \, ءس$

$= \int (٢-س)^{\frac{١}{٣}} \, ءس$

$= \int (٢-س)^{\frac{١}{٣}} \, ءس$

$= \frac{(٢-س)^{\frac{٤}{٣}}}{\frac{٤}{٣} \times -١} + ث = -\frac{٣}{٤}(٢-س)^{\frac{٤}{٣}} + ث$

③ $\int س^{١٠} \left(\frac{٢}{س} + \frac{٣}{س^{٢}}\right)^{٥} \, ءس$

$= \int (٢س+٣)^{٥} \, ءس$

$= \int (٢س+٣)^{٥} \, ءس$

$= \frac{(٢س+٣)^{٦}}{٢ \times ٦} + ث$

$= \frac{١}{١٢}(٢س+٣)^{٦} + ث$

④ $\int (٤س^{٢} - ١٢س + ٩)^{\frac{٧}{٢}} \, ءس$

$= \int [(٢س-٣)^{٢}]^{\frac{٧}{٢}} \, ءس$

$= \int (٢س-٣)^{٧} \, ءس$

$= \frac{(٢س-٣)^{٨}}{٢ \times ٨} + ث$

$= \frac{١}{١٦}(٢س-٣)^{٨} + ث$

⑤ $\int (٤س+٦)\sqrt{٢س+٣} \, ءس$

$= ٢\int (٢س+٣)^{\frac{٣}{٢}} \, ءس$

$= \frac{٢}{٥}(٢س+٣)^{\frac{٥}{٢}} + ث$

⑥ $\int \sqrt{س-٣}\,(س-٣)^{٤} \, ءس$

$= \int (س-٣)^{\frac{١}{٢}}(س-٣)^{٤} \, ءس$

$= \int (س-٣)^{\frac{٩}{٢}} \, ءس$

$= \frac{٢}{١١}(س-٣)^{\frac{١١}{٢}} + ث$

⑦ $\int (س+١)\sqrt[٣]{س^{٢}+٢س+١} \, ءس$

$= \int (س+١)\sqrt[٣]{(س+١)^{٢}} \, ءس$

$= \int (س+١)^{\frac{٥}{٣}} \, ءس$

$= \frac{٣}{٨}(س+١)^{\frac{٨}{٣}} + ث$

⑧ $\int \frac{٨-٢س}{\sqrt{٤-س}} \, ءس$

$= \int \frac{٢(٤-س)}{(٤-س)^{\frac{١}{٢}}} \, ءس$

$= ٢\int (٤-س)^{\frac{١}{٢}} \, ءس$

$= ٢ \times \frac{(٤-س)^{\frac{٣}{٢}}}{\frac{٣}{٢} \times -١} + ث$

$= -\frac{٤}{٣}(٤-س)^{\frac{٣}{٢}} + ث$

٧

① $\int س(٥س^{٢}+٢)^{-٧} \, ءس$

$= \frac{١}{١٠}\int ١٠س(٥س^{٢}+٢)^{-٧} \, ءس$

$= \frac{١}{١٠} \times \frac{(٥س^{٢}+٢)^{-٦}}{-٦} + ث$

$= -\frac{١}{٦٠}(٥س^{٢}+٢)^{-٦} + ث$

② $\int (س^{٢}-٢س+٥)^{-٧}(٢س-٢) \, ءس$

$= \frac{(س^{٢}-٢س+٥)^{-٦}}{-٦} + ث$

③ $\int (٣س^{٢}-٢س+١)^{١١}(٣س-١) \, ءس$

$= \frac{١}{٢}\int (٦س-٢)(٣س^{٢}-٢س+١)^{١١} \, ءس$

$= \frac{١}{٢} \times \frac{(٣س^{٢}-٢س+١)^{١٢}}{١٢} + ث$

$= \frac{١}{٢٤}(٣س^{٢}-٢س+١)^{١٢} + ث$

④ $\int س(٤س^{٣}-٣س^{٢}+٤)^{٥}(٢س-١) \, ءس$

$= \frac{١}{٦}\int (١٢س^{٢}-٦س)(٤س^{٣}-٣س^{٢}+٤)^{٥} \, ءس$

$= \frac{١}{٦} \times \frac{(٤س^{٣}-٣س^{٢}+٤)^{٦}}{٦} + ث$

$= \frac{١}{٣٦}(٤س^{٣}-٣س^{٢}+٤)^{٦} + ث$

⑤ $\int س^{٢}(س^{٤}-س^{٣}+٨)^{٩}(٤س-٣) \, ءس$

$= \int (س^{٤}-س^{٣}+٨)^{٩}(٤س^{٣}-٣س^{٢}) \, ءس$

$= \frac{١}{١٠}(س^{٤}-س^{٣}+٨)^{١٠} + ث$

⑥ $\int \frac{س}{\sqrt{س^{٢}+١}} \, ءس$

$= \frac{١}{٢}\int ٢س(س^{٢}+١)^{-\frac{١}{٢}} \, ءس$

$= \frac{١}{٢} \times ٢(س^{٢}+١)^{\frac{١}{٢}} + ث$

$= \sqrt{س^{٢}+١} + ث$

⑦ $\int \frac{س^{٢}+١}{(س^{٣}+٣س)^{٢}} \, ءس$

$= \frac{١}{٣}\int (٣س^{٢}+٣)(س^{٣}+٣س)^{-٢} \, ءس$

$= -\frac{١}{٣}(س^{٣}+٣س)^{-١} + ث$

⑧ $\int \frac{س^{٣}}{(س^{٤}+١)^{٦}} \, ءس$

$= \frac{١}{٤}\int (٤س^{٣})(س^{٤}+١)^{-٦} \, ءس$

$= \frac{١}{٤} \times -\frac{١}{٥}(س^{٤}+١)^{-٥} + ث$

$= -\frac{١}{٢٠}(س^{٤}+١)^{-٥} + ث$

٨

① $\int (س+١)(س+٣)^{٧} \, ءس$

$= \int [(س+٣)-٢](س+٣)^{٧} \, ءس$

$= \int (س+٣)^{٨} - ٢(س+٣)^{٧} \, ءس$

$= \frac{١}{٩}(س+٣)^{٩} - \frac{١}{٤}(س+٣)^{٨} + ث$

② $\int ٢س\sqrt[٣]{٢س+١} \, ءس$

$= \int [(٢س+١)-١](٢س+١)^{\frac{١}{٣}} \, ءس$

$= \int (٢س+١)^{\frac{٤}{٣}} \, ءس - \int (٢س+١)^{\frac{١}{٣}} \, ءس$

$= \frac{(٢س+١)^{\frac{٧}{٣}}}{٢ \times \frac{٧}{٣}} - \frac{(٢س+١)^{\frac{٤}{٣}}}{٢ \times \frac{٤}{٣}} + ث$

$= \frac{١}{٧}(٢س+١)^{\frac{٧}{٣}} - \frac{١}{٤}(٢س+١)^{\frac{٤}{٣}} + ث$

③ $\int (س+٢)\sqrt{س+١} \, ءس$

$= \int [(س+١)+١](س+١)^{\frac{١}{٢}} \, ءس$

$= \int (س+١)^{\frac{٣}{٢}} \, ءس + \int (س+١)^{\frac{١}{٢}} \, ءس$

$= \frac{٢}{٥}(س+١)^{\frac{٥}{٢}} + \frac{٢}{٣}(س+١)^{\frac{٣}{٢}} + ث$

④ $\int س^{١٧}\left(\frac{١}{س} - \frac{١}{س^{٢}}\right)^{٨} \, ءس$

$= \int (س)(س^{١٦})\left(\frac{١}{س} - \frac{١}{س^{٢}}\right)^{٨} \, ءس$

$= \int س(س-١)^{٨} \, ءس$

$= \int [(س-١)+١](س-١)^{٨} \, ءس$

$= \int (س-١)^{٩} \, ءس + \int (س-١)^{٨} \, ءس$

$= \frac{١}{١٠}(س-١)^{١٠} + \frac{١}{٩}(س-١)^{٩} + ث$

⑤ $\int \frac{\text{س}+٢}{(\text{س}-٢)^{٤}}\,\text{ءس}$

$= \int [(\text{س}-٢)+٥](\text{س}-٢)^{-٤}\,\text{ءس}$

$= \int (\text{س}-٢)^{-٣}\,\text{ءس} + ٥\int (\text{س}-٢)^{-٤}\,\text{ءس}$

$= -\frac{١}{٢}(\text{س}-٢)^{-٢} - \frac{٥}{٣}(\text{س}-٢)^{-٣} + \text{ث}$

⑥ $\int \frac{\text{س}+١}{(٣\text{س}+١)^{٥}}\,\text{ءس}$

$= \frac{١}{٣}\int (٣\text{س}+٣)(٣\text{س}+١)^{-٥}\,\text{ءس}$

$= \frac{١}{٣}\int [(٣\text{س}+١)+٢](٣\text{س}+١)^{-٥}\,\text{ءس}$

$= \frac{١}{٣}\int (٣\text{س}+١)^{-٤}\,\text{ءس} + \frac{٢}{٣}$

$\int (٣\text{س}-١)^{-٥}\,\text{ءس}$

$= \frac{١}{٣} \times \frac{(٣\text{س}+١)^{-٣}}{-٣\times ٣} + \frac{٢}{٣} \times \frac{(٣\text{س}-١)^{-٤}}{-٤\times ٣} + \text{ث}$

$= -\frac{١}{٢٧}(٣\text{س}+١)^{-٣} - \frac{١}{١٨}(٣\text{س}-١)^{-٤} + \text{ث}$

⑦ $\int \frac{٣\text{س}+٢}{\sqrt{\text{س}-٢}}\,\text{ءس}$

$= ٣\int \left(\text{س}+\frac{٢}{٣}\right)(\text{س}-٢)^{-\frac{١}{٢}}\,\text{ءس}$

$= ٣\int \left[(\text{س}-٢)+\frac{٨}{٣}\right](\text{س}-٢)^{-\frac{١}{٢}}\,\text{ءس}$

$= ٣\int (\text{س}-٢)^{\frac{١}{٢}}\,\text{ءس} + ٨\int (\text{س}-٢)^{-\frac{١}{٢}}\,\text{ءس}$

$= ٣ \times \frac{٢(\text{س}-٢)^{\frac{٣}{٢}}}{٣} + ٨\times ٢(\text{س}-٢)^{\frac{١}{٢}} + \text{ث}$

$= ٢(\text{س}-٢)^{\frac{٣}{٢}} + ١٦(\text{س}-٢)^{\frac{١}{٢}} + \text{ث}$

⑧ $\int \frac{\text{س}^{٢}+٨\text{س}}{(\text{س}+٤)^{٥}}\,\text{ءس}$

$= \int (\text{س}^{٢}+٨\text{س}+١٦-١٦)(\text{س}+٤)^{-٥}\,\text{ءس}$

$= \int [(\text{س}+٤)^{٢}-١٦](\text{س}+٤)^{-٥}\,\text{ءس}$

$= \int (\text{س}+٤)^{-٣}\,\text{ءس} - ١٦\int (\text{س}+٤)^{-٥}\,\text{ءس}$

$= -\frac{١}{٢}(\text{س}+٤)^{-٢} + ٤(\text{س}+٤)^{-٤} + \text{ث}$

⑨ $\int \frac{\text{س}^{٢}+٣\text{س}+٢}{(\text{س}+٢)^{٥}}\,\text{ءس}$

$= \int \frac{\text{س}^{٢}+٤\text{س}+٤-\text{س}-٢}{(\text{س}+٢)^{٥}}\,\text{ءس}$

$= \int \frac{(\text{س}+٢)^{٢}-(\text{س}+٢)}{(\text{س}+٢)^{٥}}\,\text{ءس}$

$= \int (\text{س}+٢)^{-٣}\,\text{ءس} - \int (\text{س}+٢)^{-٤}\,\text{ءس}$

$= -\frac{١}{٢}(\text{س}+٢)^{-٢} + \frac{١}{٣}(\text{س}+٢)^{-٣} + \text{ث}$

⑩ $\int \sqrt{\text{س}^{٣}-\text{س}^{٢}}\,\text{ءس}$

$= \int \text{س}(\text{س}-١)^{\frac{١}{٢}}\,\text{ءس}$

$= \int [(\text{س}-١)+١](\text{س}-١)^{\frac{١}{٢}}\,\text{ءس}$

$= \int (\text{س}-١)^{\frac{٣}{٢}}\,\text{ءس} + \int (\text{س}-١)^{\frac{١}{٢}}\,\text{ءس}$

$= \frac{٢}{٥}(\text{س}-١)^{\frac{٥}{٢}} + \frac{٢}{٣}(\text{س}-١)^{\frac{٣}{٢}} + \text{ث}$

٩

① $\int \text{جتا}\left(\frac{\text{س}}{٢}-٢\right)\,\text{ءس}$

$= ٢\,\text{جا}\left(\frac{\text{س}}{٢}-٢\right) + \text{ث}$

② $\int \text{قا}^{٢}\left(\frac{\text{س}}{٢}-١\right)\,\text{ءس}$

$= ٢\,\text{ظا}\left(\frac{\text{س}}{٢}-١\right) + \text{ث}$

③ $\int (٦\text{س} + \text{جتا}\,٤\text{س})\,\text{ءس}$

$= ٣\text{س}^{٢} + \frac{١}{٤}\,\text{جا}\,٤\text{س} + \text{ث}$

④ $\int \text{جتا}(٢-\text{س})\,\text{ءس}$

$= -\text{جا}(٢-\text{س}) + \text{ث}$

⑤ $\int \left(٤\text{س} - \text{جا}\,\frac{\pi}{٢}\right)\text{ءس}$

$= ٢\text{س}^{٢} - \frac{\sqrt{٢}}{٢}\,\text{س} + \text{ث}$

⑥ $\int \left(\frac{\pi}{٢} - ٢\,\text{جا}\,\frac{٣\text{س}}{٢}\right)\text{ءس}$

$= \frac{\pi}{٢}\,\text{س} + \frac{٤}{٣}\,\text{جتا}\,\frac{٣\text{س}}{٢} + \text{ث}$

⑦ $\int (\text{جتا}\,٢\text{س} - \text{جاس})\,\text{ءس}$

$= \frac{١}{٢}\,\text{جا}\,٢\text{س} + \text{جتاس} + \text{ث}$

⑧ $\int (٧\,\text{جاس} - ٢\,\text{جتاس})\,\text{ءس}$

$= -٧\,\text{جتاس} - ٢\,\text{جاس} + \text{ث}$

⑨ $\int ٩(\text{جتاس} - \text{قا}^{٢}\,٣\text{س})\,\text{ءس}$

$= ٩\,\text{جاس} - ٣\,\text{ظا}\,٣\text{س} + \text{ث}$

⑩ $\int (٣ + ٥\,\text{قا}^{٢}\text{س} + ٢\,\text{جا}\,٢\text{س})\,\text{ءس}$

$= ٣\text{س} + ٥\,\text{ظاس} - \text{جتا}\,٢\text{س} + \text{ث}$

⑪ $\int \left(٤\,\text{جتاس} + \frac{١}{\text{جتا}^{٢}\text{س}} + ١\right)\text{ءس}$

$= \int (٤\,\text{جتاس} + \text{قا}^{٢}\text{س} + ١)\,\text{ءس}$

$= ٤\,\text{جاس} + \text{ظاس} + \text{س} + \text{ث}$

⑫ $\int \left[\text{قا}^{٢}\,\frac{\text{س}}{٢} - \text{جا}\left(\frac{\pi}{٤}-\text{س}\right)\right]\text{ءس}$

$= ٢\,\text{ظا}\,\frac{\text{س}}{٢} - \text{جتا}\left(\frac{\pi}{٤}-\text{س}\right) + \text{ث}$

١٠

① $\int (\text{جا}^{٢}\,٣\text{س} + \text{جتا}^{٢}\,٣\text{س} + \text{ظا}^{٢}\,٣\text{س})\,\text{ءس}$

$= \int (١ + \text{ظا}^{٢}\,٣\text{س})\,\text{ءس}$

$= \int \text{قا}^{٢}\,٣\text{س}\,\text{ءس}$

$= \frac{١}{٣}\,\text{ظا}\,٣\text{س} + \text{ث}$

② $\int (١ - ٢\,\text{جا}^{٢}\,٣\text{س})\,\text{ءس}$

$= \int \text{جتا}\,٦\text{س}\,\text{ءس}$

$= \frac{١}{٦}\,\text{جا}\,٦\text{س} + \text{ث}$

③ $\int \text{جاس}\,\text{جتاس}\,\text{ءس}$

$= \int \frac{١}{٢}\,\text{جا}\,٢\text{س}\,\text{ءس}$

$= -\frac{١}{٤}\,\text{جتا}\,٢\text{س} + \text{ث}$

④ $\int \left(\text{جتا}\,\frac{\text{س}}{٢} - \text{جا}\,\frac{\text{س}}{٢}\right)^{٢}\text{ءس}$

$= \int \left(\text{جتا}^{٢}\,\frac{\text{س}}{٢} + \text{جا}^{٢}\,\frac{\text{س}}{٢} - ٢\,\text{جا}\,\frac{\text{س}}{٢}\,\text{جتا}\,\frac{\text{س}}{٢}\right)\text{ءس}$

$= \int (١ - \text{جاس})\,\text{ءس}$

$= \text{س} + \text{جتاس} + \text{ث}$

⑤ $\int \left(١ + \text{ظا}^{٢}\,\frac{\text{س}}{٢}\right)\text{ءس}$

$= \int \text{قا}^{٢}\,\frac{\text{س}}{٢}\,\text{ءس}$

$= ٢\,\text{ظا}\,\frac{\text{س}}{٢} + \text{ث}$

⑥ $\int (٣ + ٤\,\text{ظا}^{٢}\text{س})\,\text{ءس}$

$= \int (٤ + ٤\,\text{ظا}^{٢}\text{س} - ١)\,\text{ءس}$

$= \int (٤\,\text{قا}^{٢}\text{س} - ١)\,\text{ءس}$

$= ٤\,\text{ظاس} - \text{س} + \text{ث}$

⑦ $\int \frac{\text{جتا}^{٢}\text{س}}{١+\text{جاس}}\,\text{ءس}$

$= \int \frac{١-\text{جا}^{٢}\text{س}}{١+\text{جاس}}\,\text{ءس}$

$= \int \frac{(١-\text{جاس})(١+\text{جاس})}{١+\text{جاس}}\,\text{ءس}$

$= \int (١-\text{جاس})\,\text{ءس}$

$= \text{س} + \text{جتاس} + \text{ث}$

⑧ $\int \frac{١+\text{جا}^{٢}\text{س}}{١-\text{جا}^{٢}\text{س}}\,\text{ءس}$

$= \int \frac{١+\text{جا}^{٢}\text{س}}{\text{جتا}^{٢}\text{س}}\,\text{ءس}$

$= \int (\text{قا}^{٢}\text{س} + \text{ظا}^{٢}\text{س})\,\text{ءس}$

$= \int (٢\,\text{قا}^{٢}\text{س} - ١)\,\text{ءس}$

$= ٢\,\text{ظاس} - \text{س} + \text{ث}$

⑨ $\int \frac{\text{جا}^{٣}\text{س} + \text{جتا}^{٣}\text{س}}{\text{جاس} + \text{جتاس}}\,\text{ءس}$

$= \int \frac{(\text{جاس}+\text{جتاس})(\text{جا}^{٢}\text{س} + \text{جتا}^{٢}\text{س} - \text{جاس}\,\text{جتاس})}{(\text{جاس}+\text{جتاس})}\,\text{ءس}$

$= \int \left(١ - \frac{١}{٢}\,\text{جا}\,٢\text{س}\right)\text{ءس}$

$= \text{س} + \frac{١}{٤}\,\text{جتا}\,٢\text{س} + \text{ث}$

⑩ $\int [(١-\text{ظاس})^{٢} + ٢\,\text{ظاس}]\,\text{ءس}$

$= \int (١ - ٢\,\text{ظاس} + \text{ظا}^{٢}\text{س} + ٢\,\text{ظاس})\,\text{ءس}$

$= \int (١ + \text{ظا}^{٢}\text{س})\,\text{ءس} = \int \text{قا}^{٢}\text{س}\,\text{ءس}$

$= \text{ظاس} + \text{ث}$

⑪ ∫ ((جتا^{٢} س + ١) / جتا س)^{٢} ء س
= ∫ (جتا س + قا س)^{٢} ء س
= ∫ (جتا^{٢} س + ٢ جتا س قا س + قا^{٢} س) ء س
= ∫ (جتا^{٢} س + ٢ + قا^{٢} س) ء س
= ∫ (١/٢ جتا ٢ س + ١/٢ + ٢ + قا^{٢} س) ء س
= ١/٤ جا ٢ س + ٢ ١/٢ س + ظا س + ث

⑫ ∫ ٣ / (جتا^{٢} ٣ س) ء س = ∫ ٣ قا^{٢} ٣ س ء س
= ظا ٣ س + ث

⑬ ∫ قا س (٢ جتا س − ٢ قا س) ء س
= ∫ (٢ − ٢ قا^{٢} س) ء س
= ٢ س − ٢ ظا س + ث

⑭ ∫ (جا ٣ س جتا س − جتا ٣ س جا س) ء س
= ∫ جا (٣ س − س) ء س = ∫ جا ٢ س ء س
= − ١/٢ جتا ٢ س + ث

⑮ ∫ (جتا س جتا π/٤ − جا س جا π/٤) ء س
= ∫ جتا (س + π/٤) ء س
= جا (س + π/٤) + ث

١١

① ∫ ٢ جتا^{٢} س ء س
= ∫ (جتا ٢ س + ١) ء س
= ١/٢ جا ٢ س + س + ث

② ∫ (١ + جتا س)^{٢} ء س
= ∫ (١ + ٢ جتا س + جتا^{٢} س) ء س
= ∫ (١ + ٢ جتا س + ١/٢ + ١/٢ جتا ٢ س) ء س
= ٣/٢ س + ٢ جا س + ١/٤ جا ٢ س + ث

③ ∫ (١ − جا س)^{٢} ء س
= ∫ (١ − ٢ جا س + جا^{٢} س) ء س
= ∫ (١ − ٢ جا س + ١/٢ − ١/٢ جتا ٢ س) ء س
= ٣/٢ س + ٢ جتا س − ١/٤ جا ٢ س + ث

④ ∫ (١ + جا^{٢} س) ء س
= ∫ (١ + ١/٢ − ١/٢ جتا ٢ س) ء س
= ٣/٢ س − ١/٤ جا ٢ س + ث

⑤ ∫ (٤ − جا^{٢} س) ء س
= ∫ (٤ − ١/٢ + ١/٢ جتا ٢ س) ء س
= ٧/٢ س + ١/٤ جا ٢ س + ث

⑥ ∫ (٢ جتا^{٢} س + ظا^{٢} س) ء س
= ∫ (١ + جتا ٢ س + ظا^{٢} س) ء س
= ∫ (قا^{٢} س + جتا ٢ س) ء س
= ظا س + ١/٢ جا ٢ س + ث

⑦ ∫ (قا س + جتا س)^{٢} ء س
= ∫ (قا^{٢} س + جتا^{٢} س + ٢) ء س
= ∫ (قا^{٢} س + ١/٢ + ١/٢ جتا ٢ س + ٢) ء س
= ظا س + ٢ ١/٢ س + ١/٤ جا ٢ س + ث

⑧ ∫ (٢ / قتا^{٢} س − ٣ قا^{٢} ٢ س) ء س
= ∫ (٢ جا^{٢} س − ٣ قا^{٢} ٢ س) ء س
= ∫ (١ − جتا ٢ س − ٣ قا^{٢} ٢ س) ء س
= س − ١/٢ جا ٢ س − ٣/٢ ظا ٢ س + ث

١٢

① ∫ جا^{٥} س جتا س ء س
= ١/٦ جا^{٦} س + ث

② ∫ ٢ ظا س قا^{٢} س ء س
= ظا^{٢} س + ث

③ ∫ (٢ س − جا س) (س^{٢} + جتا س)^{٧} ء س
= ١/٨ (س^{٢} + جتا س)^{٨} + ث

④ ∫ ١٣ ظا^{١٢} س قا^{٢} س ء س
= ظا^{١٣} س + ث

⑤ ∫ ظا^{٢} س قتا^{٢} س ء س
= ∫ قا^{٢} س ء س = ظا س + ث

⑥ ∫ جا س جتا س جتا ٢ س جتا ٤ س ء س
= ∫ ١/٢ جا ٢ س جتا ٢ س جتا ٤ س ء س
= ∫ ١/٤ جا ٤ س جتا ٤ س ء س
= ∫ ١/٨ جا ٨ س ء س
= − ١/٦٤ جتا ٨ س + ث

⑦ ∫ (١ + ظا^{٢} ص) جتا^{٢} ص ء ص
= ∫ قا^{٢} ص جتا^{٢} ص ء ص
= ∫ ء ص = ص + ث

⑧ ∫ جتا س (جا س + ظا س) ء س
= ∫ (جا س جتا س + جا س) ء س
= ١/٢ جا^{٢} س − جتا س + ث

⑨ ∫ (قا^{٢} π/٤ + (١ − ٢ جا^{٢} س) / ظتا ٢ س) ء س
= ∫ (٢ + جتا ٢ س / ظتا ٢ س) ء س
= ∫ (٢ + جا ٢ س) ء س
= ٢ س − ١/٢ جتا ٢ س + ث

⑩ ∫ (جا^{٢} س + جا^{٢} س ظا^{٢} س) ء س
= ∫ جا^{٢} س (١ + ظا^{٢} س) ء س
= ∫ جا^{٢} س قا^{٢} س ء س
= ∫ ظا^{٢} س ء س
= ∫ (قا^{٢} س − ١) ء س
= ظا س − س + ث

⑪ ∫ جتا ٤ س / (جتا ٢ س − جا ٢ س) ء س
= ∫ (جتا^{٢} ٢ س − جا^{٢} ٢ س) / (جتا ٢ س − جا ٢ س) ء س
= ∫ (جتا ٢ س − جا ٢ س) (جتا ٢ س + جا ٢ س) / (جتا ٢ س − جا ٢ س) ء س
= ∫ (جتا ٢ س + جا ٢ س) ء س
= ١/٢ جا ٢ س − ١/٢ جتا ٢ س + ث

⑫ ∫ ٢ ظا^{٢} س / (١ + ظا^{٢} س) ء س
= ∫ (٢ ظا^{٢} س) (جتا^{٢} س) ء س
= ∫ ٢ جا^{٢} س ء س
= ∫ (١ − جتا ٢ س) ء س
= س − ١/٢ جا ٢ س + ث

⑬ ∫ √(١ + جتا ٢ θ) ء θ
= ∫ √(١ + ٢ جتا^{٢} θ − ١) ء θ
= ∫ √(٢ جتا^{٢} θ) ء θ
= ∫ √٢ جتا θ ء θ = √٢ جا θ + ث

⑭ ∫ ٨ جا^{٢} (س/٢) جتا^{٢} (س/٢) ء س
= ∫ ٢ (٢ جا (س/٢) جتا (س/٢))^{٢} ء س
= ∫ ٢ (جا س)^{٢} ء س
= ∫ (١ − جتا ٢ س) ء س
= س − ١/٢ جا ٢ س + ث

⑮ ∫ (جتا^{٢} س − جتا^{٤} س) ء س
= ∫ جتا^{٢} س (١ − جتا^{٢} س) ء س
= ∫ جا^{٢} س جتا^{٢} س ء س
= ∫ (جا س جتا س)^{٢} ء س
= ∫ (١/٢ جا ٢ س)^{٢} ء س
= ∫ ١/٤ جا^{٢} ٢ س ء س
= ∫ ١/٤ (١/٢ − ١/٢ جتا ٤ س) ء س

$= \int \left(\frac{١}{٨} - \frac{١}{٨}\text{ جتا }٤\text{س}\right) \text{ءس}$

$= \frac{١}{٨}\text{س} - \frac{١}{٣٢}\text{ جا }٤\text{س} + \text{ث}$

(١٦) $\int (\text{جتا س} + \text{طا س})^٢ \text{ ءس}$

$= \int (\text{جتا}^٢\text{س} + \text{طا}^٢\text{س} + ٢\text{ جا س}) \text{ ءس}$

$= \int \left(\frac{١}{٢} + \frac{١}{٢}\text{ جتا }٢\text{س} + \text{قا}^٢\text{س} - ١ + ٢\text{ جا س}\right)\text{ءس}$

$= -\frac{١}{٢}\text{س} + \frac{١}{٤}\text{ جا }٢\text{س} + \text{طا س} - ٢\text{ جتا س} + \text{ث}$

(١٧) $\int \frac{(\text{جا س} + \text{جتا س})^٢}{\text{قا}^٢\text{س} + ٢\text{ طا س}}\text{ءس}$

$\int \frac{[\text{جتا س}(\text{طا س} + ١)]^٢}{\text{طا}^٢\text{س} + ١ + ٢\text{ طا س}}\text{ءس}$

$= \int \frac{\text{جتا}^٢\text{س}(\text{طا س}+١)^٢}{(\text{طا س}+١)^٢}\text{ءس}$

$= \int \text{جتا}^٢\text{س ءس} = \int\left(\frac{١}{٢}+\frac{١}{٢}\text{ جتا }٢\text{س}\right)\text{ءس}$

$= \frac{١}{٢}\text{س} + \frac{١}{٤}\text{ جا }٢\text{س} + \text{ث}$

(١٨) $\int ٤\text{ جا}^٤\text{س ءس}$

$= \int ٤(\text{جا}^٢\text{س})^٢\text{ءس}$

$= \int ٤\left(\frac{١}{٢} - \frac{١}{٢}\text{ جتا }٢\text{س}\right)^٢\text{ءس}$

$= \int (١ - \text{جتا }٢\text{س})^٢\text{ءس}$

$= \int (١ + \text{جتا}^٢ ٢\text{س} - ٢\text{ جتا }٢\text{س})\text{ءس}$

$= \int \left(١ + \frac{١}{٢} + \frac{١}{٢}\text{ جتا }٤\text{س} - ٢\text{ جتا }٢\text{س}\right)\text{ءس}$

$= \frac{٣}{٢}\text{س} + \frac{١}{٨}\text{ جا }٤\text{س} - \text{جا }٢\text{س} + \text{ث}$

ثالثاً مسائل تقيس مهارات التفكير

(١) (د)	(٢) (أ)	(٣) (جـ)	(٤) (ب)
(٥) (د)	(٦) (أ)	(٧) (د)	(٨) (أ)
(٩) (أ)	(١٠) (ب)	(١١) (أ)	(١٢) (جـ)
(١٣) (ب)	(١٤) (أ)	(١٥) (جـ)	

إرشادات الحل :

(١) ∵ $\text{د}(\text{س}) = \int \frac{١}{\text{س}}\text{ءس}$ ∴ $\text{دَ}(\text{س}) = \frac{١}{\text{س}}$

∴ $\text{دَ}(٢) = \frac{١}{٢}$

(٢) ∵ $\int \frac{\text{س}^٢}{\text{س}+٢}\text{ءس} + \int \frac{٤\text{س}+٤}{\text{س}+٢}\text{ءس}$

$= \int \frac{\text{س}^٢ + ٤\text{س} + ٤}{\text{س}+٢}\text{ءس}$

$= \int \frac{(\text{س}+٢)^٢}{\text{س}+٢}\text{ءس} = \int (\text{س}+٢)\text{ءس}$

$= \frac{١}{٢}\text{س}^٢ + ٢\text{س} + \text{ث}$

(٣) $\frac{\text{ء}}{\text{ءس}}\int \text{س د}(\text{س})\text{ءس} = \frac{\text{ء}}{\text{ءس}}(\text{س}^٤ - ٨\text{س}^٢)$

∴ $\text{س د}(\text{س}) = ٤\text{س}^٣ - ١٦\text{س}$

∴ $\text{د}(\text{س}) = ٤\text{س}^٢ - ١٦$

∴ $\text{د}(١) = -١٢$

(٤) التكامل $= ٢\int (\text{س} + \text{د}(\text{س}) - ١)$

$[١ + \text{دَ}(\text{س})]\text{ءس}$

$= ٢ \times \frac{١}{٢}(\text{س} + \text{د}(\text{س}) - ١)^٢$

$= (\text{س} + \text{د}(\text{س}) - ١)^٢$

(٥) $\frac{\text{ء}}{\text{ءس}}\int \text{د}(\text{س})\text{ءس}$

$= \frac{\text{ء}}{\text{ءس}}[\text{س}^٣ - ٥\text{س}^٢ + ٧\text{س} + ٢]$

∴ $\text{د}(\text{س}) = ٣\text{س}^٢ - ١٠\text{س} + ٧$

∴ $\text{دَ}(\text{س}) = ٦\text{س} - ١٠$

∴ $\text{دَ}(١) = -٤$

(٦) $\int \sqrt{\text{س}^٤ - ٢ + \frac{١}{\text{س}^٤} + ٤}\ \text{ءس}$

$= \int \sqrt{\text{س}^٤ + ٢ + \frac{١}{\text{س}^٤}}\ \text{ءس}$

$= \int \sqrt{\left(\text{س}^٢ + \frac{١}{\text{س}^٢}\right)^٢}\ \text{ءس}$

$= \int \left(\text{س}^٢ + \frac{١}{\text{س}^٢}\right)\text{ءس}$

$= \frac{١}{٣}\text{س}^٣ - \frac{١}{\text{س}} + \text{ث}$

(٧) ∵ $\text{ر}(\text{س}) = \int [\text{د}(\text{س}) + ١] \cdot \text{دَ}(\text{س})\text{ءس}$

$= \frac{١}{٢}[\text{د}(\text{س}) + ١]^٢ + \text{ث}$

∴ $\text{ر}(٥) - \text{ر}(-٤) = \left(\frac{١}{٢}[\text{د}(٥) + ١]^٢ + \text{ث}\right)$

$- \left(\frac{١}{٢}[\text{د}(-٤) + ١]^٢ + \text{ث}\right)$

$= \frac{١}{٢}\left((٧)^٢ - (٣)^٢\right) = ٢٠$

(٨) $\int \frac{\text{جا س}}{\text{جتا س} \times \text{جتا}^٢\text{س}}\text{ءس} = \int \text{طا س} \times \text{قا}^٢\text{س ءس}$

$= \frac{١}{٢}\text{ طا}^٢\text{س} + \text{ث}$

(٩) $\int \frac{\text{جتا س}(١ + \text{جتا س})}{\text{جتا س}(١ + \text{قا س})}\text{ءس}$

$= \int \frac{\text{جتا س}(١ + \text{جتا س})}{(\text{جتا س} + ١)}\text{ءس}$

$= \int \text{جتا س ءس} = \text{جا س} + \text{ث}$

(١٠) $\int \frac{\text{جتا س}(١ + \text{جتا}^٢\text{س})}{(١ - \text{جتا}^٢\text{س}) + ٢\text{ جتا}^٢\text{س}}\text{ءس}$

$= \int \frac{\text{جتا س}(١ + \text{جتا}^٢\text{س})}{(١ + \text{جتا}^٢\text{س})}\text{ءس}$

$= \int \text{جتا س ءس} = \text{جا س} + \text{ث}$

(١١) $\int \frac{١ - \text{جتا س}}{١ + \text{جتا س}}\text{ءس}$

$= \int \frac{١ - \left(١ - ٢\text{ جا}^٢\frac{\text{س}}{٢}\right)}{١ + \left(٢\text{ جتا}^٢\frac{\text{س}}{٢} - ١\right)}\text{ءس}$

$= \int \frac{٢\text{ جا}^٢\frac{\text{س}}{٢}}{٢\text{ جتا}^٢\frac{\text{س}}{٢}}\text{ءس} = \int \text{طا}^٢\frac{\text{س}}{٢}\text{ءس}$

$= \int \left(\text{قا}^٢\frac{\text{س}}{٢} - ١\right)\text{ءس}$

$= ٢\text{ طا}\frac{\text{س}}{٢} - \text{س} + \text{ث}$

(١٢) $\text{أ} + \text{ب} = \int \text{جتا}^٢\text{س ءس} + \int \text{جا}^٢\text{س ءس}$

$= \int (\text{جتا}^٢\text{س} + \text{جا}^٢\text{س})\text{ءس}$

$= \int (١)\text{ءس} = \text{س} + \text{ث}$

(١٣) $\int \text{طا س}(\text{طا}^٢\text{س} + ١)\text{ءس}$

$= \int \text{طا س قا}^٢\text{س ءس} = \frac{١}{٢}\text{ طا}^٢\text{س} + \text{ث}$

(١٤) ∵ البسط $= \text{ظا}^٢\text{س} - \text{قتا}^٢\text{س} = -١$

، المقام $= \text{طا}^٢\text{س} - \text{قا}^٢\text{س} = -١$

∴ التكامل $= \int ١\text{ ءس} = \text{س} + \text{ث}$

(١٥) $٢\int (٢\text{ جا س جتا س}) \times \text{جا}^٤\text{س ءس}$

$= ٦\int \text{جا}^٥\text{س جتا س ءس} = \text{جا}^٦\text{س} + \text{ث}$

إجابات الوحدة الرابعة

إجابات التمارين على ما سبقت دراسته

١ (١) (ب) (٢) (أ) (٣) (جـ) (٤) (أ) (٥) (ب)

٢ في Δ (س ص ع): ق(∠ ع) = ١٨٠° − (٨٠° + ٦٠°) = ٤٠°

∴ سَ / جا ٨٠° = صَ / جا ٦٠° = ١٠ / جا ٤٠°

∴ سَ = ١٥ سم ، صَ = ١٣ سم.

٣ ∵ ٤ / جا ٥٠° = ٣ / جا ب = حَ / جا حـ ∴ جا ب = (٣ × جا ٥٠°) / ٤

∴ ق(∠ب) = ٣٥° ٤َ

أ، ق(∠ب) = ١٤٤° ٥٦َ (مرفوض)

∴ ق(∠حـ) = ١٨٠° − (٣٥° ٤َ + ٥٠°) = ٩٤° ٥٦َ

∴ حَ / جا ٩٤° ٥٦َ = ٤ / جا ٥٠° ∴ حَ ≃ ٥,٢ سم.

٤ في Δ أ حـ ء:

جتا ء = ((٩)² + (٨)² − (١١)²) / (٢ × ٩ × ٨)

∴ ق(∠ء) ≃ ٨٠° ٢٤َ

، في Δ أ ب حـ:

جتا ب = ((٩)² + (٥)² − (١١)²) / (٢ × ٩ × ٥)

∴ ق(∠ب) ≃ ٩٩° ٣٦َ

، ∵ ق(∠ب) + ق(∠ء) = ١٨٠°

∴ الشكل أ ب حـ ء رباعي دائري.

إجابات تمارين 16

أولا أسئلة الاختيار من متعدد

(١) (ب)	(٢) (أ)	(٣) (د)	(٤) (أ)	(٥) (جـ)
(٦) (جـ)	(٧) (جـ)	(٨) (أ)	(٩) (ب)	(١٠) (د)
(١١) (د)	(١٢) (ب)	(١٣) (د)	(١٤) (د)	(١٥) (ب)
(١٦) (أ)	(١٧) (ب)	(١٨) (د)	(١٩) (د)	(٢٠) (جـ)
(٢١) (أ)	(٢٢) (ب)	(٢٣) (أ)	(٢٤) (جـ)	(٢٥) (ب)
(٢٦) (ب)	(٢٧) (أ)	(٢٨) (ب)		

ثانيا الأسئلة المقالية

١ في Δ أ ب حـ:

أحـ / جا ٩٠° = ٨٥ / جا ٥٥°

∴ أحـ ≃ ١٠٤ مترًا

، ∵ ∠ أحـ ب خارجة عن Δ أحـ ء

∴ ق(∠حـ أ ء) = ٥٥° − ٢٥° = ٣٠°

∴ في Δ أحـ ء: س / جا ٣٠° = ١٠٤ / جا ٢٥°

∴ س ≃ ١٢٣ مترًا.

٢ ∵ ∠ أحـ ب خارجة عن Δ أحـ ء

∴ ق(∠حـ أ ء) = ٧٥° − ٥٢° = ٢٣°

∴ في Δ أحـ ء: أحـ / جا ٥٢° = ٨٠ / جا ٢٣°

∴ أحـ ≃ ١٦١ مترًا.

∴ في Δ أ ب حـ: أب / جا ٧٥° = ١٦١ / جا ٩٠°

∴ أب ≃ ١٥٦ مترًا.

∴ ارتفاع الصخرة ≃ ١٥٦ مترًا.

٣ في Δ أ ب حـ:

أحـ / جا ٩٠° = ٨٠ / جا ٣٥°

∴ أحـ ≃ ١٣٩ مترًا.

، في Δ ء أ حـ:

∵ ق(∠ء أ حـ) = ٣٥° − ٢٤° = ١١°

∴ ١٣٩ / جا ١١٤° = حـ ء / جا ١١° ∴ حـ ء ≃ ٢٩ مترًا

∴ ارتفاع البرج ≃ ٢٩ مترًا.

٤ ق(∠ء أ ب) = ٤٧° − ٢٣° = ٢٤°

، ق(∠ب ء أ)

= ٢٣° + ٩٠° = ١١٣°

∴ في Δ أ ء ب: أب / جا ١١٣° = ٤٨ / جا ٢٤°

∴ أب ≃ ١٠٩ أمتار.

، ∵ ق(∠ب أ حـ) = ٩٠° − ٤٧° = ٤٣°

∴ ب حـ = ١٠٩ × جا ٤٣° ≃ ٧٤ مترًا.

∴ المسافة بين قاعدة المئذنة وقاعدة البرج ≃ ٧٤ مترًا.

٥ في Δ ب حـ هـ:

ب هـ / جا ٦٠° = ٦ / جا ٣٠°

∴ ب هـ ≃ ١٠,٤ مترًا

، في Δ أ ب هـ:

∴ أب / جا ١٥° = ١٠,٤ / جا ٧٥° ∴ أب ≃ ٢,٨ مترًا.

∴ ارتفاع الشجرة = ٨,٨ متر

، بعدها عن المبنى = ١٠,٤ متر.

٦ في Δ أ ب ء: ٥٠٠ / جا ٦٠° = أء / جا ٩٠°

∴ أء ≃ ٥٧٧,٤ مترًا.

، ∵ ∠ أء ب خارجة عن Δ أ ء حـ

∴ ق(∠ء أ حـ) = ٦٠° − ٤٥° = ١٥°

∴ في Δ أ ء حـ: ٥٧٧,٤ / جا ٤٥° = ء حـ / جا ١٥°

∴ ء حـ ≃ ٢١١,٣ مترًا.

∴ سرعة القارب = ٢١١,٣ / ٢ ≃ ١٠٥,٧ متر/دقيقة.

٧ (١) في Δ أ ب حـ:

٨٠ / جا ٥٠° ١٥َ = ب حـ / جا ٣٩° ٤٥َ

∴ ب حـ ≃ ٦٧ مترًا.

، في Δ أ حـ ء: ٨٠ / جا ٣٨° ٤٠َ = حـ ء / جا ٥١° ٢٠َ

∴ حـ ء ≃ ١٠٠ مترًا.

∴ البعد بين القاربين ≃ ١٦٧ مترًا.

(٢) في Δ أ حـ ء:

أحـ / جا ٩٠° = ٨٠ / جا ٥٠° ١٥َ

∴ أحـ = ١٠٤ مترًا.

، في Δ أ ب حـ:

ق(∠ب أ حـ) = ٥٠° ١٥َ − ٣٨° ٤٠َ

= ١١° ٣٥َ

∴ ب حـ / جا ١١° ٣٥َ = ١٠٤ / جا ٣٨° ٤٠َ ∴ ب حـ ≃ ٣٣ مترًا.

∴ البعد بين القاربين ≃ ٣٣ مترًا.

٨ ∵ ق(∠ء ب حـ) = ٧٠° − ٤٥° = ٢٥°

، ق(∠ أ) = ١٨٠° − (٧٠° + ٩٠°)

= ٢٠°

∴ في Δ أ ب ء : ٦٠ / جا ٢٥° = ب ء / جا ٢٠°

∴ ب ء ≈ ٤٨,٦ مترًا.

∴ في Δ ء ب حـ : حـ ء = ب ء جا ٤٥°

= ٤٨,٦ جا ٤٥° ≈ ٣٤ مترًا

∴ ارتفاع التل = ٣٤ مترًا.

٩

في Δ ء ب حـ :

ق(∠ ب ء حـ) = ٩٠° − ٣٥° = ٥٥°

∴ ء حـ / جا ٩٠° = ١٣٠ / جا ٥٥°

∴ ء حـ ≈ ١٥٨,٧ مترًا.

، في Δ أ ب حـ : ق(∠ أ) = ٩٠° − ٥٥° = ٣٥°

∴ في Δ أ ء حـ : أ ء / جا ٢٠° = ١٥٨,٧ / جا ٣٥°

∴ أ ء ≈ ٩٥ مترًا.

∴ البرج يجب أن يرتفع ٩٥ مترًا.

حل آخر : ∵ ب ء = ١٣٠ ظا ٣٥° ، ب أ = ١٣٠ ظا ٥٥°

∴ أ ء = ١٣٠ (ظا ٥٥° − ظا ٣٥°) ≈ ٩٥ مترًا.

١٠

خلال ٣ دقائق المنطاد تحرك رأسيًا مسافة

= ٢٠ × ٣ = ٦٠ مترًا.

ق(∠ ء أ حـ) = ٩٠° − ٣٥° = ٥٥°

، ق(∠ ء ب حـ) = ٩٠° − ١٥° = ٧٥°

في Δ أ ب حـ : ب حـ / جا ٥٥° = ٦٠ / جا ٢٠°

∴ ب حـ ≈ ١٤٣,٧ مترًا.

، في Δ ب ء حـ : ء حـ / جا ٧٥° = ١٤٣,٧ / جا ٩٠°

∴ ء حـ ≈ ١٣٩ مترًا.

∴ بعد الرجل عن مسقط المنطاد على الأرض ≈ ١٣٩ مترًا.

١١

ق(∠ أ حـ ء)

= ٩٠° − ٢٥° = ٦٥°

، ق(∠ أ ء حـ) = ١٨° + ٩٠° = ١٠٨°

∴ ق(∠ حـ أ ء) = ١٨٠° − (١٠٨° + ٦٥°) = ٧°

∴ في Δ أ حـ ء : أ حـ / جا ١٠٨° = ٢٠ / جا ٧°

∴ أ حـ ≈ ١٥٦ مترًا.

∴ في Δ أ ب حـ : أ ب / جا ٢٥° = ١٥٦ / جا ٩٠°

∴ أ ب ≈ ٦٦ مترًا

∴ ارتفاع البرج ≈ ٦٦ مترًا.

١٢

في Δ أ هـ ء : هـ ء = ٢٢ م

، ق(∠ أ ء هـ) = ٤٢° ٣٧'

∴ ق(∠ ء أ هـ)

= ١٨٠° − (٩٠° + ٤٢° ٣٧') = ٤٧° ٢٣'

∴ أ هـ / جا ٤٢° ٣٧' = ٢٢ / جا ٤٧° ٢٣' ∴ أ هـ ≈ ٢٠,٢ م

∴ حـ هـ = ١٠٠ − ٢٠,٢ = ٧٩,٨ م

∴ حـ ء = حـ هـ = ٧٩,٨ م

∴ ارتفاع الصخرة = ٧٩,٨ م

١٣

في Δ أ ب حـ :

ق(∠ أ ب حـ) = ٣٠°

، ق(∠ ب أ حـ) = ٦٠°

∴ أ حـ / جا ٣٠° = ٦٠ / جا ٦٠°

∴ أ حـ ≈ ٣٥ مترًا.

∴ ارتفاع البرج الأول = ١٥٠ − ٣٥ = ١١٥ مترًا.

١٤

في Δ أ ب حـ :

جا ٤٥° = ١٠٠√٢ / أ حـ

∴ أ حـ = ٢٠٠ مترًا.

في Δ هـ ء حـ : جا ٣٠° = ٥٠ / حـ هـ

∴ حـ هـ = ١٠٠ متر

في Δ أ حـ هـ :

(أ هـ)² = (٢٠٠)² + (١٠٠)² − ٢ × ٢٠٠ × ١٠٠ جتا ١٠٥°

∴ أ هـ ≈ ٢٤٦ مترًا

∴ البعد بين البالونين ≈ ٢٤٦ مترًا.

١٥

ق(∠ ب أ حـ)

= ٩٠° − ٣٦° = ٥٤°

، ق(∠ ء هـ ب) = ٩٠° − ٥٤°

= ٣٦°

في Δ أ ب حـ : ب حـ / جا ٥٤° = ٢٠٠ / جا ٣٦°

∴ ب حـ ≈ ٢٧٥,٣ متر

، في Δ هـ ء ب : ء ب / جا ٣٦° = ٢٠٠ / جا ٥٤°

∴ ء ب ≈ ١٤٥,٣ مترًا.

∴ ء حـ = ء ب + ب حـ ≈ ٤٢٠,٦ مترًا.

∴ المسافة بين البالونين ≈ ٤٢٠,٦ مترًا.

١٦

في Δ أ ب حـ : ق(∠ أ) = ٢٧°

∴ ب حـ / جا ٢٧° = ٧٥ / جا ٦٣°

∴ ب حـ ≈ ٣٨ مترًا.

، في Δ هـ حـ ء : ق(∠ هـ) = ٤٢°

∴ حـ ء / جا ٤٢° = ٣٥ / جا ٤٨°

∴ حـ ء ≈ ٣٢ مترًا.

∴ المسافة بين قاعدة البرج وقاعدة الصخرة = ٣٨ + ٣٢

= ٧٠ مترًا.

∵ أ حـ = ٧٥ / جا ٦٣° ≈ ٨٤ مترًا ، حـ هـ = ٣٥ / جا ٤٨°

≈ ٤٧ مترًا.

، ق(∠ أ حـ هـ) = ١٨٠° − (٦٣° + ٤٨°) = ٦٩°

∴ (أ هـ)² = (٨٤)² + (٤٧)² − ٢ × ٨٤ × ٤٧ جتا ٦٩°

∴ أ هـ ≈ ٨٠ مترًا.

∴ البعد بين القمتين ≈ ٨٠ مترًا.

١٧

السفينة أ قطعت ٣٦ كم في ٣ ساعات ، السفينة ب قطعت ٦٠ كم في ٣ ساعات

∴ في Δ أ و ب :

(أ ب)² = (٦٠)² + (٣٦)² − ٢ × ٦٠ × ٣٦ جتا ٨٥°

∴ أ ب ≈ ٦٧ كم ∴ البعد بين السفينتين ≈ ٦٧ كم.

١٨

في Δ أ ب حـ :

ق(∠ حـ) = ١٥°

∴ ق(∠ حـ أ ب) = ١٨٠° − (٦٠° + ١٥°) = ١٠٥°

∴ أ حـ / جا ٦٠° = ٦٠ / جا ١٠٥°

∴ أ حـ ≈ ٥٣,٧٩ مترًا.

١٩

∵ ∠ ب حـ ء خارجة عن Δ أ ب حـ

∴ ق(∠ حـ ب أ) = ٤٦° − ٢٠° = ٢٦°

∴ في Δ أ ب حـ : ب حـ / جا ٢٠° = ٢٠٠ / جا ٢٦°

∴ ب حـ = ٢٣٤ مترًا

∴ في Δ ب حـ ء : $\frac{ب ء}{جا ٤٦°} = \frac{٢٣٤}{جا ٩٠°}$

∴ ب ء = ١٦٨ مترًا. ∴ عرض النهر = ١٦٨ مترًا.

٢٠

ق(∠ حـ أ ب) = ١٧ ٣٦°

، ق(∠ حـ ب أ) = ١٦ ٤٧°

∴ ق(∠ حـ)

= ١٨٠° − (١٧ ٣٦° + ١٦ ٤٧°) = ٢٧ ٩٦°

∴ $\frac{١٠٠٠}{جا ٢٧ ٩٦°} = \frac{حـ ب}{جا ١٧ ٣٦°}$ ∴ حـ ب = ٥٩٦ مترًا.

∴ بعد السفينة عن الميناء (ب) = ٥٩٦ مترًا.

٢١

ق(∠ ب أ حـ) = ٧٩° − ٦٥° = ١٤°

، ق(∠ أ حـ ب) = ٦٥° + ٩٠° = ١٥٥°

∴ في Δ أ ب حـ : $\frac{أ ب}{جا ١٥٥°} = \frac{٢٤}{جا ١٤°}$

∴ أ ب = ٤٢ كم

∴ بعد الهدف عن السفينة = ٤٢ كم.

٢٢

ق(∠ أ ب حـ)

= ٤٥° + ٩٠° + ٥° = ١٤٠°

∴ في Δ أ ب حـ : $\frac{أ حـ}{جا ١٤٠°} = \frac{٤٠}{جا ٢٠°}$

∴ أ حـ = ٥١ كم.

٢٣

في Δ أ ب حـ :

ق(∠ أ حـ ب) = ٦٥ ٣٦°

− ١٢ ٢٧° = ٤ ٩°

ق(∠ أ ب حـ) = ١٨٠° − (١٢ ١٠° + ٤ ٩°) = ٤٥ ١٦٠°

∴ $\frac{أ حـ}{جا ٤٥ ١٦٠°} = \frac{٢٠٠٠}{جا ٤ ٩°}$

∴ أ حـ = $\frac{٢٠٠٠ جا ٤٥ ١٦٠°}{جا ٤ ٩°}$

، من Δ أ حـ ء : $\frac{أ حـ}{جا ٩٠°} = \frac{حـ ء}{جا ١٢ ٢٧°}$

∴ حـ ء = أ حـ جا ١٢ ٢٧°

= $\frac{٢٠٠٠ جا ٤٥ ١٦٠° جا ١٢ ٢٧°}{جا ٤ ٩°}$ = ١٩١٦ مترًا.

∴ ارتفاع التل = ١٩١٦ مترًا.

٢٤

بفرض أن النقطتين هما أ ، ب

من Δ ء ب حـ :

$\frac{ء ب}{جا ٧٠°} = \frac{٩٦}{جا ٨٨°}$

∴ ء ب = ٩٠.٢ كم.

، من Δ ء أ ب : $\frac{أ ب}{جا ٤٠°} = \frac{٩٠.٢}{جا ٤٨°}$ ∴ أ ب = ٧٨ كم.

٢٥

في Δ أ حـ ء : $\frac{ء أ}{ع}$ = ظا هـ

∴ ء أ = ع ظا هـ (١)

، في Δ حـ ء ب : $\frac{ء ب}{ع}$ = ظا ى

∴ ء ب = ع ظا ى (٢)

بجمع (١) ، (٢) : ∴ ء أ + ء ب = ع ظا هـ + ع ظا ى

∴ ف = ع (ظا هـ + ظا ى)

∴ ع = $\frac{ف}{ظا هـ + ظا ى} = \frac{١٢٩٠}{ظا ٤١ ٤٨° + ظا ١٥ ٦٥°}$

= ١١٢٤ مترًا.

٢٦

نفرض أن نقطة ارتكاز السلم على الأرض تبعد عن الحائط س متر في الحالة الأولى.

∴ جتا ى = $\frac{س}{ل}$ (١)

، بعد تحرك السلم مسافة ف متر

∴ جتا هـ = $\frac{س + ف}{ل}$ (٢)

بطرح (١) من (٢) :

∴ جتا هـ − جتا ى = $\frac{س + ف}{ل} - \frac{س}{ل} = \frac{ف}{ل}$

∴ ل = $\frac{ف}{جتا هـ - جتا ى} = \frac{٤٠}{جتا ٣٠° - جتا ٤٠°}$

= ٤٠٠ سم = ٤ أمتار.

∴ طول السلم = ٤ أمتار.

إجابات تمارين 17

أولاً أسئلة الاختيار من متعدد

(١) د	(٢) جـ	(٣) د	(٤) أ	(٥) ب
(٦) ب	(٧) أ	(٨) جـ	(٩) أ	(١٠) أ
(١١) جـ	(١٢) جـ	(١٣) جـ	(١٤) أ	(١٥) د
(١٦) أ	(١٧) جـ	(١٨) أ	(١٩) أ	(٢٠) أ
(٢١) ب	(٢٢) ب	(٢٣) أ	(٢٤) جـ	(٢٥) ب
(٢٦) ب	(٢٧) أ	(٢٨) أ	(٢٩) أ	(٣٠) جـ
(٣١) أ	(٣٢) ب	(٣٣) د	(٣٤) أ	(٣٥) ب
(٣٦) ب	(٣٧) ب	(٣٨) جـ	(٣٩) أ	(٤٠) جـ
(٤١) د	(٤٢) ب	(٤٣) ب	(٤٤) ب	(٤٥) ب
(٤٦) جـ	(٤٧) أ	(٤٨) د	(٤٩) أ	(٥٠) جـ
(٥١) أ	(٥٢) أ	(٥٣) ب	(٥٤) أ	(٥٥) د

ثانياً الأسئلة المقالية

١

(١) جتا ١٠٥° = جتا (٦٠° + ٤٥°)

= جتا ٦٠° جتا ٤٥° − جا ٦٠° جا ٤٥°

$= \frac{١}{٢} \times \frac{١}{\sqrt{٢}} - \frac{\sqrt{٣}}{٢} \times \frac{١}{\sqrt{٢}}$

$= \frac{١ - \sqrt{٣}}{٢\sqrt{٢}} \times \frac{\sqrt{٢}}{\sqrt{٢}} = \frac{\sqrt{٢} - \sqrt{٦}}{٤}$

(٢) جا ٧٥° = جا (٣٠° + ٤٥°)

= جا ٣٠° جتا ٤٥° + جتا ٣٠° جا ٤٥°

$= \frac{١}{٢} \times \frac{١}{\sqrt{٢}} + \frac{\sqrt{٣}}{٢} \times \frac{١}{\sqrt{٢}} = \frac{١ + \sqrt{٣}}{٢\sqrt{٢}} \times \frac{\sqrt{٢}}{\sqrt{٢}}$

$= \frac{\sqrt{٦} + \sqrt{٢}}{٤}$

(٣) جتا ٣٤٥° = جتا (٣٦٠° − ١٥°) = جتا ١٥°

= جتا (٤٥° − ٣٠°)

= جتا ٤٥° جتا ٣٠° + جا ٤٥° جا ٣٠°

$= \frac{١}{\sqrt{٢}} \times \frac{\sqrt{٣}}{٢} + \frac{١}{\sqrt{٢}} \times \frac{١}{٢}$

$= \frac{\sqrt{٣}}{٢\sqrt{٢}} + \frac{١}{٢\sqrt{٢}} = \frac{\sqrt{٣} + ١}{٢\sqrt{٢}} \times \frac{\sqrt{٢}}{\sqrt{٢}}$

$= \frac{\sqrt{٦} + \sqrt{٢}}{٤}$

(٤) ظا (−٧٥°) = −ظا ٧٥° = −ظا (٤٥° + ٣٠°)

$= -\left(\frac{ظا ٤٥° + ظا ٣٠°}{١ - ظا ٤٥° ظا ٣٠°}\right) = -١ \times \frac{١ + \frac{١}{\sqrt{٣}}}{١ - \frac{١}{\sqrt{٣}}}$

$\times \frac{\sqrt{٣}}{\sqrt{٣}} = -١ \times \frac{\sqrt{٣} + ١}{\sqrt{٣} - ١} \times \frac{\sqrt{٣} + ١}{\sqrt{٣} + ١}$

$= -١ \times \frac{(\sqrt{٣} + ١)^٢}{٢} = -١ \times \frac{٤ + ٢\sqrt{٣}}{٢}$

$= -٢ - \sqrt{٣}$

⑤ $\text{جا}\,\frac{١١\pi}{١٢} = \text{جا}\left(\pi - \frac{\pi}{١٢}\right) = \text{جا}\,\frac{\pi}{١٢} = \text{جا}\left(\frac{\pi}{٣} - \frac{\pi}{٤}\right)$

$= \text{جا}\,\frac{\pi}{٣}\,\text{جتا}\,\frac{\pi}{٤} - \text{جتا}\,\frac{\pi}{٣}\,\text{جا}\,\frac{\pi}{٤}$

$= \frac{\sqrt{٣}}{٢} \times \frac{١}{\sqrt{٢}} - \frac{١}{٢} \times \frac{١}{\sqrt{٢}}$

$= \frac{\sqrt{٣} - ١}{٢\sqrt{٢}} \times \frac{\sqrt{٢}}{\sqrt{٢}} = \frac{\sqrt{٦} - \sqrt{٢}}{٤}$

⑥ $\text{ظا}\left(\frac{\pi}{٤} + \frac{\pi}{٣}\right) = \frac{\text{ظا}\,\frac{\pi}{٤} + \text{ظا}\,\frac{\pi}{٣}}{١ - \text{ظا}\,\frac{\pi}{٤}\,\text{ظا}\,\frac{\pi}{٣}}$

$= \frac{١ + \sqrt{٣}}{١ - \sqrt{٣}} \times \frac{١ + \sqrt{٣}}{١ + \sqrt{٣}}$

$= \frac{١ + ٣ + ٢\sqrt{٣}}{١ - ٣} = \frac{٤ + ٢\sqrt{٣}}{-٢}$

$= -٢ - \sqrt{٣}$

٢

① $\text{جتا}(١٠٥^\circ - ١٥^\circ) = \text{جتا}\,٩٠^\circ = \text{صفر}$

② $\text{جا}(٧٥^\circ + ١٥^\circ) = \text{جا}\,٩٠^\circ = ١$

③ $\text{جا}\left(\frac{٧\pi}{١٢} - \frac{٥\pi}{١٢}\right) = \text{جا}\,\frac{٢\pi}{١٢} = \text{جا}\,\frac{\pi}{٦} = \frac{١}{٢}$

④ $\text{جتا}\left(\frac{٥\pi}{١٢} + \frac{\pi}{١٢}\right) = \text{جتا}\,\frac{\pi}{٢} = \text{صفر}$

⑤ $\text{جتا}(١٣^\circ ٥٨' + ٣١^\circ ٢') = \text{جتا}\,٤٥^\circ = \frac{١}{\sqrt{٢}}$

⑥ $\text{ظا}(٣٠^\circ + ١٥^\circ) = \text{ظا}\,٤٥^\circ = ١$

⑦ $\text{ظا}\left(\frac{٢\pi}{٣} + \frac{\pi}{١٢}\right) = \text{ظا}\,\frac{٣}{٤}\pi = -١$

⑧ $-\text{ظا}(١٥٠^\circ - ١٥^\circ) = -\text{ظا}\,١٣٥^\circ = -(-١) = ١$

⑨ $-\text{جتا}(١١٠^\circ + ١٣٠^\circ) = -\text{جتا}\,٢٤٠^\circ$

$= -\text{جتا}(١٨٠^\circ + ٦٠^\circ) = \text{جتا}\,٦٠^\circ = \frac{١}{٢}$

⑩ $\text{جا}\,٢٩^\circ\,\text{جتا}\,٩^\circ - \text{جا}\,٥١^\circ\,\text{جتا}\,٨١^\circ$

$= \text{جتا}\,٥١^\circ\,\text{جا}\,٨١^\circ - \text{جا}\,٥١^\circ\,\text{جتا}\,٨١^\circ$

$= \text{جا}(٨١^\circ - ٥١^\circ) = \text{جا}\,٣٠^\circ = \frac{١}{٢}$

⑪ $\frac{\text{جا}(٢٠^\circ + ٢٥^\circ)}{\text{جتا}\,١٠^\circ\,\text{جتا}\,٣٥^\circ - \text{جا}\,١٠^\circ\,\text{جا}\,٣٥^\circ} = \frac{\text{جا}\,٤٥^\circ}{\text{جتا}\,٤٥^\circ}$

$= \text{ظا}\,٤٥^\circ = ١$

⑫ $\frac{\text{ظا}\,٢٥^\circ + \text{ظا}\,٢٠^\circ}{١ - \text{ظا}\,٢٥^\circ\,\text{ظا}\,٢٠^\circ} = \text{ظا}(٢٥^\circ + ٢٠^\circ) = \text{ظا}\,٤٥^\circ = ١$

٣

① $\text{جتا}(٣\text{س} + ٢\text{س}) = \text{جتا}\,٥\text{س}$

② $\text{جا}(\text{س} + \text{ص} - \text{ص}) = \text{جا}\,\text{س}$

③ $\text{جا}(٢٥ + \text{س} + ٢٠ - \text{س}) = \text{جا}\,٤٥^\circ = \frac{١}{\sqrt{٢}}$

④ $\text{جتا أ جتا ب} + \text{جا أ جا ب} - \text{جتا أ جتا ب} + \text{جا أ جا ب}$

$= ٢\,\text{جا أ جا ب}$

⑤ $\text{ظا}(٤٠^\circ - \text{س} + ٥^\circ + \text{س}) = \text{ظا}\,٤٥^\circ = ١$

٤

① $\text{جا}(\text{أ} + \text{ب})$

$= \text{جا أ جتا ب} + \text{جتا أ جا ب}$

$= \frac{٤}{٥} \times \frac{١٥}{١٧} + \frac{٣}{٥}$

$\times \frac{٨}{١٧} = \frac{٨٤}{٨٥}$

② $\text{ظا}(\text{أ} - \text{ب}) = \frac{\text{ظا أ} - \text{ظا ب}}{١ + \text{ظا أ ظا ب}} = \frac{\frac{٤}{٣} - \frac{٨}{١٥}}{١ + \frac{٤}{٣} \times \frac{٨}{١٥}} = \frac{٣٦}{٧٧}$

③ $\text{جتا}(\text{أ} - \text{ب}) = \text{جتا أ جتا ب} + \text{جا أ جا ب}$

$= \frac{٣}{٥} \times \frac{١٥}{١٧} + \frac{٤}{٥} \times \frac{٨}{١٧} = \frac{٧٧}{٨٥}$

$\therefore \text{قا}(\text{أ} - \text{ب}) = \frac{٨٥}{٧٧}$

④ $\text{ظا}(\text{أ} + \text{ب}) = \frac{\text{ظا أ} + \text{ظا ب}}{١ - \text{ظا أ ظا ب}} = \frac{\frac{٤}{٣} + \frac{٨}{١٥}}{١ - \frac{٤}{٣} \times \frac{٨}{١٥}} = \frac{٨٤}{١٣}$

$\therefore \text{ظتا}(\text{أ} + \text{ب}) = \frac{١٣}{٨٤}$

٥

① $\text{جا}(\text{س} - \text{ص}) = \text{جا س جتا ص} - \text{جتا س جا ص}$

$= \frac{٤}{٥} \times \frac{١٢}{١٣} - \frac{-٣}{٥} \times \frac{-٥}{١٣} = \frac{٣٣}{٦٥}$

② $\text{جتا}(\text{س} - \text{ص}) = \text{جتا س جتا ص} + \text{جا س جا ص}$

$= \frac{-٣}{٥} \times \frac{١٢}{١٣} + \frac{٤}{٥} \times \frac{-٥}{١٣} = \frac{-٥٦}{٦٥}$

③ $\text{ظا}(\text{س} + \text{ص}) = \frac{\text{ظا س} + \text{ظا ص}}{١ - \text{ظا س ظا ص}}$

$= \frac{\frac{-٤}{٣} + \frac{-٥}{١٢}}{١ - \frac{-٤}{٣} \times \frac{-٥}{١٢}} = \frac{-٦٣}{١٦}$

٦

$\text{ظا}(\text{أ} + \text{ب}) = \frac{\text{ظا أ} + \text{ظا ب}}{١ - \text{ظا أ ظا ب}}$

$= \frac{\frac{٣}{٤} - ٧}{١ - \frac{٣}{٤} \times -٧}$

$= -١$

$\therefore \text{أ} + \text{ب} = ١٣٥^\circ$

٧

① $\text{جتا}(\text{أ} - \text{ب})$

$= \text{جتا أ جتا ب} + \text{جا أ جا ب}$

$= \frac{-١٥}{١٧} \times \frac{-٥}{١٣} + \frac{-٨}{١٧} \times \frac{١٢}{١٣} = \frac{-٢١}{٢٢١}$

② $\text{جا}(\text{أ} + \text{ب}) = \text{جا أ جتا ب} + \text{جتا أ جا ب}$

$= \frac{-٨}{١٧} \times \frac{-٥}{١٣} + \frac{-١٥}{١٧} \times \frac{١٢}{١٣} = \frac{-١٤٠}{٢٢١}$

③ $\text{ظا}(\text{أ} - \text{ب}) = \frac{\text{ظا أ} - \text{ظا ب}}{١ + \text{ظا أ ظا ب}}$

$= \frac{\left(\frac{٨}{١٥}\right) - \left(\frac{١٢}{-٥}\right)}{١ + \frac{٨}{١٥} \times \frac{-١٢}{٥}} = \frac{-٢٢٠}{٢١}$

٨

① $\text{جا}(\text{أ} - \text{ب}) = \text{جا أ جتا ب} - \text{جتا أ جا ب}$

$= \frac{١٢}{١٣} \times \frac{-٤}{٥} - \frac{٥}{١٣} \times \frac{٣}{٥} = \frac{-٦٣}{٦٥}$

② $\text{جتا}(\text{أ} + \text{ب}) = \text{جتا أ جتا ب} - \text{جا أ جا ب}$

$= \frac{٥}{١٣} \times \frac{-٤}{٥} - \frac{١٢}{١٣} \times \frac{٣}{٥} = \frac{-٥٦}{٦٥}$

③ $\text{ظا}(\text{أ} - \text{ب}) = \frac{\text{ظا أ} - \text{ظا ب}}{١ + \text{ظا أ ظا ب}} = \frac{\frac{١٢}{٥} - \left(\frac{٣}{-٤}\right)}{١ + \frac{١٢}{٥} \times \left(\frac{٣}{-٤}\right)}$

$= \frac{-٦٣}{١٦}$

$\therefore \text{ظتا}(\text{أ} - \text{ب}) = -\frac{١٦}{٦٣}$

٩

$\text{ظا}(\text{أ} + \text{ب}) = \frac{\text{ظا أ} + \text{ظا ب}}{١ - \text{ظا أ ظا ب}}$

$= \frac{\frac{٢}{٣} + \frac{١}{٥}}{١ - \frac{٢}{٣} \times \frac{١}{٥}} = ١$

، $\text{جتا}(\text{أ} + \text{ب}) = \text{جتا أ جتا ب}$

$- \text{جا أ جا ب}$

$= \frac{-٣}{\sqrt{١٣}} \times \frac{٥}{\sqrt{٢٦}} - \frac{-٢}{\sqrt{١٣}} \times \frac{١}{\sqrt{٢٦}} = \frac{-\sqrt{٢}}{٢}$

، $\because \text{ظا}(\text{أ} + \text{ب}) = ١$

$\therefore$ (أ + ب) تقع في الربع الأول أو الربع الثالث. (١)

، $\text{جتا}(\text{أ} + \text{ب}) = \frac{-\sqrt{٢}}{٢}$

$\therefore$ (أ + ب) تقع في الربع الثاني أو الربع الثالث. (٢)

من (١) ، (٢) :

$\therefore$ أ + ب تقع في الربع الثالث.

$\because \text{ظا}(\text{أ} + \text{ب}) = ١ \qquad \therefore \text{أ} + \text{ب} = \frac{٥\pi}{٤}$

١٠

∵ جـ = ١٨٠° − (أ + ب)

∴ ظا جـ = ظا [١٨٠° − (أ + ب)]

∴ ظا جـ = − ظا (أ + ب)

$= -\frac{\text{ظا أ + ظا ب}}{\text{١ − ظا أ ظا ب}} = \frac{-(\frac{١}{٧} + \frac{٣}{٤})}{١ - \frac{١}{٧} \times \frac{٣}{٤}} = -١$

∴ ق(∠جـ) = ١٣٥°

١١

∵ س + ص = $\frac{\pi}{٢}$ − ع

∴ ظا (س + ص) = ظا ($\frac{\pi}{٢}$ − ع) = ظتا ع = $\frac{١}{\text{ظا ع}}$

∴ $\frac{\text{ظا س + ظا ص}}{\text{١ − ظا س ظا ص}} = \frac{١}{\text{ظا ع}}$

∴ ظا س ظا ع + ظا ص ظا ع = ١ − ظا س ظا ص

∴ ظا س ظا ع + ظا ص ظا ع + ظا س ظا ص = ١

١٢

∵ ظا (أ + ب) = $\frac{\text{ظا أ + ظا ب}}{\text{١ − ظا أ ظا ب}}$

∴ ٣٣ = $\frac{\text{٣ + ظا ب}}{\text{١ − ٣ ظا ب}}$

∴ ٣ + ظا ب = ٣٣ − ٩٩ ظا ب

∴ ١٠٠ ظا ب = ٣٠   ∴ ظا ب = ٠,٣

١٣

ظا (أ + ب) = $\frac{\frac{ن}{١ + ن} + \frac{١}{١ + ٢ن}}{١ - \frac{ن}{(١ + ن)(١ + ٢ن)}}$

بالضرب بسطًا ومقامًا في (١ + ن) (١ + ٢ن)

$= \frac{ن + ٢ن^٢ + ١ + ن}{١ + ٢ن^٢ + ٣ن - ن}$

$= \frac{٢ن^٢ + ٢ن + ١}{٢ن^٢ + ٢ن + ١} = ١$

١٤

$\frac{\text{جتا أ جتا ب − جا أ جا ب}}{\text{جتا أ جتا ب + جا أ جا ب}} = \frac{١}{٢}$

∴ ٢ جتا أ جتا ب − ٢ جا أ جا ب

= جتا أ جتا ب + جا أ جا ب

∴ ٤ جا أ جا ب = ٢ جتا أ جتا ب

∴ ٢ جا أ جا ب = جتا أ جتا ب   (أولًا)

بقسمة الطرفين على جتا أ جا ب

∴ ٢ $\frac{\text{جا أ}}{\text{جتا أ}} = \frac{\text{جتا ب}}{\text{جا ب}}$

∴ ٢ ظا أ = ظتا ب   (ثانيًا)

∴ ٢ × $\frac{٣}{٥}$ = ظتا ب   ∴ ظا ب = $\frac{٥}{٤}$

∴ ظا (أ − ب) = $\frac{\text{ظا أ − ظا ب}}{\text{١ + ظا أ ظا ب}} = \frac{\frac{٣}{٥} - \frac{٥}{٤}}{١ + \frac{٣}{٥} \times \frac{٥}{٤}} = \frac{-١٧}{٣٠}$

١٥

① ∵ ٧٥° = ٤٥° + ٣٠°

∴ ظا ٧٥° = ظا (٤٥° + ٣٠°) = $\frac{\text{ظا ٤٥° + ظا ٣٠°}}{\text{١ − ظا ٤٥° ظا ٣٠°}}$

$= \frac{\text{١ + ظا ٣٠°}}{\text{١ − ظا ٣٠°}}$

∴ ظا ٧٥° − ظا ٣٠° ظا ٧٥° = ١ + ظا ٣٠°

∴ ظا ٧٥° = ١ + ظا ٣٠° + ظا ٣٠° ظا ٧٥°

② الطرف الأيمن

= $\sqrt{٢}$ [جتا ٤٥° جتا س + جا ٤٥° جا س]

= $\sqrt{٢}$ [$\frac{١}{\sqrt{٢}}$ جتا س + $\frac{١}{\sqrt{٢}}$ جا س]

= جتا س + جا س

③ الطرف الأيمن = جتا (س − $\frac{\pi}{٦}$) جتا س

+ جا ($\frac{\pi}{٢}$ − $\frac{٢\pi}{٣}$ + س) جا ($\frac{\pi}{٢}$ − س + $\frac{\pi}{٢}$)

= جتا (س − $\frac{\pi}{٦}$) جتا س + جا (س − $\frac{\pi}{٦}$) جا س

= جتا (س − $\frac{\pi}{٦}$ − س) = جتا ($\frac{-\pi}{٦}$) = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

④ الطرف الأيمن = جتا ١٢٠° جتا أ + جا ١٢٠° جا أ

= $\frac{١}{٢}$ جتا أ + $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ جا أ = $\frac{١}{٢}$ ($\sqrt{٣}$ جا أ − جتا أ)

⑤ الطرف الأيمن = $\frac{\text{ظا ٤٥ − ظا أ}}{\text{١ + ظا ٤٥ ظا أ}} = \frac{\text{١ − ظا أ}}{\text{١ + ظا أ}}$

$= \frac{١ - \frac{\text{جا أ}}{\text{جتا أ}}}{١ + \frac{\text{جا أ}}{\text{جتا أ}}}$ (بالضرب × جتا أ)

$= \frac{\text{جتا أ − جا أ}}{\text{جتا أ + جا أ}}$

⑥ الطرف الأيمن

$= \frac{\text{جا أ جتا ب + جتا أ جا ب + جا أ جتا ب − جتا أ جا ب}}{\text{جتا أ جتا ب − جا أ جا ب + جتا أ جتا ب + جا أ جا ب}}$

$= \frac{\text{٢ جا أ جتا ب}}{\text{٢ جتا أ جتا ب}}$ = ظا أ

⑦ $\frac{\text{ظا أ + ظا ب}}{\text{ظا (أ + ب)}}$ = (ظا أ + ظا ب) × $\frac{\text{١ − ظا أ ظا ب}}{\text{(ظا أ + ظا ب)}}$

∴ $\frac{\text{ظا أ + ظا ب}}{\text{ظا (أ + ب)}}$ = ١ − ظا أ ظا ب   (١)

، $\frac{\text{ظا أ − ظا ب}}{\text{ظا (أ − ب)}}$ = (ظا أ − ظا ب) × $\frac{\text{١ + ظا أ ظا ب}}{\text{(ظا أ − ظا ب)}}$

∴ $\frac{\text{ظا أ − ظا ب}}{\text{ظا (أ − ب)}}$ = ١ + ظا أ ظا ب   (٢)

بجمع (١) ، (٢) : ∴ $\frac{\text{ظا أ + ظا ب}}{\text{ظا (أ + ب)}} + \frac{\text{ظا أ − ظا ب}}{\text{ظا (أ − ب)}}$ = ٢

⑧ الطرف الأيمن = $\frac{\text{ظا أ + ظا ب}}{\text{١ − ظا أ ظا ب}}$

(بقسمة كل من البسط والمقام على ظا أ ظا ب)

$= \frac{\text{ظتا ب + ظتا أ}}{\text{ظتا أ ظتا ب − ١}}$

⑨ الطرف الأيمن = $\frac{\text{جا أ جتا ب + جتا أ جا ب}}{\text{جا أ جتا ب − جتا أ جا ب}}$

(بقسمة كل من البسط والمقام على جتا أ جتا ب)

$= \frac{\text{ظا أ + ظا ب}}{\text{ظا أ − ظا ب}}$

⑩ الطرف الأيمن = $\frac{\text{ظا أ + ظا ب}}{\text{١ − ظا أ ظا ب}} \times \frac{\text{ظا أ − ظا ب}}{\text{١ + ظا أ ظا ب}}$

$= \frac{\text{ظا}^٢\text{ أ − ظا}^٢\text{ ب}}{\text{١ − ظا}^٢\text{ أ ظا}^٢\text{ ب}}$

⑪ الطرف الأيمن

= (جا أ جتا ب + جتا أ جا ب) (جا أ جتا ب − جتا أ جا ب)

= جا² أ جتا² ب − جتا² أ جا² ب

= جا² أ (١ − جا² ب) − جا² ب (١ − جا² أ)

= جا² أ − جا² أ جا² ب − جا² ب + جا² أ جا² ب

= جا² أ − جا² ب

١٦

① جا (٣٠° + ٥°) + جتا (٦٠° + ٥°)

= جا ٣٠° جتا ٥° + جتا ٣٠° جا ٥° + جتا ٦٠° جتا ٥°

− جا ٦٠° جا ٥°

= $\frac{١}{٢}$ جتا ٥° + $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ جا ٥° + $\frac{١}{٢}$ جتا ٥° − $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ جا ٥°

= جتا ٥°

② جتا (٦٠° − ٨°) + جتا (٦٠° + ٨°)

= جتا ٦٠° جتا ٨° + جا ٦٠° جا ٨° + جتا ٦٠° جتا ٨°

− جا ٦٠° جا ٨°

= $\frac{١}{٢}$ جتا ٨° + $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ جا ٨° + $\frac{١}{٢}$ جتا ٨° − $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ جا ٨°

= جتا ٨° = جا ٨٢°

③ جا (٦٠° + ٧°) + جتا (٣٠° + ٧°)

= جا ٦٠° جتا ٧° + جتا ٦٠° جا ٧° + جتا ٣٠° جتا ٧°

− جا ٣٠° جا ٧°

= $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ جتا ٧° + $\frac{١}{٢}$ جا ٧° + $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ جتا ٧° − $\frac{١}{٢}$ جا ٧°

= $\sqrt{٣}$ جتا ٧°

④ ظا (٤٥° − ٥°) = $\frac{\text{ظا ٤٥° − ظا ٥°}}{\text{١ + ظا ٤٥° ظا ٥°}} = \frac{\text{١ − ظا ٥°}}{\text{١ + ظا ٥°}}$

١٧

① جا (س + ١٥°) = $\frac{١}{٢}$

∴ س + ١٥° = ٣٠° ومنها س = ١٥°

أ، س + ١٥° = ١٥٠° ومنها س = ١٣٥°

② جا (س − ٢٠°) = $\frac{١}{٢}$

∴ س − ٢٠° = ٣٠° ومنها س = ٥٠°

أ، س − ٢٠° = ١٥٠° ومنها س = ١٧٠°

(٣) جتا (٢ س − س) = √٣ / ٢
∴ س = ٣٠° أ، س = ٣٣٠°

(٤) ∵ (ظا س − ظا ٢٥°) / (١ + ظا س ظا ٢٥°) = ظا (س − ٢٥°) = ١
∴ س − ٢٥° = ٤٥° ومنها س = ٧٠°
أ، س − ٢٥° = ٢٢٥° ومنها س = ٢٥٠°

(٥) ظا س + ظا ٢٠° = ١ − ظا س ظا ٢٠°
∴ (ظا س + ظا ٢٠°) / (١ − ظا س ظا ٢٠°) = ١
∴ ظا (س + ٢٠°) = ١
∴ س + ٢٠° = ٤٥° ومنها س = ٢٥°
أ، س + ٢٠° = ٢٢٥° ومنها س = ٢٠٥°

(٦) ∵ جا ٦٠° جتا س + جتا ٦٠° جا س = ٢ جا س
∴ √٣/٢ جتا س + ١/٢ جا س = ٢ جا س
∴ √٣/٢ جتا س = ٣/٢ جا س
∴ ظا س = √٣/٢ × ٢/٣ = ١/√٣
∴ س = ٣٠° أ، س = ٢١٠°

(٧) جا س جتا ٣٠° + جتا س جا ٣٠° = ٢ جتا س
√٣/٢ جا س + ١/٢ جتا س = ٢ جتا س
∴ √٣/٢ جا س = ٣/٢ جتا س
∴ جا س / جتا س = √٣ ∴ ظا س = √٣
∴ س = ٦٠° أ، س = ٢٤٠°

(٨) ∵ جا س جتا π/٤ + جتا س جا π/٤ + جا س جتا π/٤ − جتا س جا π/٤ = −١
∴ ٢ جا س جتا π/٤ = −١
∴ ٢ جا س × ١/√٢ = −١ ∴ جا س = −١/√٢
∴ س = ٢٢٥° أ، ٣١٥°

١٨

(١) ∵ جا (١٣٥° − هـ) = ١ ∴ ١٣٥° − هـ = ٩٠°
∴ هـ = ٤٥° ∴ م.ح = {٤٥°}

(٢) ∵ ظا (٤ هـ − ٣ هـ) = √٣
∴ ظا هـ = √٣
∴ هـ = ٦٠° ∴ م.ح = {٦٠°}

(٣) بقسمة الطرفين على ٢ :
∴ √٣/٢ جتا هـ − ١/٢ جا هـ = ١/٢
∴ جتا ٣٠ جتا هـ − جا ٣٠ جا هـ = ١/٢
∴ جتا (٣٠° + هـ) = جتا ٦٠°
∴ هـ = ٣٠° ∴ م.ح = {٣٠°}

(٤) ∵ الطرف الأيمن
= جتا (٩٠° − (٤٥° + ٢ هـ)) جتا (٩٠° − (٦٠° + هـ))
+ جا (٤٥° − ٢ هـ) جا (٣٠° − هـ)
= جتا (٤٥° − ٢هـ) جتا (٣٠° − هـ)
+ جا (٤٥° − ٢هـ) جا (٣٠° − هـ)
= جتا (٤٥° − ٢ هـ − ٣٠° + هـ) = جتا (١٥° − هـ)
∴ جتا (١٥° − هـ) = ١
∴ هـ = ١٥° ∴ م.ح = {١٥°}

١٩

(١) الطرف الأيمن = جا ((أ + ب + جـ)/٢) = جا ٩٠° = ١

(٢) الطرف الأيمن
= جتا ((أ + ب − جـ)/٢) جتا جـ − جا ((أ + ب − جـ)/٢) جا جـ
= جتا ((أ + ب − جـ)/٢ + جـ) = جتا ((أ + ب + جـ)/٢)
= جتا ٩٠° = صفر

(٣) ∵ ظا (أ + ب) = ظا (١٨٠° − جـ)
∴ (ظا أ + ظا ب) / (١ − ظا أ ظا ب) = − ظا جـ
∴ ظا أ + ظا ب = − ظا جـ + ظا أ ظا ب ظا جـ
∴ ظا أ + ظا ب + ظا جـ = ظا أ ظا ب ظا جـ

(٤) ∵ أ + ب + جـ = ١٨٠°
∴ ٣أ/٢ + ٣ب/٢ + ٣جـ/٢ = ٢٧٠°
∴ ظا (٣أ/٢ + ٣ب/٢) = ظا (٢٧٠° − ٣جـ/٢)
∴ (ظا ٣أ/٢ + ظا ٣ب/٢) / (١ − ظا ٣أ/٢ ظا ٣ب/٢) = ظا (٢٧٠° − ٣جـ/٢)
∴ (ظا ٣أ/٢ + ظا ٣ب/٢) / (١ − ظا ٣أ/٢ ظا ٣ب/٢) = ظتا ٣جـ/٢ = ١ / (ظا ٣جـ/٢)
∴ ظا ٣أ/٢ ظا ٣جـ/٢ + ظا ٣ب/٢ ظا ٣جـ/٢ = ١ − ظا ٣أ/٢ ظا ٣ب/٢
∴ ظا ٣أ/٢ ظا ٣ب/٢ + ظا ٣ب/٢ ظا ٣جـ/٢ + ظا ٣جـ/٢ ظا ٣أ/٢ = ١

٢٠

نفرض أن : ق (∠ أ جـ ب) = س
، ق (∠ د جـ ب) = ص
∴ ق (∠ أ جـ د) = س − ص
∴ جتا (∠ أ جـ د) = جتا (س − ص)
= جتا س جتا ص + جا س جا ص
= ٣/٥ × ٣/√١٣ + ٤/٥ × ٢/√١٣
= ١٧ / (٥√١٣) = ١٧√١٣ / ٦٥

٢١

(١) ت = ٣/٢ جتا (٣٦٠° ن − ٧٥° ن)

(٢) بوضع ن = ١
ت = ٣/٢ جتا (٣٦٠° − ٧٥°) = ٣/٢ جتا ٧٥°
= ٣/٢ جتا (٣٠° + ٤٥°)
= ٣/٢ (جتا ٣٠° جتا ٤٥° − جا ٣٠° جا ٤٥°)
= ٣/٢ (√٣/٢ × ١/√٢ − ١/٢ × ١/√٢)
= (٣√٦ − ٣√٢) / ٨

ثالثًا مسائل تقيس مهارات التفكير

١

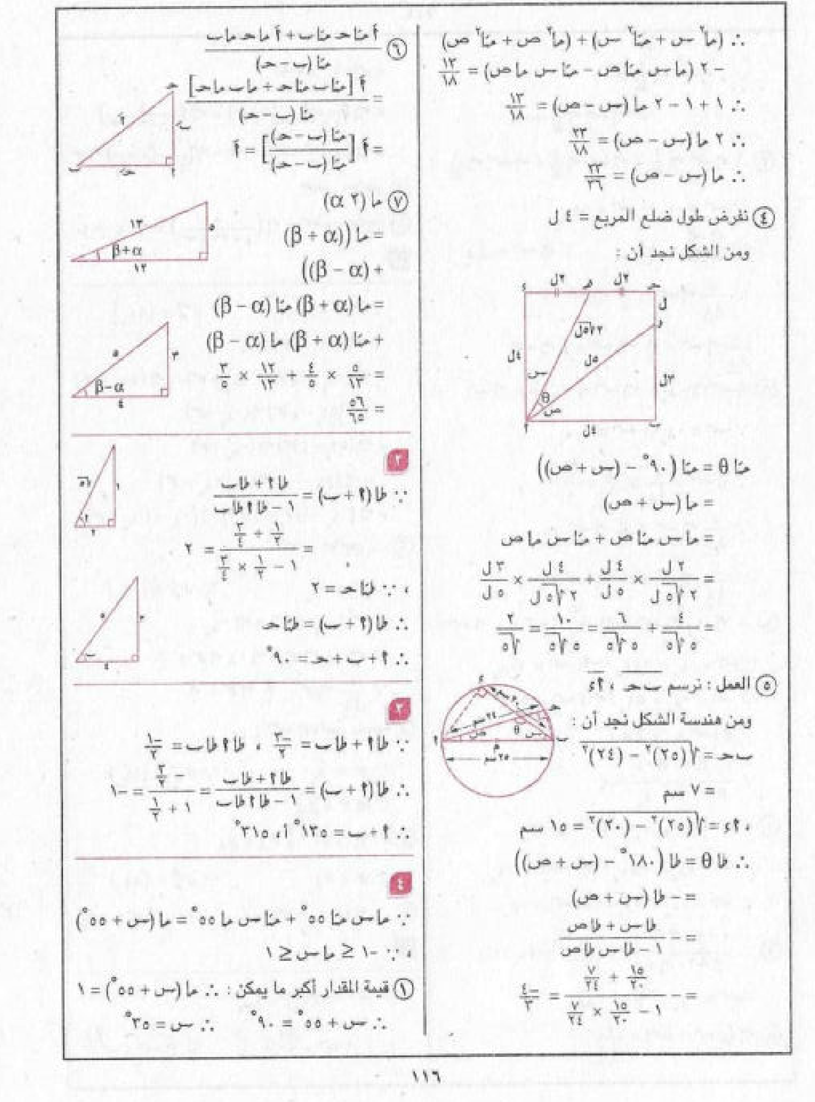
(١) (أ) (٢) (ب) (٣) (جـ) (٤) (ب)
(٥) (أ) (٦) (جـ) (٧) (جـ)

إرشادات لحل رقم ١ :

(١) د (س + π/٤) × د (س − π/٤)
= ظا (س + π/٤) × ظا (س − π/٤)
= (ظا س + ظا π/٤) / (١ − ظا س ظا π/٤) × (ظا س − ظا π/٤) / (١ + ظا س ظا π/٤)
= (ظا س + ١) / (١ − ظا س) × (ظا س − ١) / (١ + ظا س) = −١

(٢) ∵ ظا جـ = ظا (١٨٠° − (أ + ب))
∴ ظا جـ = − ظا (أ + ب) = −(ظا أ + ظا ب) / (١ − ظا أ ظا ب)
∴ ٣ = − ((٣ + س) + (٣ − س)) / (١ − (٣ + س)(٣ − س))
∴ ٣ = −٦ / (١ − (٩ − س²)) ∴ س² − ٨ = −٢
∴ س² = ٦ ∴ س = ±√٦

(٣) ∵ (جا س − جتا ص)² = ١/٣٦
∴ جا² س + جتا² ص − ٢ جا س جتا ص = ١/٣٦ (١)
، (جتا س + جا ص)² = ٢٥/٣٦
∴ جتا² س + جا² ص + ٢ جتا س جا ص = ٢٥/٣٦ (٢)
بجمع (١) ، (٢) :



∴ (جا² س + جتا² س) + (جا² ص + جتا² ص)
− ٢ (جا س جتا ص − جتا س جا ص) = $\frac{١٣}{١٨}$

∴ ١ + ١ − ٢ جا (س − ص) = $\frac{١٣}{١٨}$

∴ ٢ جا (س − ص) = $\frac{٢٣}{١٨}$

∴ جا (س − ص) = $\frac{٢٣}{٣٦}$

④ نفرض طول ضلع المربع = ٤ ل

ومن الشكل نجد أن :

جتا θ = جتا (٩٠° − (س + ص))

= جا (س + ص)

= جا س جتا ص + جتا س جا ص

= $\frac{٢ل}{٢\sqrt{٥}ل} \times \frac{٤ل}{٥ل} + \frac{٤ل}{٢\sqrt{٥}ل} \times \frac{٣ل}{٥ل}$

= $\frac{٤}{٥\sqrt{٥}} + \frac{٦}{٥\sqrt{٥}} = \frac{١٠}{٥\sqrt{٥}} = \frac{٢}{\sqrt{٥}}$

⑤ العمل : نرسم ب ح ، أ ء

ومن هندسة الشكل نجد أن :

ب ح = $\sqrt{(٢٥)^٢ - (٢٤)^٢}$

= ٧ سم

، أ ء = $\sqrt{(٢٥)^٢ - (٢٠)^٢}$ = ١٥ سم

∴ ظا θ = ظا (١٨٠° − (س + ص))

= − ظا (س + ص)

= − $\frac{ظا س + ظا ص}{١ - ظا س ظا ص}$

= − $\frac{\frac{١٥}{٢٠} + \frac{٧}{٢٤}}{١ - \frac{١٥}{٢٠} \times \frac{٧}{٢٤}}$ = $\frac{-٤}{٣}$

⑥ $\frac{أ جتا ح جتا ب + أ جا ح جا ب}{جتا (ب - ح)}$

= $\frac{أ [جتا ب جتا ح + جا ب جا ح]}{جتا (ب - ح)}$

= أ $\left[\frac{جتا (ب - ح)}{جتا (ب - ح)}\right]$ = أ

⑦ جا (٢ α)

= جا ((α + β) + (α − β))

= جا (α + β) جتا (α − β) + جتا (α + β) جا (α − β)

= $\frac{٥}{١٣} \times \frac{٤}{٥} + \frac{١٢}{١٣} \times \frac{٣}{٥}$

= $\frac{٥٦}{٦٥}$

٢

∵ ظا (أ + ب) = $\frac{ظا أ + ظا ب}{١ - ظا أ ظا ب}$

= $\frac{\frac{١}{٢} + \frac{٣}{٤}}{١ - \frac{١}{٢} \times \frac{٣}{٤}}$ = ٢

، ∵ ظتا ح = ٢

∴ ظا (أ + ب) = ظتا ح

∴ أ + ب + ح = ٩٠°

٣

∵ ظا أ + ظا ب = $\frac{-٣}{٢}$ ، ظا أ ظا ب = $\frac{-١}{٢}$

∴ ظا (أ + ب) = $\frac{ظا أ + ظا ب}{١ - ظا أ ظا ب}$ = $\frac{-\frac{٣}{٢}}{١ + \frac{١}{٢}}$ = −١

∴ أ + ب = ١٣٥° ، ٣١٥°

٤

∵ جا س جتا ٥٥° + جتا س جا ٥٥° = جا (س + ٥٥°)

، ∵ −١ ≤ جا س ≤ ١

① قيمة المقدار أكبر ما يمكن : ∴ جا (س + ٥٥°) = ١

∴ س + ٥٥° = ٩٠° ∴ س = ٣٥°

② قيمة المقدار أصغر ما يمكن :

∴ جا (س + ٥٥°) = −١

∴ س + ٥٥° = ٢٧٠° ∴ س = ٢١٥°

٥

∵ جا ح = جا [١٨٠° − (أ + ب)]

= جا (أ + ب)

= جا أ جتا ب + جتا أ جا ب

= $\frac{٣}{٥} \times \frac{١٢}{١٣} + \frac{٤}{٥} \times \frac{٥}{١٣} = \frac{٦٣}{٦٥}$

∴ أ ب : ب ح : أ ح = جا ح : جا أ : جا ب

= $\frac{٦٣}{٦٥}$: $\frac{١٢}{١٣}$: $\frac{٣}{٥}$

= ٦٣ : ٦٠ : ٣٩

= ٢١ : ٢٠ : ١٣

٦

∵ ظا أ = $\frac{\sqrt{٣} + ١}{٢\sqrt{٢}} = \frac{\sqrt{٣}}{٢\sqrt{٢}} + \frac{١}{٢\sqrt{٢}}$

= $\frac{\sqrt{٣}}{٢} \times \frac{١}{\sqrt{٢}} + \frac{١}{٢} \times \frac{١}{\sqrt{٢}}$

= جا ٦٠° جتا ٤٥° + جتا ٦٠° جا ٤٥°

= جا (٦٠° + ٤٥°) = جا ١٠٥°

∴ ظا أ = جا ١٠٥° = جا ٧٥°

، ∵ ∠ أ حادة. ∴ ق (∠ أ) = ٧٥°

٧

بفرض أن طول ضلع المربع ل :

∴ ظا أ = $\frac{ل}{ل}$ = ١ ، ظا ب = $\frac{ل}{٢ل} = \frac{١}{٢}$

، ظا ح = $\frac{ل}{٣ل} = \frac{١}{٣}$

∴ ظا (ب + ح) = $\frac{ظا ب + ظا ح}{١ - ظا ب ظا ح} = \frac{\frac{١}{٢} + \frac{١}{٣}}{١ - \frac{١}{٢} \times \frac{١}{٣}}$

= ١ = ظا أ

∴ ق (∠ أ) = ق (∠ ب) + ق (∠ ح)

٨

جا أ جتا ب + جتا أ جا ب = $\frac{٣}{٥}$

، جا أ جتا ب − جتا أ جا ب = $\frac{١}{١٠}$

بالجمع : ∴ ٢ جا أ جتا ب = $\frac{٧}{١٠}$

، بالطرح : ∴ ٢ جتا أ جا ب = $\frac{٥}{١٠}$

بالقسمة : ∴ ظا أ ظتا ب = $\frac{٧}{٥}$

∴ $\frac{ظا أ}{ظا ب} = \frac{٧}{٥}$ ∴ ٥ ظا أ = ٧ ظا ب

إجابات تمارين 18

أولا أسئلة الاختيار من متعدد

① (ح)	② (ب)	③ (ح)	④ (ب)	⑤ (ب)
⑥ (د)	⑦ (د)	⑧ (ح)	⑨ (ح)	⑩ (ح)
⑪ (د)	⑫ (ح)	⑬ (ب)	⑭ (د)	⑮ (ح)
⑯ (ح)	⑰ (د)	⑱ (ب)	⑲ (ح)	⑳ (ح)
(٢١) (أ)	(٢٢) (ح)	(٢٣) (ح)	(٢٤) (ب)	(٢٥) (ح)
(٢٦) (ح)	(٢٧) (ح)	(٢٨) (ب)	(٢٩) (د)	(٣٠) (ح)
(٣١) (أ)	(٣٢) (ح)	(٣٣) (أ)	(٣٤) (ح)	(٣٥) (ب)
(٣٦) (ب)	(٣٧) (ح)	(٣٨) (ح)	(٣٩) (د)	(٤٠) (أ)
(٤١) (ب)	(٤٢) (ح)	(٤٣) (د)	(٤٤) (ب)	(٤٥) (ب)
(٤٦) (د)	(٤٧) (ب)	(٤٨) (ب)	(٤٩) (ح)	(٥٠) (د)
(٥١) (ب)	(٥٢) (أ)	(٥٣) (ب)	(٥٤) (ح)	(٥٥) (ح)
(٥٦) (أ)	(٥٧) (د)			

ثانيا الأسئلة المقالية

١

① جا ٤٥° = $\frac{١}{\sqrt{٢}}$ ② جتا ٣٠° = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

③ جتا ١٣٥° = $\frac{-١}{\sqrt{٢}}$

④ ٢ [٢ جا ٧.٥° جتا ٧.٥°] جتا ١٥°

= ٢ جا ١٥° جتا ١٥° = جا ٣٠° = $\frac{١}{٢}$

⑤ $\text{ظا}\,45^\circ = 1$

⑥ $\text{ظا}\,\frac{\pi}{3} = \text{ظا}\,60^\circ = \sqrt{3}$

⑦ $\frac{\text{جتا}\,46^\circ}{-\text{جتا}\,46^\circ} = -1$

⑧ $3\,\text{جتا}\,15^\circ\,\text{جا}\,15^\circ = \frac{3}{2}\left[2\,\text{جتا}\,15^\circ\,\text{جا}\,15^\circ\right]$

$= \frac{3}{2}\,\text{جا}\,30^\circ = \frac{3}{4}$

⑨ $\frac{\text{جتا}(40^\circ - 10^\circ)}{\frac{1}{2}\,\text{جا}\,30^\circ} = \frac{2\,\text{جتا}\,30^\circ}{\text{جا}\,30^\circ} = 2\sqrt{3}$

⑩ $\frac{\text{جتا}\,330^\circ}{\frac{1}{2}\,\text{جا}\,150^\circ} = \frac{\text{جتا}\,30^\circ}{\frac{1}{2}\,\text{جا}\,30^\circ} = 2\,\text{ظتا}\,30^\circ = 2\sqrt{3}$

2

$\text{جا}\,2\text{أ} = 2\,\text{جا}\,\text{أ}\,\text{جتا}\,\text{أ}$

$= 2 \times \frac{-3}{5} \times \frac{-4}{5} = \frac{24}{25}$

، $\text{جتا}\,2\text{أ} = \text{جتا}^2\text{أ} - \text{جا}^2\text{أ} = \frac{16}{25} - \frac{9}{25} = \frac{7}{25}$

، $\text{ظا}\,2\text{أ} = \frac{2\,\text{ظا}\,\text{أ}}{1 - \text{ظا}^2\text{أ}} = \frac{2 \times \frac{3}{4}}{1 - \frac{9}{16}} = \frac{3}{2} \times \frac{16}{7} = \frac{24}{7}$

---

3 $\text{جا}\,\frac{\text{ج}}{2} = \sqrt{\frac{1 - \text{جتا}\,\text{ج}}{2}} = \sqrt{\frac{1 - \frac{7}{9}}{2}} = \frac{1}{3}$

، $\text{جتا}\,\frac{\text{ج}}{2} = \sqrt{\frac{1 + \text{جتا}\,\text{ج}}{2}} = \sqrt{\frac{1 + \frac{7}{9}}{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$

، $\text{ظا}\,\frac{\text{ج}}{2} = \frac{\text{جا}\,\frac{\text{ج}}{2}}{\text{جتا}\,\frac{\text{ج}}{2}} = \frac{1}{3} \times \frac{3}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4}$

4

① $\text{جا}\,2\theta = 2\,\text{جا}\,\theta\,\text{جتا}\,\theta$

$= 2 \times \frac{4}{5} \times \frac{3}{5} = \frac{24}{25}$

$\text{جتا}\,2\theta = 1 - 2\,\text{جا}^2\theta$

$= 1 - 2 \times \left(\frac{4}{5}\right)^2 = -\frac{7}{25}$

$\text{ظا}\,2\theta = \frac{\text{جا}\,2\theta}{\text{جتا}\,2\theta} = \frac{24}{25} \times \frac{-25}{7} = \frac{-24}{7}$

② $\text{جا}\,2\theta = 2\,\text{جا}\,\theta\,\text{جتا}\,\theta$

$= 2 \times \frac{2\sqrt{2}}{3} \times \frac{1}{3}$

$= \frac{4\sqrt{2}}{9}$

$\text{جتا}\,2\theta = 2\,\text{جتا}^2\theta - 1$

$= 2 \times \left(\frac{1}{3}\right)^2 - 1 = \frac{-7}{9}$

$\text{ظا}\,2\theta = \frac{\text{جا}\,2\theta}{\text{جتا}\,2\theta} = \frac{4\sqrt{2}}{9} \times \frac{-9}{7} = \frac{-4\sqrt{2}}{7}$

③ $\text{جا}\,2\theta = 2\,\text{جا}\,\theta\,\text{جتا}\,\theta$

$= 2 \times \frac{-2}{\sqrt{13}} \times \frac{-3}{\sqrt{13}}$

$= \frac{12}{13}$

$\text{جتا}\,2\theta = 2\,\text{جتا}^2\theta - 1 = 2 \times \left(\frac{-3}{\sqrt{13}}\right)^2 - 1 = \frac{5}{13}$

$\text{ظا}\,2\theta = \frac{\text{جا}\,2\theta}{\text{جتا}\,2\theta} = \frac{12}{13} \times \frac{13}{5} = \frac{12}{5}$

④ $\text{جا}\,2\theta = 2\,\text{جا}\,\theta\,\text{جتا}\,\theta$

$= 2 \times \frac{-12}{13} \times \frac{5}{13}$

$= \frac{-120}{169}$

$\text{جتا}\,2\theta = 2\,\text{جتا}^2\theta - 1$

$= 2 \times \left(\frac{5}{13}\right)^2 - 1 = \frac{-119}{169}$

$\text{ظا}\,2\theta = \frac{\text{جا}\,2\theta}{\text{جتا}\,2\theta} = \frac{-120}{169} \times \frac{169}{-119} = \frac{120}{119}$

5

① $\text{جا}\,2\theta = 2\,\text{جا}\,\theta\,\text{جتا}\,\theta$

$= 2 \times \frac{\sqrt{15}}{4} \times \frac{1}{4}$

$= \frac{\sqrt{15}}{8}$

$\text{جتا}\,2\theta = 2\,\text{جتا}^2\theta - 1 = 2 \times \left(\frac{1}{4}\right)^2 - 1 = \frac{-7}{8}$

، $\because 0 < \frac{\theta}{2} < 45^\circ$

$\text{جا}\,\frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{1 - \text{جتا}\,\theta}{2}} = \sqrt{\frac{1 - \frac{1}{4}}{2}} = \frac{\sqrt{6}}{4}$

$\text{جتا}\,\frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{1 + \text{جتا}\,\theta}{2}} = \sqrt{\frac{1 + \frac{1}{4}}{2}} = \frac{\sqrt{10}}{4}$

② $\text{جا}\,2\theta = 2\,\text{جا}\,\theta\,\text{جتا}\,\theta$

$= 2 \times \frac{3}{5} \times \frac{-4}{5}$

$= \frac{-24}{25}$

$\text{جتا}\,2\theta = 2\,\text{جتا}^2\theta - 1 = 2 \times \left(\frac{-4}{5}\right)^2 - 1 = \frac{7}{25}$

، $\because 45^\circ < \frac{\theta}{2} < 90^\circ$

$\text{جا}\,\frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{1 - \text{جتا}\,\theta}{2}} = \sqrt{\frac{1 + \frac{4}{5}}{2}} = \frac{3\sqrt{10}}{10}$

$\text{جتا}\,\frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{1 + \text{جتا}\,\theta}{2}} = \sqrt{\frac{1 - \frac{4}{5}}{2}} = \frac{\sqrt{10}}{10}$

③ $\text{جا}\,2\theta = 2\,\text{جا}\,\theta\,\text{جتا}\,\theta$

$= 2 \times \frac{-3}{5} \times \frac{-4}{5} = \frac{24}{25}$

$\text{جتا}\,2\theta = 2\,\text{جتا}^2\theta - 1$

$= 2 \times \left(\frac{-3}{5}\right)^2 - 1 = \frac{-7}{25}$

، $\because \frac{\pi}{2} < \frac{\theta}{2} < \frac{3\pi}{4}$

$\text{جا}\,\frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{1 - \text{جتا}\,\theta}{2}} = \sqrt{\frac{1 + \frac{3}{5}}{2}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$

$\text{جتا}\,\frac{\theta}{2} = -\sqrt{\frac{1 + \text{جتا}\,\theta}{2}} = -\sqrt{\frac{1 - \frac{3}{5}}{2}} = -\frac{\sqrt{5}}{5}$

④ $\text{جا}\,2\theta = 2\,\text{جا}\,\theta\,\text{جتا}\,\theta$

$= 2 \times \frac{12}{13} \times \frac{5}{13} = \frac{120}{169}$

$\text{جتا}\,2\theta = 2\,\text{جتا}^2\theta - 1$

$= 2 \times \left(\frac{5}{13}\right)^2 - 1 = \frac{-119}{169}$

، $\because \frac{\theta}{2}$ حادة

$\text{جا}\,\frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{1 - \text{جتا}\,\theta}{2}} = \sqrt{\frac{1 - \frac{5}{13}}{2}} = \frac{2\sqrt{13}}{13}$

$\text{جتا}\,\frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{1 + \text{جتا}\,\theta}{2}} = \sqrt{\frac{1 + \frac{5}{13}}{2}} = \frac{3\sqrt{13}}{13}$

6

$\text{جا}\,\text{س} = \pm\sqrt{\frac{1 - \text{جتا}\,2\text{س}}{2}} = \pm\sqrt{\frac{1 - \frac{1}{8}}{2}} = \pm\frac{\sqrt{7}}{4}$

$\text{جتا}\,\text{س} = \pm\sqrt{\frac{1 + \text{جتا}\,2\text{س}}{2}} = \pm\sqrt{\frac{1 + \frac{1}{8}}{2}} = \pm\frac{3}{4}$

7

① $\text{جا}\,\text{ج} = 2\,\text{جا}\,\frac{\text{ج}}{2}\,\text{جتا}\,\frac{\text{ج}}{2}$

$= 2 \times \frac{3}{5} \times \frac{4}{5} = \frac{24}{25}$

، $\text{جتا}\,\text{ج} = \text{جتا}^2\frac{\text{ج}}{2} - \text{جا}^2\frac{\text{ج}}{2}$

$= \frac{16}{25} - \frac{9}{25} = \frac{7}{25}$

$\therefore 3\,\text{جا}\,\text{ج} + 4\,\text{جتا}\,\text{ج} = 3 \times \frac{24}{25} + 4 \times \frac{7}{25} = 4$

② $\text{قا}\,\text{ج} = \frac{1}{\text{جتا}\,\text{ج}} = \frac{25}{7}$

، $\text{ظا}\,\text{ج} = \frac{\text{جا}\,\text{ج}}{\text{جتا}\,\text{ج}} = \frac{24}{25} \times \frac{25}{7} = \frac{24}{7}$

$\therefore \text{قا}\,\text{ج} + \text{ظا}\,\text{ج} = \frac{25}{7} + \frac{24}{7} = \frac{49}{7} = 7$

8

$\text{جا}^2\frac{\text{أ}}{2} + \text{جتا}^2\frac{\text{أ}}{2} = 1 \qquad \therefore \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \text{جتا}^2\frac{\text{أ}}{2} = 1$

$\therefore \text{جتا}\,\frac{\text{أ}}{2} = \pm\frac{2\sqrt{2}}{3}$

، $\text{جا}\,\text{أ} = 2\,\text{جا}\,\frac{\text{أ}}{2}\,\text{جتا}\,\frac{\text{أ}}{2} = 2 \times \frac{1}{3} \times \left(\pm\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)$

$= \pm\frac{4\sqrt{2}}{9}$

، $\text{جتا}\,\text{أ} = 2\,\text{جتا}^2\frac{\text{أ}}{2} - 1 = 2 \times \left(\pm\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)^2 - 1 = \frac{7}{9}$

---

9 $\text{جا}\,\text{أ} = \sqrt{\frac{1 - \text{جتا}\,2\text{أ}}{2}} = \sqrt{\frac{1 - \frac{119}{169}}{2}} = \frac{5}{13}$

$\text{جتا}\,\text{أ} = \sqrt{\frac{1 + \text{جتا}\,2\text{أ}}{2}} = \sqrt{\frac{1 + \frac{119}{169}}{2}} = \frac{12}{13}$

$\text{ظا}\,\text{أ} = \frac{\text{جا}\,\text{أ}}{\text{جتا}\,\text{أ}} = \frac{5}{12}$

$\therefore \text{ظا}\,2\text{أ} = \frac{2\,\text{ظا}\,\text{أ}}{1 - \text{ظا}^2\text{أ}} = \frac{2 \times \frac{5}{12}}{1 - \left(\frac{5}{12}\right)^2} = \frac{120}{119}$

10

$\because \text{أ} \in \left]\pi, \frac{3\pi}{2}\right[$

$\therefore \text{جتا}\,\text{أ} = -\frac{5}{13}$

$\text{جا}\,2\text{أ} = 2\,\text{جا}\,\text{أ}\,\text{جتا}\,\text{أ} = 2 \times -\frac{12}{13} \times \frac{-5}{13} = \frac{120}{169}$

، $\because \frac{\text{أ}}{2} \in \left]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}\right[\qquad \therefore$ $\text{جتا}\,\frac{\text{أ}}{2}$ سالبة.

$\therefore \text{جتا}\ \frac{أ}{٢} = -\sqrt{\frac{١ + \text{جتا}\ أ}{٢}} = -\sqrt{\frac{١ + \frac{-٥}{١٣}}{٢}} = -\sqrt{\frac{٤}{١٣}} = -\frac{٢}{\sqrt{١٣}}$

١١

① $\text{جتا}\ ٢أ = ٢\ \text{جتا}^٢\ أ - ١$

$= -\frac{٥٢٧}{٦٢٥}$

② $\text{ظا}\ ٢ب = \frac{٢\ \text{ظا}\ ب}{١ - \text{ظا}^٢\ ب} = \frac{٢ \times \frac{٣}{٤}}{١ - (\frac{٣}{٤})^٢} = \frac{٢٤}{٧}$

$\therefore \text{ظا}(أ - ٢ب) = \frac{\text{ظا}\ أ - \text{ظا}\ ٢ب}{١ + \text{ظا}\ أ\ \text{ظا}\ ٢ب}$

$= \frac{-\frac{٢٤}{٧} - \frac{٢٤}{٧}}{١ + (-\frac{٢٤}{٧} \times \frac{٢٤}{٧})} = \frac{٣٣٦}{٥٢٧}$

١٢

$\because \text{ظا}\ ٢أ = \frac{٢\ \text{ظا}\ أ}{١ - \text{ظا}^٢\ أ} = \frac{\frac{٢}{٣}}{١ - \frac{١}{٩}} = \frac{٢}{٣} \times \frac{٩}{٨} = \frac{٣}{٤}$

، $\text{ظا}\ ٢ب = \frac{٢\ \text{ظا}\ ب}{١ - \text{ظا}^٢\ ب} = \frac{٢ \times \frac{١}{٧}}{١ - \frac{١}{٤٩}} = \frac{٢}{٧} \times \frac{٤٩}{٤٨} = \frac{٧}{٢٤}$

$\therefore \text{ظا}(٢أ + ب) = \frac{\text{ظا}\ ٢أ + \text{ظا}\ ب}{١ - \text{ظا}\ ٢أ\ \text{ظا}\ ب} = \frac{\frac{٣}{٤} + \frac{١}{٧}}{١ - \frac{٣}{٤} \times \frac{١}{٧}}$

$= \frac{٢٥}{٢٨} \times \frac{٢٨}{٢٥} = ١$

، $\text{ظا}(أ - ٢ب) = \frac{\text{ظا}\ أ - \text{ظا}\ ٢ب}{١ + \text{ظا}\ أ\ \text{ظا}\ ٢ب} = \frac{\frac{١}{٣} - \frac{٧}{٢٤}}{١ + \frac{١}{٣} \times \frac{٧}{٢٤}}$

$= \frac{١}{٢٤} \times \frac{٧٢}{٧٩} = \frac{٣}{٧٩}$

، $\text{ظا}\ ٢(أ + ب) = \text{ظا}(٢أ + ٢ب)$

$= \frac{\text{ظا}\ ٢أ + \text{ظا}\ ٢ب}{١ - \text{ظا}\ ٢أ\ \text{ظا}\ ٢ب}$

$= \frac{\frac{٣}{٤} + \frac{٧}{٢٤}}{١ - \frac{٣}{٤} \times \frac{٧}{٢٤}} = \frac{٢٥}{٢٤} \times \frac{٣٢}{٢٥} = \frac{٤}{٣}$

١٣

$\because \text{جا}(٢٧٠° + أ)$

$= \frac{٥}{١٣}$

$\therefore \text{جتا}\ أ = -\frac{٥}{١٣}$

① $\text{جتا}(\pi + ٢أ) = -\text{جتا}\ ٢أ$

$= -٢\ \text{جتا}^٢\ أ + ١ = -٢\left(\frac{-٥}{١٣}\right)^٢ + ١ = \frac{١١٩}{١٦٩}$

② $\text{ظتا}\left(\frac{\pi}{٢} - ٢ب\right) = \text{ظا}\ ٢ب = \frac{٢\ \text{ظا}\ ب}{١ - \text{ظا}^٢\ ب}$

$= \frac{٢ \times \frac{٤}{٣}}{١ - (\frac{٤}{٣})^٢} = -\frac{٢٤}{٧}$

١٤

$\because \text{جا}\ ٢س = \frac{١٢٠}{١٦٩}$ $\quad \therefore ٢س \in]٠ ، \pi[$

$\therefore س \in]٠ ، \frac{\pi}{٢}[$

$(\text{جا}\ س + \text{جتا}\ س)^٢$

$= \text{جا}^٢\ س + \text{جتا}^٢\ س + ٢\ \text{جا}\ س\ \text{جتا}\ س$

$= ١ + \text{جا}\ ٢س = ١ + \frac{١٢٠}{١٦٩} = \frac{٢٨٩}{١٦٩}$

$\therefore \text{جا}\ س + \text{جتا}\ س = \frac{١٧}{١٣}$

١٥

$\text{جتا}\ ٢س = \pm\sqrt{١ - \text{جا}^٢\ ٢س} = \pm\sqrt{١ - \frac{١}{٢٥}} = \pm\frac{٢\sqrt{٦}}{٥}$

① $\text{جا}\ ٣س\ \text{جتا}\ س + \text{جتا}\ ٣س\ \text{جا}\ س$

$= \text{جا}(٣س + س) = \text{جا}\ ٤س$

$= ٢\ \text{جا}\ ٢س\ \text{جتا}\ ٢س$

$= ٢ \times \frac{١}{٥} \times \left(\pm\frac{٢\sqrt{٦}}{٥}\right)$

$= \pm\frac{٤\sqrt{٦}}{٢٥}$

② $\text{جتا}\ ٥س\ \text{جتا}\ س + \text{جا}\ ٥س\ \text{جا}\ س$

$= \text{جتا}(٥س - س) = \text{جتا}\ ٤س$

$= ١ - ٢\ \text{جا}^٢\ ٢س$

$= ١ - \frac{٢}{٢٥} = \frac{٢٣}{٢٥}$

١٦

① $\text{جا}\ س + \text{جتا}\ س = \frac{٧}{٥}$ وبتربيع الطرفين :

$\therefore \text{جا}^٢\ س + ٢\ \text{جا}\ س\ \text{جتا}\ س + \text{جتا}^٢\ س = \frac{٤٩}{٢٥}$

$\therefore ١ + \text{جا}\ ٢س = \frac{٤٩}{٢٥}$ $\quad \therefore \text{جا}\ ٢س = \frac{٢٤}{٢٥}$

② $\text{قا}\ س + \text{قتا}\ س = \frac{١}{\text{جتا}\ س} + \frac{١}{\text{جا}\ س}$

$= \frac{\text{جا}\ س + \text{جتا}\ س}{\text{جا}\ س\ \text{جتا}\ س}$

$= \frac{٧}{٥} \times \frac{٢٥}{١٢} = \frac{٣٥}{١٢}$

③ $\text{جتا}^٢\ ٢س = ١ - \text{جا}^٢\ ٢س$

$= ١ - \left(\frac{٢٤}{٢٥}\right)^٢ = \frac{٤٩}{٦٢٥}$

$\therefore \text{جتا}\ ٢س = \pm\frac{٧}{٢٥}$

١٧

$٨\ \text{جا}\ \frac{هـ}{٢}\ \text{جتا}\ \frac{هـ}{٢} + ٣\left(١ - ٢\ \text{جا}^٢\ \frac{هـ}{٢}\right) = ٣$

$\therefore ٨\ \text{جا}\ \frac{هـ}{٢}\ \text{جتا}\ \frac{هـ}{٢} - ٦\ \text{جا}^٢\ \frac{هـ}{٢} = ٠$

$\therefore ٤\ \text{جتا}\ \frac{هـ}{٢} = ٣\ \text{جا}\ \frac{هـ}{٢}$ $\quad \therefore \text{ظا}\ \frac{هـ}{٢} = \frac{٤}{٣}$

١٨

$\because ٤ + ٣\ \text{ظا}\ ٢ب = ٠$ $\quad \therefore \frac{٢\ \text{ظا}\ ب}{١ - \text{ظا}^٢\ ب} = \frac{-٤}{٣}$

$\therefore -٤ + ٤\ \text{ظا}^٢\ ب = ٦\ \text{ظا}\ ب$

$\therefore ٢\ \text{ظا}^٢\ ب - ٣\ \text{ظا}\ ب - ٢ = ٠$

$\therefore (٢\ \text{ظا}\ ب + ١)(\text{ظا}\ ب - ٢) = ٠$

$\therefore \text{ظا}\ ب = -\frac{١}{٢}$ (مرفوض) أو $\text{ظا}\ ب = ٢$

، $\text{ظا}\ حـ = \text{ظا}\ [١٨٠° - (أ + ب)]$

$= -\text{ظا}(أ + ب) = -\frac{\text{ظا}\ أ + \text{ظا}\ ب}{١ - \text{ظا}\ أ\ \text{ظا}\ ب}$

$= -\frac{٣ + ٢}{١ - ٣ \times ٢} = ١$

$\therefore ق(\angle حـ) = ٤٥°$

١٩

$\text{ظا}\ ٢أ = \frac{٢\ \text{ظا}\ أ}{١ - \text{ظا}^٢\ أ} = \frac{٢ \times \frac{١}{٢}}{١ - \frac{١}{٤}} = \frac{٤}{٣}$

، $\text{ظا}(٢أ + ب) = \frac{\text{ظا}\ ٢أ + \text{ظا}\ ب}{١ - \text{ظا}\ ٢أ\ \text{ظا}\ ب} = \frac{\frac{٤}{٣} + ٧}{١ - \frac{٤}{٣} \times ٧} = -١$

$\therefore ٢أ + ب = ١٣٥°$ أو $٣١٥°$

، $\because$ أ ، ب زاويتان حادتان. $\quad \therefore ٢أ + ب = ١٣٥°$

٢٠

$\because \text{ظا}\ ٢أ = \frac{٣}{٤}$ $\quad \therefore \frac{٢\ \text{ظا}\ أ}{١ - \text{ظا}^٢\ أ} = \frac{٣}{٤}$

$\therefore ٨\ \text{ظا}\ أ = ٣ - ٣\ \text{ظا}^٢\ أ$

$\therefore ٣\ \text{ظا}^٢\ أ + ٨\ \text{ظا}\ أ - ٣ = ٠$

$\therefore (٣\ \text{ظا}\ أ - ١)(\text{ظا}\ أ + ٣) = ٠$

$\therefore \text{ظا}\ أ = \frac{١}{٣}$ أو -٣

، $\because أ \in]٠ ، \frac{\pi}{٢}[$ $\quad \therefore \text{ظا}\ أ = \frac{١}{٣}$

$\therefore \text{ظا}\ ب = \frac{٣}{٢} \times \frac{١}{٣} = \frac{١}{٢}$

$\therefore \text{ظا}(أ + ب) = \frac{\text{ظا}\ أ + \text{ظا}\ ب}{١ - \text{ظا}\ أ\ \text{ظا}\ ب} = \frac{\frac{١}{٣} + \frac{١}{٢}}{١ - \frac{١}{٦}} = ١$

$\therefore أ + ب = ٤٥°$

٢١

① $\text{جتا}\ ٧٥° = \sqrt{\frac{١ + \text{جتا}\ ١٥٠°}{٢}} = \sqrt{\frac{١ - \text{جتا}\ ٣٠°}{٢}}$

$= \sqrt{\frac{١ - \frac{\sqrt{٣}}{٢}}{٢}} = \sqrt{\left(\frac{٢ - \sqrt{٣}}{٤}\right) \times \frac{٢}{٢}}$

$= \sqrt{\frac{٤ - ٢\sqrt{٣}}{٨}} = \sqrt{\frac{(\sqrt{٣} - ١)^٢}{٨}}$

$= \frac{\sqrt{٣} - ١}{٢\sqrt{٢}} = \frac{\sqrt{٦} - \sqrt{٢}}{٤}$

② $\text{ظا}\ ١٥° = \sqrt{\frac{١ - \text{جتا}\ ٣٠}{١ + \text{جتا}\ ٣٠}} = \sqrt{\frac{١ - \frac{\sqrt{٣}}{٢}}{١ + \frac{\sqrt{٣}}{٢}}}$

$= \sqrt{٧ - ٤\sqrt{٣}} = \sqrt{(٢ - \sqrt{٣})^٢}$

$= ٢ - \sqrt{٣}$

(٣) $\text{جتا } ٢٢°٣٠ = \sqrt{\frac{١ + \text{جتا } ٤٥°}{٢}} = \sqrt{\frac{١ + \frac{\sqrt{٢}}{٢}}{٢}}$

$= \frac{١}{٢}\sqrt{٢ + \sqrt{٢}}$

(٤) $\text{ظا } ٦٧°٣٠ = \sqrt{\frac{١ - \text{جتا } ١٣٥°}{١ + \text{جتا } ١٣٥°}} = \sqrt{\frac{١ + \frac{\sqrt{٢}}{٢}}{١ - \frac{\sqrt{٢}}{٢}}}$

$= \sqrt{٣ + ٢\sqrt{٢}} = \sqrt{(\sqrt{٢} + ١)^٢}$

$= \sqrt{٢} + ١$

٢٢

$\text{جتا ص} = \frac{(١٢)^٢ + (١٥)^٢ - (١٨)^٢}{٢ \times ١٢ \times ١٥} = \frac{١}{٨}$ (١)

، $\text{جتا س} = \frac{(١٨)^٢ + (١٥)^٢ - (١٢)^٢}{٢ \times ١٨ \times ١٥} = \frac{٣}{٤}$

$\therefore \text{جتا ٢ س} = ٢ \text{ جتا}^٢ \text{ س} - ١$

$= ٢ \times \left(\frac{٣}{٤}\right)^٢ - ١ = \frac{١}{٨}$ (٢)

من (١) ، (٢) : $\therefore \text{جتا ص} = \text{جتا ٢ س}$

$\therefore \text{ق}(\angle \text{ص}) = ٢ \text{ ق}(\angle \text{س})$

٢٣

أ $= ٣$ س ، ب حـ $= ٤$ س ، حـ أ $= ٥$ س حيث س $\in \text{ح}^+$

$\therefore \text{جتا أ} = \frac{١٦ \text{ س}^٢ + ٢٥ \text{ س}^٢ - ٩ \text{ س}^٢}{٢ \times ٤ \text{ س} \times ٥ \text{ س}} = \frac{٤}{٥}$

$\therefore \text{جا أ} = \sqrt{١ - \frac{١٦}{٢٥}} = \frac{٣}{٥} \quad \therefore \text{ظا أ} = \frac{٣}{٥} \times \frac{٥}{٤} = \frac{٣}{٤}$

$\therefore \text{ظا ٢ أ} = \frac{٢ \times \frac{٣}{٤}}{١ - \frac{٩}{١٦}} = \frac{٢٤}{٧}$

حل آخر : من المعطيات ينتج أن :

$\triangle$ أ ب حـ قائم الزاوية في حـ

من الرسم : $\text{جا أ} = \frac{٣ \text{ س}}{٥ \text{ س}} = \frac{٣}{٥}$

، $\text{ظا أ} = \frac{٣ \text{ س}}{٤ \text{ س}} = \frac{٣}{٤}$

، $\text{ظا ٢ أ} = \frac{٢ \times \frac{٣}{٤}}{١ - \frac{٩}{١٦}} = \frac{٢٤}{٧}$

٢٤

$\because$ أ $=$ حـ $\quad \therefore \text{ق}(\angle \text{أ}) = \text{ق}(\angle \text{حـ})$

$\therefore \text{جا ب} = \text{جا}\left[١٨٠° - (\text{أ} + \text{حـ})\right] = \text{جا}(١٨٠° - ٢ \text{ أ})$

$= \text{جا ٢ أ} = ٢ \text{ جا أ جتا أ} = ٢ \text{ جا أ جتا حـ}$

٢٥

(١) الطرف الأيمن $= \frac{\text{جتا}^٢ \text{ أ} - \text{جا}^٢ \text{ أ}}{\text{جتا أ} - \text{جا أ}}$

$= \frac{(\text{جتا أ} - \text{جا أ})(\text{جتا أ} + \text{جا أ})}{\text{جتا أ} - \text{جا أ}}$

$= \text{جتا أ} + \text{جا أ}$

(٢) الطرف الأيمن $= ٢ \text{ جا ٤ أ جتا ٤ أ}$

$= ٤ \text{ جا ٢ أ جتا ٢ أ جتا ٤ أ}$

$= ٨ \text{ جا أ جتا أ جتا ٢ أ جتا ٤ أ}$

(٣) الطرف الأيمن $= ٢ \text{ جا}^٢ \text{ أ} + \text{جتا ٢ أ} = ٢ \text{ جا}^٢ \text{ أ} + ١ - ٢ \text{ جا}^٢ \text{ أ} = ١$

(٤) الطرف الأيمن $= \text{جتا } ٢\left(\frac{\pi}{٤} - \frac{٥ \text{ س}}{٢}\right)$

$= \text{جتا}\left(\frac{\pi}{٢} - ٥ \text{ س}\right) = \text{جا ٥ س}$

(٥) الطرف الأيمن $= (\text{جتا}^٢ \text{ س} - \text{جا}^٢ \text{ س})$

$(\text{جتا}^٢ \text{ س} + \text{جا}^٢ \text{ س})$

$= (\text{جتا ٢ س})(١) = \text{جتا ٢ س}$

(٦) الطرف الأيمن $= \frac{\text{جا أ} + ١ - ٢ \text{ جا}^٢ \text{ أ}}{١ + ٢ \text{ جا أ}}$

$= \frac{-[٢ \text{ جا}^٢ \text{ أ} - \text{جا أ} - ١]}{١ + ٢ \text{ جا أ}}$

$= \frac{-(٢ \text{ جا أ} + ١)(\text{جا أ} - ١)}{١ + ٢ \text{ جا أ}} = ١ - \text{جا أ}$

(٧) الطرف الأيسر $= \frac{٢ \text{ ظا} \frac{\text{أ}}{٢}}{\text{قا}^٢ \frac{\text{أ}}{٢}} = \frac{\frac{٢ \text{ جا} \frac{\text{أ}}{٢}}{\text{جتا} \frac{\text{أ}}{٢}}}{\frac{١}{\text{جتا}^٢ \frac{\text{أ}}{٢}}} \times \text{جتا}^٢ \frac{\text{أ}}{٢}$

$= ٢ \text{ جا} \frac{\text{أ}}{٢} \text{ جتا} \frac{\text{أ}}{٢} = \text{جا أ}$

(٨) الطرف الأيسر $= \frac{\text{جا س}(١ - ٢ \text{ جا}^٢ \text{ س})}{\text{جتا س}(٢ \text{ جتا}^٢ \text{ س} - ١)}$

$= \text{ظا س} \times \frac{\text{جتا ٢ س}}{\text{جتا ٢ س}} = \text{ظا س}$

(٩) الطرف الأيمن $= \frac{٢ \text{ جا س جتا س}}{١ + ٢ \text{ جتا}^٢ \text{ س} - ١}$

$= \frac{٢ \text{ جا س جتا س}}{٢ \text{ جتا}^٢ \text{ س}} = \frac{\text{جا س}}{\text{جتا س}}$

$= \text{ظا س}$

(١٠) الطرف الأيسر $= \frac{\text{قا}^٢ \text{ س}}{١ - \text{ظا}^٢ \text{ س}} = \frac{\frac{١}{\text{جتا}^٢ \text{ س}}}{١ - \frac{\text{جا}^٢ \text{ س}}{\text{جتا}^٢ \text{ س}}}$

(بالضرب × $\text{جتا}^٢$ س)

$= \frac{١}{\text{جتا}^٢ \text{ س} - \text{جا}^٢ \text{ س}} = \frac{١}{\text{جتا ٢ س}}$

$= \text{قا ٢ س}$

(١١) الطرف الأيمن $= \frac{٢ \text{ جا س جتا س} + \text{جا س}}{١ + \text{جتا س} + ٢ \text{ جتا}^٢ \text{ س} - ١}$

$= \frac{\text{جا س}(٢ \text{ جتا س} + ١)}{\text{جتا س}(٢ \text{ جتا س} + ١)} = \text{ظا س}$

(١٢) الطرف الأيمن

$= \frac{١ - ١ + ٢ \text{ جا}^٢ \frac{\text{حـ}}{٢} + ٢ \text{ جا} \frac{\text{حـ}}{٢} \text{ جتا} \frac{\text{حـ}}{٢}}{١ + ٢ \text{ جتا}^٢ \frac{\text{حـ}}{٢} - ١ + ٢ \text{ جا} \frac{\text{حـ}}{٢} \text{ جتا} \frac{\text{حـ}}{٢}}$

$= \frac{٢ \text{ جا} \frac{\text{حـ}}{٢}\left(\text{جا} \frac{\text{حـ}}{٢} + \text{جتا} \frac{\text{حـ}}{٢}\right)}{٢ \text{ جتا} \frac{\text{حـ}}{٢}\left(\text{جتا} \frac{\text{حـ}}{٢} + \text{جا} \frac{\text{حـ}}{٢}\right)} = \text{ظا} \frac{\text{حـ}}{٢}$

(١٣) الطرف الأيمن $= \frac{\text{جتا}^٢ \text{ أ}}{\text{ظتا} \frac{\text{أ}}{٢} - \text{ظا} \frac{\text{أ}}{٢}}$

(وبضرب كل من البسط والمقام في $\text{جا} \frac{\text{أ}}{٢} \text{ جتا} \frac{\text{أ}}{٢}$)

$= \frac{\text{جتا}^٢ \text{ أ} \times \text{جا} \frac{\text{أ}}{٢} \text{ جتا} \frac{\text{أ}}{٢}}{\text{جتا}^٢ \frac{\text{أ}}{٢} - \text{جا}^٢ \frac{\text{أ}}{٢}} = \frac{\text{جتا}^٢ \text{ أ} \times \frac{١}{٢} \text{ جا أ}}{\text{جتا أ}}$

$= \frac{١}{٢} \text{ جا أ جتا أ} = \frac{١}{٤} \text{ جا ٢ أ}$

(١٤) $\frac{١ - \text{جا ٢ هـ}}{\text{جتا ٢ هـ}} = \frac{\text{جتا}^٢ \text{ هـ} + \text{جا}^٢ \text{ هـ} - ٢ \text{ جا هـ جتا هـ}}{\text{جتا}^٢ \text{ هـ} - \text{جا}^٢ \text{ هـ}}$

$= \frac{(\text{جتا هـ} - \text{جا هـ})^٢}{(\text{جتا هـ} - \text{جا هـ})(\text{جتا هـ} + \text{جا هـ})}$

$= \frac{\text{جتا هـ} - \text{جا هـ}}{\text{جتا هـ} + \text{جا هـ}}$

«وبالقسمة على جتا هـ بسطًا ومقامًا»

$= \frac{١ - \text{ظا هـ}}{١ + \text{ظا هـ}}$

(١٥) الطرف الأيمن

$= \frac{١ - \left(١ - ٢ \text{ جا}^٢ \frac{\text{حـ}}{٢}\right)}{١ + ٢ \text{ جتا}^٢ \frac{\text{حـ}}{٢} - ١} = \frac{٢ \text{ جا}^٢ \frac{\text{حـ}}{٢}}{٢ \text{ جتا}^٢ \frac{\text{حـ}}{٢}} = \text{ظا}^٢ \frac{\text{حـ}}{٢}$

(١٦) الطرف الأيمن $= ٤ \text{ جا أ جتا}^٣ \text{ أ} - ٢ \text{ جا أ جتا أ}$

$= ٢ \text{ جا أ جتا أ}(٢ \text{ جتا}^٢ \text{ أ} - ١)$

$= (٢ \text{ جا أ جتا أ})(\text{جتا ٢ أ})$

$= \text{جا ٢ أ جتا ٢ أ} = \frac{١}{٢} \text{ جا ٤ أ}$

(١٧) الطرف الأيمن $= \frac{١ - (١ - ٢ \text{ جا}^٢ \text{ أ})}{٣ + ٢ \text{ جتا}^٢ \text{ أ} - ١} = \frac{٢ \text{ جا}^٢ \text{ أ}}{٢ + ٢ \text{ جتا}^٢ \text{ أ}}$

$= \frac{\text{جا}^٢ \text{ أ}}{١ + \text{جتا}^٢ \text{ أ}}$

(١٨) الطرف الأيمن $= \frac{\frac{\text{جتا } \theta}{\text{جا } \theta} - ١}{\frac{\text{جتا } \theta}{\text{جا } \theta} + ١}$ بالضرب × جا θ

$= \frac{\text{جتا } \theta - \text{جا } \theta}{\text{جتا } \theta + \text{جا } \theta} \times \frac{\text{جتا } \theta + \text{جا } \theta}{\text{جتا } \theta + \text{جا } \theta} = \frac{\text{جتا}^٢ \theta - \text{جا}^٢ \theta}{(\text{جتا } \theta + \text{جا } \theta)^٢}$

$= \frac{\text{جتا } ٢\theta}{\text{جتا}^٢ \theta + \text{جا}^٢ \theta + ٢ \text{ جا } \theta \text{ جتا } \theta} = \frac{\text{جتا } ٢\theta}{١ + \text{جا } ٢\theta}$

(١٩) الطرف الأيمن

$= \text{جا}^٢ \text{ س} + \text{جتا}^٢ \text{ س} + ٢ \text{ جا س جتا س}$

$- \text{جا}^٢ \text{ س} - \text{جتا}^٢ \text{ س} + ٢ \text{ جا س جتا س}$

$= ٤ \text{ جا س جتا س} = ٢ \text{ جا ٢ س}$

(٢٠) $٢ \text{ جتا}(٤٥° - ٢ \text{ أ}) \text{ جتا}(٤٥° + ٢ \text{ أ})$

$= ٢ (\text{جتا } ٤٥° \text{ جتا ٢ أ} + \text{جا } ٤٥° \text{ جا ٢ أ})$

$(\text{جتا } ٤٥° \text{ جتا ٢ أ} - \text{جا } ٤٥° \text{ جا ٢ أ})$

$= ٢ (\text{جتا}^٢ ٤٥ \text{ جتا}^٢ \text{ ٢ أ} - \text{جا}^٢ ٤٥° \text{ جا}^٢ \text{ ٢ أ})$

$= ٢ \left(\frac{١}{٢} \text{ جتا}^٢ \text{ ٢ أ} - \frac{١}{٢} \text{ جا}^٢ \text{ ٢ أ}\right)$

$= \text{جتا ٤ أ} = ١ - ٢ \text{ جا}^٢ \text{ ٢ أ} = ١ - ٢ (٢ \text{ جا أ جتا أ})^٢$

$= ١ - ٨ \text{ جا}^٢ \text{ أ جتا}^٢ \text{ أ}$

حل آخر :

٢ حتا (٤٥° − ٢أ) حتا (٤٥° + ٢أ)

= ٢ حا (٩٠° − ٤٥° + ٢أ) حتا (٤٥° + ٢أ)

= ٢ حا (٤٥° + ٢أ) حتا (٤٥° + ٢أ)

= حا (٩٠° + ٤أ) = حتا ٤أ = ١ − ٢ حا٢ ٢أ

= ١ − ٢ (٢ حا أ حتا أ)٢ = ١ − ٨ حا٢ أ حتا٢ أ

(٢١) الطرف الأيمن

= حا٢ أ − ٢ حا أ حا ب + حا٢ ب + حتا٢ أ
+ ٢ حتا أ حتا ب + حتا٢ ب

= حا٢ أ + حتا٢ أ + حا٢ ب + حتا٢ ب − ٢ حا أ حا ب
+ ٢ حتا أ حتا ب

= ١ + ١ + ٢ (حتا أ حتا ب − حا أ حا ب)

= ٢ + ٢ حتا (أ + ب)

= ٢ + ٢ [٢ حتا٢ ((أ + ب)/٢) − ١]

= ٤ حتا٢ ((أ + ب)/٢)

(٢٢) الطرف الأيمن = (± √((١ + حتا ٢أ)/٢))٢ = (١ + حتا ٢أ)/٢

وبوضع أ = ١٥°

∴ حتا٢ ١٥° = (١ + حتا ٣٠°)/٢ = (٢ + √٣)/٤

∴ حتا ١٥° = ١/٢ √(٢ + √٣)

= ١/٢ √(((١ + √٣)/√٢)٢) = ١/٢ ((١ + √٣)/√٢) = (√٦ + √٢)/٤

(٢٣) الطرف الأيمن

= ١/حا ٢س + حتا ٢س/حا ٢س = (١ + حتا ٢س)/حا ٢س

= (١ + ٢ حتا٢ س − ١)/(٢ حاس حتاس) = (٢ حتا٢ س)/(٢ حاس حتاس)

= حتاس/حاس = ظتاس

بوضع س = ١٥°

ظتا ١٥° = قتا ٣٠° + ظتا ٣٠° = ٢ + √٣

(٢٤) الطرف الأيسر

= (١ − حا٢ س/حتا٢ س)/(١ + حا٢ س/حتا٢ س) (بالضرب × حتا٢ س)

= (حتا٢ س − حا٢ س)/(حتا٢ س + حا٢ س) = حتا ٢س

، بوضع س = ١٥°

∴ (١ − ظا٢ ١٥°)/(١ + ظا٢ ١٥°) = حتا ٣٠° = √٣/٢

٢٦

(١) ١٦ حتا ٢٠° حتا ٤٠° حتا ٦٠° حتا ٨٠°

= (١٦ حا ٢٠° حتا ٢٠° حتا ٤٠° حتا ٦٠° حتا ٨٠°)/(حا ٢٠°)

= (٨ (حا ٤٠°) حتا ٤٠° حتا ٦٠° حتا ٨٠°)/(حا ١٦٠°)

= (٤ (حا ٨٠°) حتا ٦٠° حتا ٨٠°)/(حا ١٦٠°)

= (٢ (حا ١٦٠°) × ١/٢)/(حا ١٦٠°) = ١

(٢) الطرف الأيمن

= حا (٥π/٢٤) حتا (٥π/٢٤) (حتا٢ (٥π/٢٤) − حا٢ (٥π/٢٤))

= ١/٢ حا (١٠π/٢٤) حتا (١٠π/٢٤)

= ١/٤ حا (٢٠π/٢٤) = ١/٤ حا (٥π/٦) = ١/٤ × ١/٢ = ١/٨

(٣) ∵ ظا ٣٠° = (٢ ظا ١٥°)/(١ − ظا٢ ١٥°)

∴ ١/√٣ = (٢ ظا ١٥°)/(١ − ظا٢ ١٥°)

∴ ١ − ظا٢ ١٥° = ٢ √٣ ظا ١٥°

∴ ظا٢ ١٥° + ٢ √٣ ظا ١٥° = ١

٢٧

(١) ∵ حا ٢س = حاس

∴ ٢ حاس حتاس = حاس

∴ حاس (٢ حتاس − ١) = ٠

∴ حاس = ٠ أ، حتاس = ١/٢

∴ س = π أ، س = π/٣ أ، س = ٥π/٣

∴ م.ح = {π/٣ ، π ، ٥π/٣}

(٢) ∵ حا ٢س = √٣ حاس

∴ ٢ حاس حتاس = √٣ حاس

∴ ٢ حاس حتاس − √٣ حاس = ٠

∴ حاس (٢ حتاس − √٣) = ٠

∴ حاس = ٠ ومنها س = π

أ، حتاس = √٣/٢ ومنها س = π/٦ أ، ١١π/٦

∴ م.ح = {π/٦ ، π ، ١١π/٦}

(٣) ∵ حتا ٢س + حاس = ٠

∴ ١ − ٢ حا٢ س + حاس = ٠

∴ ٢ حا٢ س − حاس − ١ = ٠

∴ (٢ حاس + ١)(حاس − ١) = ٠

∴ حاس = −١/٢ ومنها س = ٧π/٦ أ، ١١/٦ π

أ، حاس = ١ ومنها س = π/٢

∴ م.ح = {٧π/٦ ، ١١π/٦ ، π/٢} .

(٤) ∵ √٣ حتا ٢س = حتاس

∴ √٣ (٢ حتا٢ س − ١) = حتاس

∴ ٢ √٣ حتا٢ س − حتاس − √٣ = ٠

∴ (٢ حتاس − √٣)(√٣ حتاس + ١) = ٠

∴ حتاس = √٣/٢ ومنها س = ٣٠° أ، ٣٣٠°

أ، حتاس = −١/√٣ ومنها س

= ١٢٥° ١٦َ أ، ٢٣٤° ٤٤َ

∴ م.ح = {٣٠° ، ٣٣٠° ، ١٢٥° ١٦َ ، ٢٣٤° ٤٤َ}

(٥) ∵ حتا ٢س + ٣ حتاس + ٢ = ٠

∴ ٢ حتا٢ س − ١ + ٣ حتاس + ٢ = ٠

∴ ٢ حتا٢ س + ٣ حتاس + ١ = ٠

∴ (٢ حتاس + ١)(حتاس + ١) = ٠

∴ حتاس = −١/٢ ومنها س = ٢π/٣ أ، ٤π/٣

أ، حتاس = −١ ومنها س = π

∴ م.ح = {π ، ٢π/٣ ، ٤π/٣}

(٦) ∵ حا٢ ٢س + ٤ حاس حتاس + ١ = ٠

∴ حا٢ ٢س + ٢ حا ٢س + ١ = ٠

∴ (حا ٢س + ١)٢ = ٠ ∴ حا ٢س = −١

∴ ٢س = ٢٧٠°

أ، ٢س = ٢٧٠° + ٣٦٠° = ٦٣٠° ∴ س = ٣π/٤

أ، س = ٣١٥° ∴ م.ح = {٣π/٤ ، ٧π/٤}

(٧) ∵ حتا٢ س − حا٢ س = −١/٢

∴ حتا ٢س = −١/٢

∴ الحل العام هو : ٢س = ± ٢π/٣ + ٢ ن π

حيث ن ∈ ص

∴ س = ± π/٣ + ن π

عندما ن = ٠

∴ س = π/٣ أ، −π/٣ + ٢π = ٥π/٣

عندما ن = ١

∴ س = π/٣ + π = ٤π/٣ أ، س = −π/٣ + π

= ٢π/٣

∴ م.ح = {π/٣ ، ٢π/٣ ، ٤π/٣ ، ٥π/٣}

(٨) ∵ ظا٢ (س/٢) + ٢ ظا (س/٢) = ١

∴ ٢ ظا (س/٢) = ١ − ظا٢ (س/٢) ∴ (٢ ظا (س/٢))/(١ − ظا٢ (س/٢)) = ١

∴ $\text{ظاس} = ١$ ∴ $\text{س} = \frac{\pi}{٤}$

أ، $\text{س} = \frac{٥\pi}{٤}$

∴ $\text{م.ح} = \left\{\frac{\pi}{٤} ، \frac{٥\pi}{٤}\right\}$

⑨ ∵ $\text{جتاس} - ٢\,\text{جا}^٢\frac{\text{س}}{٢} = ٠$

∴ $١ - ٢\,\text{جا}^٢\frac{\text{س}}{٢} - ٢\,\text{جا}^٢\frac{\text{س}}{٢} = ٠$

∴ $١ - ٤\,\text{جا}^٢\frac{\text{س}}{٢} = ٠$

∴ $\text{جا}^٢\frac{\text{س}}{٢} = \frac{١}{٤}$ ∴ $\text{جا}\frac{\text{س}}{٢} = \pm\frac{١}{٢}$

∴ $\frac{\text{س}}{٢} = \frac{\pi}{٦}$ ومنها $\text{س} = \frac{\pi}{٣}$

أ، $\frac{\text{س}}{٢} = \frac{٥\pi}{٦}$ ومنها $\text{س} = \frac{٥\pi}{٣}$

أ، $\frac{\text{س}}{٢} = \frac{٧\pi}{٦}$ ومنها $\text{س} = \frac{٧}{٣}\pi$ (مرفوض)

أ، $\frac{\text{س}}{٢} = \frac{١١\pi}{٦}$ ومنها $\text{س} = \frac{١١\pi}{٣}$ (مرفوض)

∴ $\text{م.ح} = \left\{\frac{\pi}{٣} ، \frac{٥\pi}{٣}\right\}$

٢٨

∵ $\text{جاس جتا}^٣\text{س} - \text{جا}^٣\text{س جتاس} = \frac{\sqrt{٣}}{٨}$

∴ $\text{جاس جتاس}(\text{جتا}^٢\text{س} - \text{جا}^٢\text{س}) = \frac{\sqrt{٣}}{٨}$

∴ $\text{جاس جتاس} \times \text{جتا}\,٢\text{س} = \frac{\sqrt{٣}}{٨}$

∴ $\frac{١}{٢}\,\text{جا}\,٢\text{س} \times \text{جتا}\,٢\text{س} = \frac{\sqrt{٣}}{٨}$

∴ $\frac{١}{٤}\,\text{جا}\,٤\text{س} = \frac{\sqrt{٣}}{٨}$ ∴ $\text{جا}\,٤\text{س} = \frac{\sqrt{٣}}{٢}$

∴ $٤\text{س} = \frac{\pi}{٣}$ ومنها $\text{س} = \frac{\pi}{١٢}$

أ، $٤\text{س} = \frac{٢\pi}{٣}$ ومنها $\text{س} = \frac{\pi}{٦}$

أ، $٤\text{س} = \frac{٧\pi}{٣}$ ومنها $\text{س} = \frac{٧\pi}{١٢}$

أ، $٤\text{س} = \frac{٨\pi}{٣}$ ومنها $\text{س} = \frac{٢\pi}{٣}$

∴ $\text{م.ح} = \left\{\frac{\pi}{١٢} ، \frac{\pi}{٦} ، \frac{٧\pi}{١٢} ، \frac{٢\pi}{٣}\right\}$

٢٩

∵ $\text{س} \in]٠ ، \pi[$

∵ $\text{جتاس} = \frac{-٤}{٥}$ (سالب)

∴ س تقع في الربع الثاني.

∴ $\text{جتا}\,٣\text{س} = \text{جتا}(\text{س} + ٢\text{س})$

$= \text{جتاس جتا}\,٢\text{س} - \text{جاس جا}\,٢\text{س}$

$= \text{جتاس}(٢\,\text{جتا}^٢\text{س} - ١) - \text{جاس}$

$\times\ ٢\,\text{جاس جتاس}$

$= \frac{-٤}{٥}\left(٢\left(\frac{-٤}{٥}\right)^٢ - ١\right)$

$- \left(\frac{٣}{٥} \times ٢ \times \frac{٣}{٥} \times \frac{-٤}{٥}\right) = \frac{٤٤}{١٢٥}$

٣٠

① $\text{جا}\,٢\text{أ}$

$= ٢\,\text{جاأ جتاأ}$

$= ٢ \times \frac{\text{أ}}{\text{ح}} \times \frac{\text{ب}}{\text{ح}}$

$= \frac{٢\text{أب}}{\text{ح}^٢}$

② $\text{جتا}\,٢\text{أ} = \text{جتا}^٢\text{أ} - \text{جا}^٢\text{أ}$

$= \frac{\text{ب}^٢}{\text{ح}^٢} - \frac{\text{أ}^٢}{\text{ح}^٢} = \frac{\text{ب}^٢ - \text{أ}^٢}{\text{ح}^٢}$

③ $\text{جا}\frac{\text{أ}}{٢} = \sqrt{\frac{١ - \text{جتاأ}}{٢}}$

$= \sqrt{\frac{١ - \frac{\text{ب}}{\text{ح}}}{٢}} = \sqrt{\frac{١}{٢}\left(\frac{\text{ح} - \text{ب}}{\text{ح}}\right)} = \sqrt{\frac{\text{ح} - \text{ب}}{٢\text{ح}}}$

٣١

∵ $\text{م}(\Delta\,\text{أب ح})$

$= \text{م}(\Delta\,\text{أب هـ}) + \text{م}(\Delta\,\text{أهـ ح})$

∴ $\frac{١}{٢}\,\text{ب ح جاأ} = \frac{١}{٢}\,\text{ح} \times \text{أهـ} \times \text{جا}\frac{\text{أ}}{٢}$

$+ \frac{١}{٢}\,\text{ب} \times \text{أهـ} \times \text{جا}\frac{\text{أ}}{٢}$

∴ $\frac{١}{٢}\,\text{ب ح} \times ٢\,\text{جا}\frac{\text{أ}}{٢}\,\text{جتا}\frac{\text{أ}}{٢}$

$= \frac{١}{٢}\,\text{أهـ} \times \text{جا}\frac{\text{أ}}{٢}\,(\text{ح} + \text{ب})$

∴ $\text{أهـ} = \frac{٢\,\text{ب ح}}{\text{ب} + \text{ح}}\,\text{جتا}\frac{\text{أ}}{٢}$

٣٢

① $\text{ف} = \frac{\text{ع}^٢\,\text{جا}\,٢\theta}{\text{ء}}$

② $\text{ف} = \frac{(١٤٫٧)^٢ \times \text{جا}\,٦٠^\circ}{٩٫٨} \approx ١٩\ \text{م}$

ثالثا مسائل تقيس مهارات التفكير

١

①(أ) ②(ب) ③(ج) ④(ج) ⑤(ج)

إرشادات لحل رقم **١** :

① ∵ $\frac{\text{جا}^٢\,٣\text{أ}}{\text{جا}^٢\text{أ}} - \frac{\text{جتا}^٢\,٣\text{أ}}{\text{جتا}^٢\text{أ}} = ٢$

∴ $\frac{\text{جا}^٢\,٣\text{أ جتا}^٢\text{أ} - \text{جتا}^٢\,٣\text{أ جا}^٢\text{أ}}{\text{جا}^٢\text{أ جتا}^٢\text{أ}} = ٢$

∴ $(\text{جا}\,٣\text{أ جتاأ} - \text{جتا}\,٣\text{أ جاأ})$

$(\text{جا}\,٣\text{أ جتاأ} + \text{جتا}\,٣\text{أ جاأ}) = ٢\,\text{جا}^٢\text{أ جتا}^٢\text{أ}$

∴ $\text{جا}(٣\text{أ} - \text{أ}) \times \text{جا}(٣\text{أ} + \text{أ})$

$= \frac{١}{٢} \times (٢\,\text{جاأ جتاأ})^٢$

∴ $\text{جا}\,٢\text{أ} \times \text{جا}\,٤\text{أ} = \frac{١}{٢}\,\text{جا}^٢\,٢\text{أ}$

∴ $\text{جا}\,٢\text{أ} \times ٢\,\text{جا}\,٢\text{أ جتا}\,٢\text{أ} = \frac{١}{٢}\,\text{جا}^٢\,٢\text{أ}$

∴ $\text{جتا}\,٢\text{أ} = \frac{\frac{١}{٢}\,\text{جا}^٢\,٢\text{أ}}{٢\,\text{جا}^٢\,٢\text{أ}} = \frac{١}{٤}$

②

$\text{أح} = \text{ب ء} = \sqrt{(٦)^٢ + (٨)^٢} = ١٠\ \text{سم}$

، ∵ ب م = م ح

∴ $\text{ق}(\angle\,\text{م ب ح}) = \text{ق}(\angle\,\text{م ح ب}) = \text{س}$

∴ $\text{جا}\theta = \text{جا}(١٨٠^\circ - ٢\text{س})$

$= \text{جا}\,٢\text{س}$

$= ٢\,\text{جاس جتاس}$

$= ٢ \times \frac{٦}{١٠} \times \frac{٨}{١٠} = \frac{٢٤}{٢٥}$

③ ∵ $\text{جتا}(\text{س} + ٢\text{س}) - \text{جتا}\,٢\text{س} + \text{جتاس} = ٠$

∴ $\text{جتاس جتا}\,٢\text{س} - \text{جاس جا}\,٢\text{س}$

$- \text{جتا}\,٢\text{س} + \text{جتاس} = ٠$

∴ $\text{جتاس جتا}\,٢\text{س} - ٢\,\text{جا}^٢\text{س جتاس}$

$- \text{جتا}\,٢\text{س} + \text{جتاس} = ٠$

∴ $\text{جتا}\,٢\text{س}(\text{جتاس} - ١)$

$+ \text{جتاس}(١ - ٢\,\text{جا}^٢\text{س}) = ٠$

∴ $\text{جتا}\,٢\text{س}(\text{جتاس} - ١)$

$+ \text{جتاس} \times \text{جتا}\,٢\text{س} = ٠$

∴ $\text{جتا}\,٢\text{س}(٢\,\text{جتاس} - ١) = ٠$

∴ $\text{جتاس} = \frac{١}{٢}$

ومنها $\text{س} = ٦٠^\circ$ والباقي مرفوض

أ، $\text{جتا}\,٢\text{س} = \text{صفر}$

∴ $٢\text{س} = ٩٠^\circ$

ومنها $\text{س} = ٤٥^\circ$ والباقي مرفوض

∴ $\text{م.ح} = \{٤٥^\circ ، ٦٠^\circ\}$

④ $\frac{\text{جا}\,٢\text{أ جتاب} - \text{جتا}\,٢\text{أ جاب}}{\text{جاأ جتا}\,٢\text{ب} + \text{جتاأ جا}\,٢\text{ب}} = \frac{\text{جا}(٢\text{أ} - \text{ب})}{\text{جا}(\text{أ} + ٢\text{ب})}$

∴ $(٢\text{أ} - \text{ب}) + (\text{أ} + ٢\text{ب}) = ٣\text{أ} + \text{ب}$

$= ١٨٠^\circ$ (زاويتان متكاملتان)

∴ $\frac{\text{جا}(٢\text{أ} - \text{ب})}{\text{جا}(\text{أ} + ٢\text{ب})} = ١$

⑤ $\sqrt{جا^2\theta + ٢\,جا\theta\,جتا\theta + جتا^2\theta} - \sqrt{جا^2\theta - ٢\,جا\theta\,جتا\theta + جتا^2\theta}$

$= \sqrt{(جا\theta + جتا\theta)^2} - \sqrt{(جتا\theta - جا\theta)^2}$

∵ $\cdot < \theta < \frac{\pi}{٤}$

∴ جتا θ > جا θ ، جا θ ، جتا θ موجبتان

∴ المقدار = جا θ + جتا θ − (جتا θ − جا θ)

= ٢ جا θ

٢

① جا ٥٤° جا ١٨° = جتا ٣٦° جا ١٨°

$= \frac{جتا ٣٦° \times جتا ١٨° \, جا ١٨°}{جتا ١٨°}$

$= \frac{جتا ٣٦° \times \frac{١}{٢} جا ٣٦°}{جا ٧٢°}$

$= \frac{\frac{١}{٢} \times \frac{١}{٢} جا ٧٢°}{جا ٧٢°} = \frac{١}{٤}$

② الطرف الأيمن

= جا (٣٦° + ١٨°) − جا (٣٦° − ١٨°)

= جا ٣٦° جتا ١٨° + جتا ٣٦° جا ١٨°

− جا ٣٦° جتا ١٨° + جتا ٣٦° جا ١٨°

$= ٢ \, جتا ٣٦° \, جا ١٨° \times \frac{جتا ١٨°}{جتا ١٨°}$

$= \frac{جتا ٣٦° \, جا ٣٦°}{جتا ١٨°} = \frac{١}{٢} \times \frac{جا ٧٢°}{جا ٧٢°} = \frac{١}{٢}$

٣

∵ ظا ٢٠° ظا ٤٠°

= ظا (٣٠° − ١٠°) ظا (٣٠° + ١٠°)

$= \frac{ظا ٣٠° - ظا ١٠°}{١ + ظا ٣٠° ظا ١٠°} \times \frac{ظا ٣٠° + ظا ١٠°}{١ - ظا ٣٠° ظا ١٠°}$

$= \frac{ظا^٢ ٣٠° - ظا^٢ ١٠°}{١ - ظا^٢ ٣٠° ظا^٢ ١٠°}$

$= \frac{\frac{١}{٣} - ظا^٢ ١٠°}{١ - \frac{١}{٣} ظا^٢ ١٠°} \times \frac{٣}{٣} = \frac{١ - ٣ ظا^٢ ١٠°}{٣ - ظا^٢ ١٠°}$ (١)

، ظا ٣٠° = ظا (٢٠° + ١٠°) $= \frac{ظا ٢٠° + ظا ١٠°}{١ - ظا ٢٠° ظا ١٠°}$

$= \frac{\frac{٢ ظا ١٠°}{١ - ظا^٢ ١٠°} + ظا ١٠°}{١ - \frac{٢ ظا ١٠°}{١ - ظا^٢ ١٠°} \times ظا ١٠°}$

$= \frac{٢ ظا ١٠° + ظا ١٠° - ظا^٣ ١٠°}{١ - ظا^٢ ١٠° - ٢ ظا^٢ ١٠°}$

$= \frac{٣ ظا ١٠° - ظا^٣ ١٠°}{١ - ٣ ظا^٢ ١٠°}$

$= \frac{ظا ١٠° (٣ - ظا^٢ ١٠°)}{١ - ٣ ظا^٢ ١٠°}$ (٢)

بضرب (١) ، (٢) :

∴ ظا ٢٠° ظا ٣٠° ظا ٤٠°

$= \frac{١ - ٣ ظا^٢ ١٠°}{٣ - ظا^٢ ١٠°} \times \frac{ظا ١٠° (٣ - ظا^٢ ١٠°)}{١ - ٣ ظا^٢ ١٠°}$

= ظا ١٠°

٤

ظا ٣هـ = ظا (هـ + ٢هـ)

$= \frac{ظا هـ + ظا ٢هـ}{١ - ظا هـ ظا ٢هـ} = \frac{ظا هـ + \frac{٢ ظا هـ}{١ - ظا^٢ هـ}}{١ - ظا هـ \times \frac{٢ ظا هـ}{١ - ظا^٢ هـ}}$

بالضرب بسطًا ومقامًا × (١ − ظا² هـ)

$= \frac{ظا هـ - ظا^٣ هـ + ٢ ظا هـ}{١ - ظا^٢ هـ - ٢ ظا^٢ هـ} = \frac{٣ ظا هـ - ظا^٣ هـ}{١ - ٣ ظا^٢ هـ}$

ظا ٥٠° = ظا (٦٠° − ١٠°) $= \frac{\sqrt{٣} - ظا ١٠°}{١ + \sqrt{٣} ظا ١٠°}$

، ظا ٧٠° = ظا (٦٠° + ١٠°) $= \frac{\sqrt{٣} + ظا ١٠°}{١ - \sqrt{٣} ظا ١٠°}$

، ظا ٦٠° = ظتا ٣٠° $= \frac{١}{ظا ٣٠°} = \frac{١ - ٣ ظا^٢ ١٠°}{٣ ظا ١٠° - ظا^٣ ١٠°}$

∴ ظا ٥٠° ظا ٦٠° ظا ٧٠°

$= \frac{\sqrt{٣} - ظا ١٠°}{١ + \sqrt{٣} ظا ١٠°} \times \frac{\sqrt{٣} + ظا ١٠°}{١ - \sqrt{٣} ظا ١٠°} \times \frac{١ - ٣ ظا^٢ ١٠°}{٣ ظا ١٠° - ظا^٣ ١٠°}$

$= \frac{٣ - ظا^٢ ١٠°}{١ - ٣ ظا^٢ ١٠°} \times \frac{١ - ٣ ظا^٢ ١٠°}{ظا ١٠° (٣ - ظا^٢ ١٠°)}$

$= \frac{١}{ظا ١٠°} = \frac{١}{ظتا ٨٠°} = ظا ٨٠°$

٥

في Δ ء هـ و : $\frac{ء}{جا ء} = \frac{هـ}{جا هـ}$

∴ $\frac{ء}{جا ء} = \frac{٢\sqrt{٣} ء}{جا (١٥٠° - ء)}$

∴ ٢√٣ جا ء = جا (١٥٠° − ء)

∴ ٢√٣ جا ء = جا ١٥٠° جتا ء − جتا ١٥٠° جا ء

∴ ٢√٣ جا ء = $\frac{١}{٢}$ جتا ء + $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ جا ء

∴ $\frac{١}{٢}$ جتا ء = جا ء $\left(\frac{٤\sqrt{٣}}{٢} - \frac{\sqrt{٣}}{٢}\right)$

∴ جتا ء = ٣√٣ جا ء

∴ ظا ء $= \frac{١}{٣\sqrt{٣}} \times \frac{\sqrt{٣}}{\sqrt{٣}} = \frac{\sqrt{٣}}{٩}$

حل آخر :

و² = ء² + هـ² − ٢ ء هـ جتا و

$= ء^٢ + ١٢ ء^٢ - ٢ \times ء \times ٢\sqrt{٣} ء \times \frac{\sqrt{٣}}{٢} = ٧ ء^٢$

∴ و = √٧ ء

∵ $\frac{و}{جا و} = \frac{ء}{جا ء}$

∴ $\frac{ء}{جا ء} = \frac{\sqrt{٧} ء}{جا ٣٠°}$ ∴ جا ء $= \frac{١}{٢\sqrt{٧}}$

∴ ظا ء $= \frac{١}{٣\sqrt{٣}} \times \frac{\sqrt{٣}}{\sqrt{٣}} = \frac{\sqrt{٣}}{٩}$

إجابات تمارين 19

أولاً أسئلة الاختيار من متعدد

① (ب)	② (أ)	③ (جـ)	④ (ب)	⑤ (جـ)
⑥ (جـ)	⑦ (جـ)	⑧ (جـ)	⑨ (أ)	⑩ (جـ)
⑪ (ب)	⑫ (أ)	⑬ (جـ)	⑭ (ب)	⑮ (جـ)
⑯ (جـ)	⑰ (ب)	⑱ (أ)	⑲ (ب)	⑳ (ب)
㉑ (جـ)	㉒ (جـ)	㉓ (د)	㉔ (جـ)	㉕ (د)
㉖ (د)	㉗ (ب)	㉘ (د)		

ثانيًا الأسئلة المقالية

١

① ٢ع = ٤٠ + ٢٤ + ٣٢ ∴ ع = ٤٨

∴ مساحة Δ أ ب جـ

$= \sqrt{٤٨ (٤٨ - ٤٠)(٤٨ - ٢٤)(٤٨ - ٣٢)}$

= ٣٨٤ سم² ،

② مساحة Δ أ ب جـ

$= \frac{١}{٢} \times ١٦ \times ٢٠ \times جا ٦٠° = ٨٠\sqrt{٣}$ سم²

③ ∵ أ² + ب² = (٥)² + (١٢)² = ١٦٩

، جـ² = (١٣)² = ١٦٩

∴ المثلث قائم الزاوية في جـ

∴ مساحة Δ أ ب جـ = $\frac{١}{٢}$ × ٥ × ١٢ = ٣٠ سم²

④ ٢ع = ١٢ + ١٤ + ٣٠ = ٥٦ ∴ ع = ٢٨

∴ ع < ٣٠ (طول أحد الأضلاع)

∴ لا يوجد مثلث.

٢

① ∵ ٢ع = ٧ + ٩ + ١٤ ∴ ع = ١٥

∴ مساحة Δ أ ب جـ

$= \sqrt{١٥ (١٥ - ٧)(١٥ - ٩)(١٥ - ١٤)}$

= ١٢√٥ سم²

∵ نق $= \frac{\Delta}{ع} = \frac{١٢\sqrt{٥}}{١٥} = \frac{٤\sqrt{٥}}{٥}$ سم

② مساحة Δ أ ب جـ = $\frac{١}{٢}$ × ٥ × ٦ × جا ٦٠°

$= \frac{١٥\sqrt{٣}}{٢}$ سم²

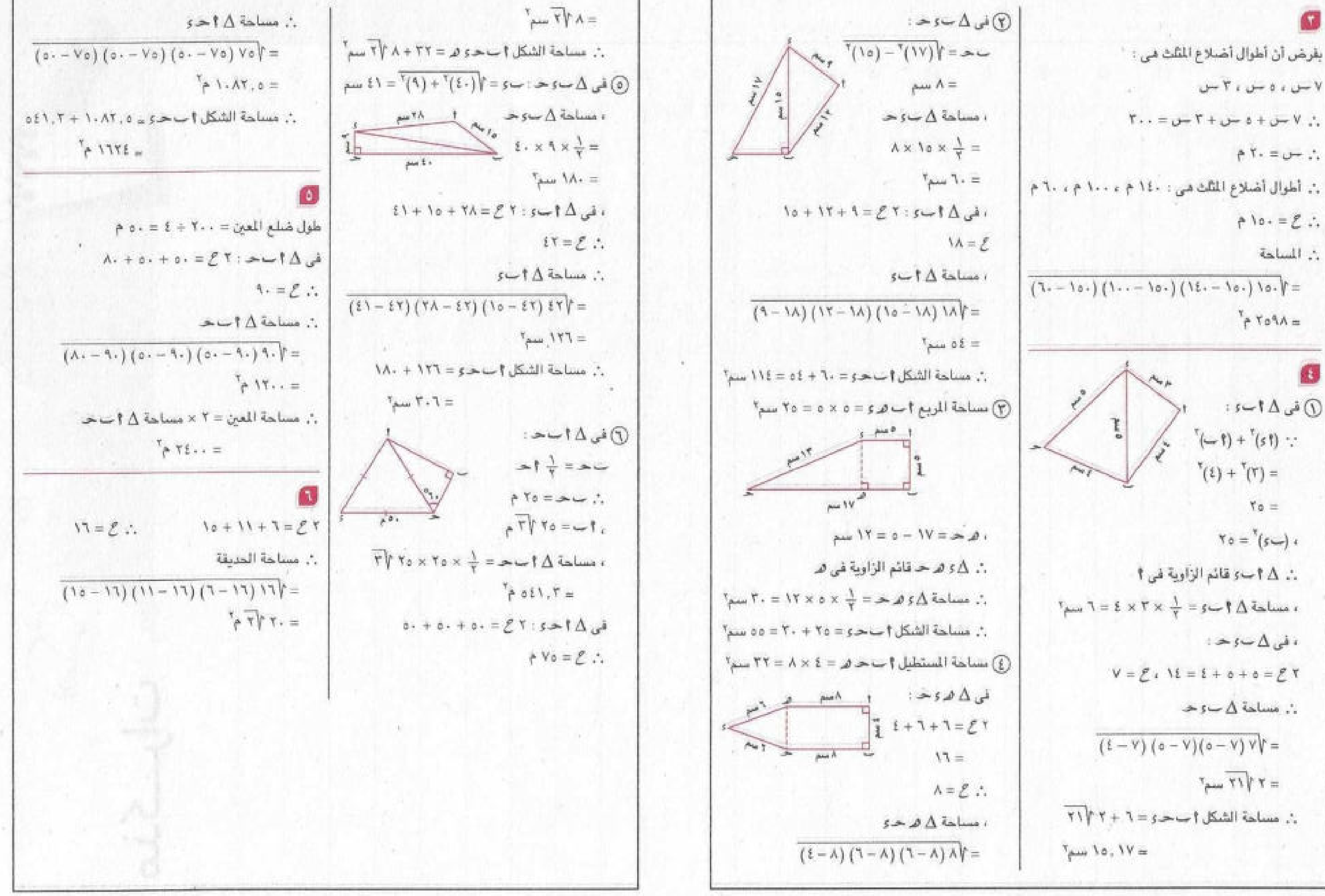
، جـ $= \sqrt{(٥)^٢ + (٦)^٢ - ٢(٥)(٦) \, جتا ٦٠°}$

∴ جـ = √٣١ سم

∴ ٢ع = ٥ + ٦ + √٣١ ≈ ١٦,٥٧

∴ ع = ٨,٣

∴ نق $= \frac{\Delta}{ع} = \frac{\frac{١٥\sqrt{٣}}{٢}}{٨,٣} \approx ١,٦$ سم



٣

بفرض أن أطوال أضلاع المثلث هى :

٧ س ، ٥ س ، ٣ س

∴ ٧ س + ٥ س + ٣ س = ٣٠٠

∴ س = ٢٠ م

∴ أطوال أضلاع المثلث هى : ١٤٠ م ، ١٠٠ م ، ٦٠ م

∴ ع = ١٥٠ م

∴ المساحة

= √(١٥٠ (١٥٠ − ١٤٠) (١٥٠ − ١٠٠) (١٥٠ − ٦٠))

= ٢٥٩٨ م²

٤

① فى Δ أ ب ء :

∵ (أء)² + (أب)²

= (٣)² + (٤)²

= ٢٥

، (ب ء)² = ٢٥

∴ Δ أ ب ء قائم الزاوية فى أ

، مساحة Δ أ ب ء = ½ × ٣ × ٤ = ٦ سم²

، فى Δ ب ء حـ :

٢ ع = ٥ + ٥ + ٤ = ١٤ ، ع = ٧

∴ مساحة Δ ب ء حـ

= √(٧ (٧ − ٥)(٧ − ٥) (٧ − ٤))

= ٢√٢١ سم²

∴ مساحة الشكل أ ب حـ ء = ٦ + ٢√٢١

= ١٥,١٧ سم²

② فى Δ ب ء حـ :

ب حـ = √((١٧)² − (١٥)²)

= ٨ سم

، مساحة Δ ب ء حـ

= ½ × ١٥ × ٨

= ٦٠ سم²

، فى Δ أ ب ء : ٢ ع = ٩ + ١٢ + ١٥

ع = ١٨

، مساحة Δ أ ب ء

= √(١٨ (١٨ − ١٥) (١٨ − ١٢) (١٨ − ٩))

= ٥٤ سم²

∴ مساحة الشكل أ ب حـ ء = ٦٠ + ٥٤ = ١١٤ سم²

③ مساحة المربع أ ب هـ ء = ٥ × ٥ = ٢٥ سم²

، هـ حـ = ١٧ − ٥ = ١٢ سم

∴ Δ ء هـ حـ قائم الزاوية فى هـ

∴ مساحة Δ ء هـ حـ = ½ × ٥ × ١٢ = ٣٠ سم²

∴ مساحة الشكل أ ب حـ ء = ٢٥ + ٣٠ = ٥٥ سم²

④ مساحة المستطيل أ ب حـ هـ = ٤ × ٨ = ٣٢ سم²

فى Δ ء هـ حـ :

٢ ع = ٦ + ٦ + ٤

= ١٦

∴ ع = ٨

، مساحة Δ ء هـ حـ

= √(٨ (٨ − ٦) (٨ − ٦) (٨ − ٤))

= ٨√٢ سم²

∴ مساحة الشكل أ ب حـ ء هـ = ٣٢ + ٨√٢ سم²

⑤ فى Δ ب ء حـ : ب ء = √((٤٠)² + (٩)²) = ٤١ سم

، مساحة Δ ب ء حـ

= ½ × ٩ × ٤٠

= ١٨٠ سم²

، فى Δ أ ب ء : ٢ ع = ٢٨ + ١٥ + ٤١

∴ ع = ٤٢

∴ مساحة Δ أ ب ء

= √(٤٢ (٤٢ − ١٥) (٤٢ − ٢٨) (٤٢ − ٤١))

= ١٢٦ سم²

∴ مساحة الشكل أ ب حـ ء = ١٢٦ + ١٨٠

= ٣٠٦ سم²

⑥ فى Δ أ ب حـ :

ب حـ = ½ أ حـ

∴ ب حـ = ٢٥ م

، أ ب = ٢٥√٣ م

، مساحة Δ أ ب حـ = ½ × ٢٥ × ٢٥√٣

= ٥٤١,٣ م²

فى Δ أ حـ ء : ٢ ع = ٥٠ + ٥٠ + ٥٠

∴ ع = ٧٥ م

∴ مساحة Δ أ حـ ء

= √(٧٥ (٧٥ − ٥٠) (٧٥ − ٥٠) (٧٥ − ٥٠))

= ١٠٨٢,٥ م²

∴ مساحة الشكل أ ب حـ ء ≈ ١٠٨٢,٥ + ٥٤١,٣

≈ ١٦٢٤ م²

٥

طول ضلع المعين = ٢٠٠ ÷ ٤ = ٥٠ م

فى Δ أ ب حـ : ٢ ع = ٥٠ + ٥٠ + ٨٠

∴ ع = ٩٠

∴ مساحة Δ أ ب حـ

= √(٩٠ (٩٠ − ٥٠) (٩٠ − ٥٠) (٩٠ − ٨٠))

= ١٢٠٠ م²

∴ مساحة المعين = ٢ × مساحة Δ أ ب حـ

= ٢٤٠٠ م²

٦

٢ ع = ٦ + ١١ + ١٥ ∴ ع = ١٦

∴ مساحة الحديقة

= √(١٦ (١٦ − ٦) (١٦ − ١١) (١٦ − ١٥))

= ٢٠√٢ م²